Спецкурс «Математическая логика», часть 2

Лекция 11 (16.04.2020)
Интуиционистская логика первого порядка. Погружение классической логики в интуиционистскую

С. Л. Кузнецов

МГУ имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
весенний семестр 2019–2020 учебного года

Какая логика сильнее — CL или Int?

Какая логика сильнее — CL или Int?

Иллюстрация: Uwe Kils, Wiska Bodo.

Какая логика сильнее — CL или Int?

Классическая: в ней доказуемо больше теорем.

Иллюстрация: Uwe Kils, Wiska Bodo.

Какая логика сильнее — CL или Int?

Классическая: в ней доказуемо больше теорем.

Интуиционистская: к ней можно *свести* классическую.

Иллюстрация: Uwe Kils, Wiska Bodo.

Пропозициональный случай

Теорема Гливенко

Формула A *выводима в* CL *тогда и только тогда, когда* $\neg\neg A$ *выводима в* Int.

Пропозициональный случай

Теорема Гливенко

Формула A выводима в CL *тогда и только тогда, когда* $\neg\neg A$ *выводима в* Int.

- $\mathrm{Int} \vdash \neg\neg A \Longrightarrow \mathrm{CL} \vdash \neg\neg A \Longrightarrow \mathrm{CL} \vdash A$.

Пропозициональный случай

Теорема Гливенко

Формула A выводима в CL *тогда и только тогда, когда* $\neg\neg A$ *выводима в* Int.

- $\mathrm{Int} \vdash \neg\neg A \Longrightarrow \mathrm{CL} \vdash \neg\neg A \Longrightarrow \mathrm{CL} \vdash A$.
- Интересно направление $\mathrm{CL} \vdash A \Longrightarrow \mathrm{Int} \vdash \neg\neg A$.

Пропозициональный случай

Теорема Гливенко

Формула A выводима в CL *тогда и только тогда, когда* $\neg\neg A$ *выводима в* Int.

- $\mathrm{Int} \vdash \neg\neg A \implies \mathrm{CL} \vdash \neg\neg A \implies \mathrm{CL} \vdash A$.
- Интересно направление $\mathrm{CL} \vdash A \implies \mathrm{Int} \vdash \neg\neg A$.
- Традиционное доказательство теоремы Гливенко использует *свойство конечных моделей* для Int.

Пропозициональный случай

Теорема Гливенко

Формула A *выводима в* CL *тогда и только тогда, когда* $\neg\neg A$ *выводима в* Int.

- $\mathrm{Int} \vdash \neg\neg A \Longrightarrow \mathrm{CL} \vdash \neg\neg A \Longrightarrow \mathrm{CL} \vdash A$.
- Интересно направление $\mathrm{CL} \vdash A \Longrightarrow \mathrm{Int} \vdash \neg\neg A$.
- Традиционное доказательство теоремы Гливенко использует *свойство конечных моделей* для Int.
- Если $\mathrm{Int} \nvdash \neg\neg A$, то существует такая *конечная* модель Крипке $\mathscr{M}$ и в ней мир w, что $\mathscr{M}, w \nVdash \neg\neg A$.

Пропозициональный случай

Теорема Гливенко

Формула A *выводима в* CL *тогда и только тогда, когда* $\neg\neg A$ *выводима в* Int.

- $\mathrm{Int} \vdash \neg\neg A \Longrightarrow \mathrm{CL} \vdash \neg\neg A \Longrightarrow \mathrm{CL} \vdash A$.
- Интересно направление $\mathrm{CL} \vdash A \Longrightarrow \mathrm{Int} \vdash \neg\neg A$.
- Традиционное доказательство теоремы Гливенко использует *свойство конечных моделей* для Int.
- Если $\mathrm{Int} \nvdash \neg\neg A$, то существует такая *конечная* модель Крипке $\mathscr{M}$ и в ней мир w, что $\mathscr{M}, w \nVdash \neg\neg A$.
- Из этой модели построим *классическую* контрмодель для A.

Двойное отрицание в моделях Крипке

- $\mathrm{Int} \vdash A \to \neg\neg A$ (но $\mathrm{Int} \nvdash \neg\neg A \to A$).

Двойное отрицание в моделях Крипке

- $\mathrm{Int} \vdash A \to \neg\neg A$ (но $\mathrm{Int} \nvdash \neg\neg A \to A$).
  - Напомним, что $\neg\neg A = ((A \to \bot) \to \bot)$, т.е. просто получаем $\bot$ применением modus ponens из A и $A \to \bot$ и применяем теорему о дедукции.

Двойное отрицание в моделях Крипке

- $\mathrm{Int} \vdash A \to \neg\neg A$ (но $\mathrm{Int} \nvdash \neg\neg A \to A$).
  - Напомним, что $\neg\neg A = ((A \to \bot) \to \bot)$, т.е. просто получаем $\bot$ применением modus ponens из A и $A \to \bot$ и применяем теорему о дедукции.
- Если $w \Vdash A$, то $w \Vdash \neg\neg A$.

Двойное отрицание в моделях Крипке

- Int $\vdash A \to \neg\neg A$ (но Int $\nvdash \neg\neg A \to A$).
  - Напомним, что $\neg\neg A = ((A \to \bot) \to \bot)$, т.е. просто получаем $\bot$ применением modus ponens из A и $A \to \bot$ и применяем теорему о дедукции.
- Если $w \Vdash A$, то $w \Vdash \neg\neg A$.
- Если $w \nVdash \neg\neg A$, то $w \nVdash A$.

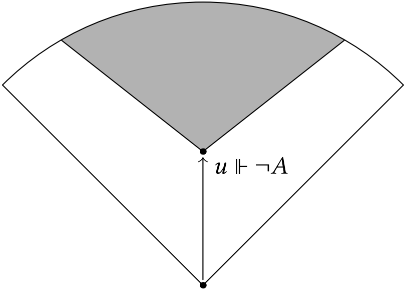
Двойное отрицание в моделях Крипке

- $\mathrm{Int} \vdash A \longrightarrow \neg\neg A$ (но $\mathrm{Int} \nvdash \neg\neg A \longrightarrow A$).
    - Напомним, что $\neg\neg A = ((A \longrightarrow \bot) \longrightarrow \bot)$, т.е. просто получаем $\bot$ применением modus ponens из A и $A \longrightarrow \bot$ и применяем теорему о дедукции.
- Если $w \Vdash A$, то $w \Vdash \neg\neg A$.
- Если $w \nVdash \neg\neg A$, то $w \nVdash A$.
- Но можно сказать больше!

Двойное отрицание в моделях Крипке

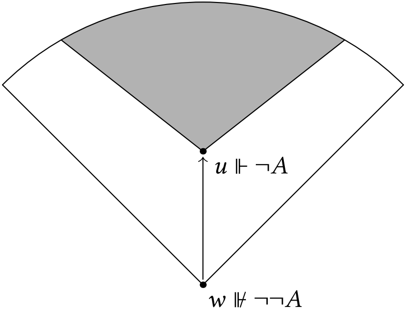
- $\mathrm{Int} \vdash A \to \neg\neg A$ (но $\mathrm{Int} \nvdash \neg\neg A \to A$).
  - Напомним, что $\neg\neg A = ((A \to \bot) \to \bot)$, т.е. просто получаем $\bot$ применением modus ponens из A и $A \to \bot$ и применяем теорему о дедукции.
- Если $w \Vdash A$, то $w \Vdash \neg\neg A$.
- Если $w \nVdash \neg\neg A$, то $w \nVdash A$.
- Но можно сказать больше!
- Если $w \nVdash \neg\neg A$, то существует такой $u \in R(w)$, что $v \nVdash A$ для любого $v \in R(u)$.

Доказательство теоремы Гливенко



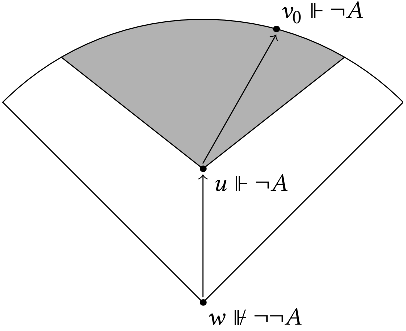
- Нашли конус $R(u)$, в котором A не истинно нигде.

Доказательство теоремы Гливенко



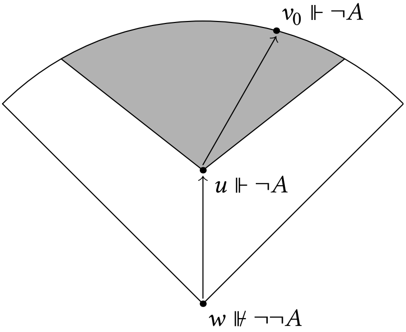
- Нашли конус $R(u)$, в котором A не истинно нигде.
- $\mathscr{M}$ конечная, значит, в $R(u)$ есть максимальные элементы.

Доказательство теоремы Гливенко



- Нашли конус $R(u)$, в котором A не истинно нигде.
- $\mathscr{M}$ конечная, значит, в $R(u)$ есть максимальные элементы.
- Логика мира v_0 классическая, поскольку $R(v_0) = \{v_0\}$.

Доказательство теоремы Гливенко



- Нашли конус $R(u)$, в котором A не истинно нигде.
- $\mathscr{M}$ конечная, значит, в $R(u)$ есть максимальные элементы.
- Логика мира v_0 классическая, поскольку $R(v_0) = \{v_0\}$.
- $v \nVdash A \Longrightarrow \mathrm{CL} \nvdash A$.

Доказательство без свойства конечных моделей

- Интуиционистская логика первого порядка (FO-Int) не обладает свойством конечных моделей.

Доказательство без свойства конечных моделей

- Интуиционистская логика первого порядка (FO-Int) не обладает свойством конечных моделей.
- Попробуем избавиться от использования этого свойства в доказательстве теоремы Гливенко.

Доказательство без свойства конечных моделей

- Интуиционистская логика первого порядка (FO-Int) не обладает свойством конечных моделей.
- Попробуем избавиться от использования этого свойства в доказательстве теоремы Гливенко.
- Наше доказательство будет основано на понятии *стабилизации*.

Доказательство без свойства конечных моделей

- Интуиционистская логика первого порядка (FO-Int) не обладает свойством конечных моделей.
- Попробуем избавиться от использования этого свойства в доказательстве теоремы Гливенко.
- Наше доказательство будет основано на понятии *стабилизации.*
- Мы найдём такой мир v_0, что не обязательно $R(v_0) = \{v_0\}$, но *интересующие нас формулы ведут себя одинаково во всех мирах* $v \in R(v_0)$.

Доказательство без свойства конечных моделей

- Пусть $\mathscr{V}$ — множество пропозициональных переменных, используемых в формуле A.

Доказательство без свойства конечных моделей

- Пусть $\mathscr{V}$ — множество пропозициональных переменных, используемых в формуле A.
- $\mathscr{V}$ конечно.

Доказательство без свойства конечных моделей

- Пусть $\mathscr{V}$ — множество пропозициональных переменных, используемых в формуле A.
- $\mathscr{V}$ конечно.
- **Определение.** Мир $v_0 \in W$ стабилен на множестве переменных $\mathscr{V}$, если для любой $p \in \mathscr{V}$ либо $v_0 \Vdash p$ (и тогда p истинно во всём $R(v_0)$), либо p не истинна во всём $R(v_0)$ (т.е. $v_0 \Vdash \neg p$).

Доказательство без свойства конечных моделей

- Пусть $\mathscr{V}$ — множество пропозициональных переменных, используемых в формуле A.
- $\mathscr{V}$ конечно.
- **Определение.** Мир $v_0 \in W$ стабилен на множестве переменных $\mathscr{V}$, если для любой $p \in \mathscr{V}$ либо $v_0 \Vdash p$ (и тогда p истинно во всём $R(v_0)$), либо p не истинна во всём $R(v_0)$ (т.е. $v_0 \Vdash \neg p$).

Лемма

Если v_0 стабилен на $\mathscr{V}$, то для любой формулы B, переменные которой лежат в $\mathscr{V}$, верно то же условие стабильности: либо $v_0 \Vdash B$, либо $v \Vdash \neg B$.

Доказательство без свойства конечных моделей

- Пусть $\mathscr{V}$ — множество пропозициональных переменных, используемых в формуле A.
- $\mathscr{V}$ конечно.
- **Определение.** Мир $v_0 \in W$ стабилен на множестве переменных $\mathscr{V}$, если для любой $p \in \mathscr{V}$ либо $v_0 \Vdash p$ (и тогда p истинно во всём $R(v_0)$), либо p не истинна во всём $R(v_0)$ (т.е. $v_0 \Vdash \neg p$).

Лемма

Если v_0 стабилен на $\mathscr{V}$, то для любой формулы B, переменные которой лежат в $\mathscr{V}$, верно то же условие стабильности: либо $v_0 \Vdash B$, либо $v \Vdash \neg B$.

- Доказательство — индукция по построению B.

Доказательство без свойства конечных моделей

- Пусть $\mathscr{V}$ — множество пропозициональных переменных, используемых в формуле A.
- $\mathscr{V}$ конечно.
- **Определение.** Мир $v_0 \in W$ стабилен на множестве переменных $\mathscr{V}$, если для любой $p \in \mathscr{V}$ либо $v_0 \Vdash p$ (и тогда p истинно во всём $R(v_0)$), либо p не истинна во всём $R(v_0)$ (т.е. $v_0 \Vdash \neg p$).

Лемма

Если v_0 стабилен на $\mathscr{V}$, то для любой формулы B, переменные которой лежат в $\mathscr{V}$, верно то же условие стабильности: либо $v_0 \Vdash B$, либо $v \Vdash \neg B$.

- Доказательство — индукция по построению B.
  - Интересный случай — импликация.

Доказательство без свойства конечных моделей

- Пусть $\mathscr{V}$ — множество пропозициональных переменных, используемых в формуле A.
- $\mathscr{V}$ конечно.
- **Определение.** Мир $v_0 \in W$ стабилен на множестве переменных $\mathscr{V}$, если для любой $p \in \mathscr{V}$ либо $v_0 \Vdash p$ (и тогда p истинно во всём $R(v_0)$), либо p не истинна во всём $R(v_0)$ (т.е. $v_0 \Vdash \neg p$).

Лемма

Если v_0 стабилен на $\mathscr{V}$, то для любой формулы B, переменные которой лежат в $\mathscr{V}$, верно то же условие стабильности: либо $v_0 \Vdash B$, либо $v \Vdash \neg B$.

- Доказательство — индукция по построению B.
  - Интересный случай — импликация.
  - Если $v_0 \nVdash (C \longrightarrow D)$, то $v \Vdash C$ и $v \nVdash D$ для некоторого $v \in R(v_0)$.

Доказательство без свойства конечных моделей

- Пусть $\mathscr{V}$ — множество пропозициональных переменных, используемых в формуле A.
- $\mathscr{V}$ конечно.
- **Определение.** Мир $v_0 \in W$ стабилен на множестве переменных $\mathscr{V}$, если для любой $p \in \mathscr{V}$ либо $v_0 \Vdash p$ (и тогда p истинно во всём $R(v_0)$), либо p не истинна во всём $R(v_0)$ (т.е. $v_0 \Vdash \neg p$).

Лемма

Если v_0 стабилен на $\mathscr{V}$, то для любой формулы B, переменные которой лежат в $\mathscr{V}$, верно то же условие стабильности: либо $v_0 \Vdash B$, либо $v \Vdash \neg B$.

- Доказательство — индукция по построению B.
  - Интересный случай — импликация.
  - Если $v_0 \nVdash (C \longrightarrow D)$, то $v \Vdash C$ и $v \nVdash D$ для некоторого $v \in R(v_0)$.
  - $v' \Vdash C$ и $v' \nVdash D$ для произвольного $v' \in R(v_0)$.

Доказательство без свойства конечных моделей

- Пусть $\mathscr{V}$ — множество пропозициональных переменных, используемых в формуле A.
- $\mathscr{V}$ конечно.
- **Определение.** Мир $v_0 \in W$ стабилен на множестве переменных $\mathscr{V}$, если для любой $p \in \mathscr{V}$ либо $v_0 \Vdash p$ (и тогда p истинно во всём $R(v_0)$), либо p не истинна во всём $R(v_0)$ (т.е. $v_0 \Vdash \neg p$).

Лемма

Если v_0 стабилен на $\mathscr{V}$, то для любой формулы B, переменные которой лежат в $\mathscr{V}$, верно то же условие стабильности: либо $v_0 \Vdash B$, либо $v \Vdash \neg B$.

- Доказательство — индукция по построению B.
  - Интересный случай — импликация.
  - Если $v_0 \nVdash (C \longrightarrow D)$, то $v \Vdash C$ и $v \nVdash D$ для некоторого $v \in R(v_0)$.
  - $v' \Vdash C$ и $v' \nVdash D$ для произвольного $v' \in R(v_0)$.
  - Значит, $v' \nVdash (C \longrightarrow D)$, откуда $v_0 \Vdash \neg(C \longrightarrow D)$.

Доказательство без свойства конечных моделей

Лемма

Для любого $u \in W$ *и любого конечного* $\mathscr{V}$ *найдётся* $v_0 \in R(u)$, *стабильный на* $\mathscr{V}$.

Доказательство без свойства конечных моделей

Лемма

Для любого $u \in W$ *и любого конечного* $\mathscr{V}$ *найдётся* $v_0 \in R(u)$, *стабильный на* $\mathscr{V}$.

- Индукция по $|\mathscr{V}|$.

Доказательство без свойства конечных моделей

Лемма

Для любого $u \in W$ *и любого конечного* $\mathscr{V}$ *найдётся* $v_0 \in R(u)$, *стабильный на* $\mathscr{V}$.

- Индукция по $|\mathscr{V}|$.
- Пусть v_0 стабилен на $\mathscr{V}$, p — новая переменная.

Доказательство без свойства конечных моделей

Лемма

Для любого $u \in W$ *и любого конечного* $\mathscr{V}$ *найдётся* $v_0 \in R(u)$, *стабильный на* $\mathscr{V}$.

- Индукция по $|\mathscr{V}|$.
- Пусть v_0 стабилен на $\mathscr{V}$, p — новая переменная.
- Если $v_0 \Vdash p$, то v_0 стабилен на $\mathscr{V} \cup \{p\}$.

Доказательство без свойства конечных моделей

Лемма

Для любого $u \in W$ и любого конечного $\mathscr{V}$ найдётся $v_0 \in R(u)$, стабильный на $\mathscr{V}$.

- Индукция по $|\mathscr{V}|$.
- Пусть v_0 стабилен на $\mathscr{V}$, p — новая переменная.
- Если $v_0 \Vdash p$, то v_0 стабилен на $\mathscr{V} \cup \{p\}$.
- Если $v_0 \nVdash p$, то возможны два случая:

Доказательство без свойства конечных моделей

Лемма

Для любого $u \in W$ и любого конечного $\mathscr{V}$ найдётся $v_0 \in R(u)$, стабильный на $\mathscr{V}$.

- Индукция по $|\mathscr{V}|$.
- Пусть v_0 стабилен на $\mathscr{V}$, p — новая переменная.
- Если $v_0 \Vdash p$, то v_0 стабилен на $\mathscr{V} \cup \{p\}$.
- Если $v_0 \nVdash p$, то возможны два случая:
  1. $v_0 \Vdash \neg p$: тогда v_0 стабилен на $\mathscr{V} \cup \{p\}$;

Доказательство без свойства конечных моделей

Лемма

Для любого $u \in W$ *и любого конечного* $\mathscr{V}$ *найдётся* $v_0 \in R(u)$, *стабильный на* $\mathscr{V}$.

- Индукция по $|\mathscr{V}|$.
- Пусть v_0 стабилен на $\mathscr{V}$, p — новая переменная.
- Если $v_0 \Vdash p$, то v_0 стабилен на $\mathscr{V} \cup \{p\}$.
- Если $v_0 \nVdash p$, то возможны два случая:
  1. $v_0 \Vdash \neg p$: тогда v_0 стабилен на $\mathscr{V} \cup \{p\}$;
  2. $v_0 \nVdash \neg p$. В этом случае $v_0' \Vdash p$ для некоторого $v_0' \in R(v_0)$.

Доказательство без свойства конечных моделей

Лемма

Для любого $u \in W$ *и любого конечного* $\mathscr{V}$ *найдётся* $v_0 \in R(u)$, *стабильный на* $\mathscr{V}$.

- Индукция по $|\mathscr{V}|$.
- Пусть v_0 стабилен на $\mathscr{V}$, p — новая переменная.
- Если $v_0 \Vdash p$, то v_0 стабилен на $\mathscr{V} \cup \{p\}$.
- Если $v_0 \nVdash p$, то возможны два случая:
  1. $v_0 \Vdash \neg p$: тогда v_0 стабилен на $\mathscr{V} \cup \{p\}$;
  2. $v_0 \nVdash \neg p$. В этом случае $v_0' \Vdash p$ для некоторого $v_0' \in R(v_0)$.
- Во втором случае перейдём в мир v_0'.

Доказательство без свойства конечных моделей

Лемма

Для любого $u \in W$ и любого конечного $\mathscr{V}$ найдётся $v_0 \in R(u)$, стабильный на $\mathscr{V}$.

- Индукция по $|\mathscr{V}|$.
- Пусть v_0 стабилен на $\mathscr{V}$, p — новая переменная.
- Если $v_0 \Vdash p$, то v_0 стабилен на $\mathscr{V} \cup \{p\}$.
- Если $v_0 \nVdash p$, то возможны два случая:
  1. $v_0 \Vdash \neg p$: тогда v_0 стабилен на $\mathscr{V} \cup \{p\}$;
  2. $v_0 \nVdash \neg p$. В этом случае $v_0' \Vdash p$ для некоторого $v_0' \in R(v_0)$.
- Во втором случае перейдём в мир v_0'.
- Свойство стабильности для «старых» переменных из $\mathscr{V}$ не испортится.

Доказательство без свойства конечных моделей

Доказательство теоремы Гливенко:

- Пусть $w \nVdash \neg\neg A$.

Доказательство без свойства конечных моделей

Доказательство теоремы Гливенко:

- Пусть $w \nVdash \neg\neg A$.
- Существует $u \in R(w)$, для которого $u \Vdash \neg A$.

Доказательство без свойства конечных моделей

Доказательство теоремы Гливенко:

- Пусть $w \nVdash \neg\neg A$.
- Существует $u \in R(w)$, для которого $u \Vdash \neg A$.
- Пусть $\mathscr{V} = \mathrm{Var}(A)$. Построим $v_0 \in R(u)$, стабильный на $\mathscr{V}$.

Доказательство без свойства конечных моделей

Доказательство теоремы Гливенко:

- Пусть $w \nVdash \neg\neg A$.
- Существует $u \in R(w)$, для которого $u \Vdash \neg A$.
- Пусть $\mathscr{V} = \mathrm{Var}(A)$. Построим $v_0 \in R(u)$, стабильный на $\mathscr{V}$.
- $v_0 \nVdash A$.

Доказательство без свойства конечных моделей

Доказательство теоремы Гливенко:

- Пусть $w \nVdash \neg\neg A$.
- Существует $u \in R(w)$, для которого $u \Vdash \neg A$.
- Пусть $\mathscr{V} = \mathrm{Var}(A)$. Построим $v_0 \in R(u)$, стабильный на $\mathscr{V}$.
- $v_0 \nVdash A$.
- Для любой формулы B её истинность в v_0 *по Крипке* равносильна её истинности при *классической* оценке α_{v_0}.

Доказательство без свойства конечных моделей

Доказательство теоремы Гливенко:

- Пусть $w \nVdash \neg\neg A$.
- Существует $u \in R(w)$, для которого $u \Vdash \neg A$.
- Пусть $\mathscr{V} = \mathrm{Var}(A)$. Построим $v_0 \in R(u)$, стабильный на $\mathscr{V}$.
- $v_0 \nVdash A$.
- Для любой формулы B её истинность в v_0 *по Крипке* равносильна её истинности при *классической* оценке α_{v_0}.
  - $v \Vdash C \iff v_0 \Vdash C$ для $v \in R(v_0)$.

Доказательство без свойства конечных моделей

Доказательство теоремы Гливенко:

- Пусть $w \nVdash \neg\neg A$.
- Существует $u \in R(w)$, для которого $u \Vdash \neg A$.
- Пусть $\mathscr{V} = \mathrm{Var}(A)$. Построим $v_0 \in R(u)$, стабильный на $\mathscr{V}$.
- $v_0 \nVdash A$.
- Для любой формулы B её истинность в v_0 *по Крипке* равносильна её истинности при *классической* оценке α_{v_0}.
  - $v \Vdash C \iff v_0 \Vdash C$ для $v \in R(v_0)$.
- Отсюда $\mathrm{CL} \nvdash A$.

Аналоги теоремы Гливенко для FO-Int

- Верна ли теорема Гливенко для интуиционистской логики предикатов FO-Int?

Аналоги теоремы Гливенко для FO-Int

- Верна ли теорема Гливенко для интуиционистской логики предикатов FO-Int?
- **Нет.** Контрпример: $\varphi = \neg\psi = \neg\big((\forall x\,\neg\neg P(x)) \wedge (\neg\forall x\, P(x))\big)$.

Аналоги теоремы Гливенко для FO-Int

- Верна ли теорема Гливенко для интуиционистской логики предикатов FO-Int?
- **Нет.** Контрпример: $\varphi = \neg\psi = \neg\big((\forall x\, \neg\neg P(x)) \wedge (\neg\forall x\, P(x))\big)$.
  - Классически эта формула общезначима, т.к. равносильна $(\neg\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, P(x))$.

Аналоги теоремы Гливенко для FO-Int

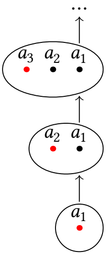
- Верна ли теорема Гливенко для интуиционистской логики предикатов FO-Int?
- **Нет.** Контрпример: $\varphi = \neg\psi = \neg\big((\forall x\, \neg\neg P(x)) \wedge (\neg\forall x\, P(x))\big)$.
  - Классически эта формула общезначима, т.к. равносильна $(\neg\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, P(x))$.
  - FO-Int $\vdash (\neg\neg\psi \to \bot) \to (\psi \to \bot)$ — т.к. $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$.

Аналоги теоремы Гливенко для FO-Int

- Верна ли теорема Гливенко для интуиционистской логики предикатов FO-Int?
- **Нет.** Контрпример: $\varphi = \neg\psi = \neg\big((\forall x\, \neg\neg P(x)) \wedge (\neg\forall x\, P(x))\big)$.
  - Классически эта формула общезначима, т.к. равносильна $(\neg\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, P(x))$.
  - FO-Int $\vdash (\neg\neg\psi \to \bot) \to (\psi \to \bot)$ — т.к. $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$.
  - FO-Int $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$.

Аналоги теоремы Гливенко для FO-Int

- Верна ли теорема Гливенко для интуиционистской логики предикатов FO-Int?
- **Нет.** Контрпример: $\varphi = \neg\psi = \neg\big((\forall x\, \neg\neg P(x)) \wedge (\neg\forall x\, P(x))\big)$.
  - Классически эта формула общезначима, т.к. равносильна $(\neg\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, P(x))$.
  - FO-Int $\vdash (\neg\neg\psi \longrightarrow \bot) \longrightarrow (\psi \longrightarrow \bot)$ — т.к. $\vdash \psi \longrightarrow \neg\neg\psi$.
  - FO-Int $\vdash \neg\neg\varphi \longrightarrow \varphi$.
  - При этом FO-Int $\nvdash \varphi$: $w_1 \Vdash (\forall x\, \neg\neg P(x)) \wedge (\neg\forall x\, P(x))$.



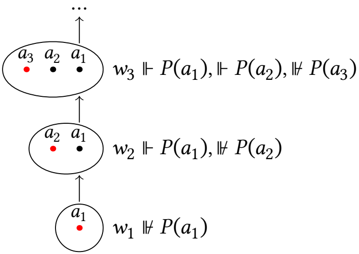
$w_3 \Vdash P(a_1), \Vdash P(a_2), \nVdash P(a_3)$

$w_2 \Vdash P(a_1), \nVdash P(a_2)$

$w_1 \nVdash P(a_1)$

Аналоги теоремы Гливенко для FO-Int

- Верна ли теорема Гливенко для интуиционистской логики предикатов FO-Int?
- **Нет.** Контрпример: $\varphi = \neg\psi = \neg\big((\forall x\, \neg\neg P(x)) \wedge (\neg\forall x\, P(x))\big)$.
    - Классически эта формула общезначима, т.к. равносильна $(\neg\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, P(x))$.
    - $\text{FO-Int} \vdash (\neg\neg\psi \longrightarrow \bot) \longrightarrow (\psi \longrightarrow \bot)$ — т.к. $\vdash \psi \longrightarrow \neg\neg\psi$.
    - $\text{FO-Int} \vdash \neg\neg\varphi \longrightarrow \varphi$.
    - При этом $\text{FO-Int} \nvdash \varphi$: $w_1 \Vdash (\forall x\, \neg\neg P(x)) \wedge (\neg\forall x\, P(x))$.



- **Вопрос на будущее:** верна ли теорема Гливенко для FO-Int + CD?

Перевод Куроды

- Проблема с теоремой Гливенко — отсутствие стабилизации для формул вида $\forall x\, \xi(x)$.

Перевод Куроды

- Проблема с теоремой Гливенко — отсутствие стабилизации для формул вида $\forall x\, \xi(x)$.
- Может быть, что $v_0 \Vdash \neg\forall x\, \xi(x)$, но при этом нет «классического» свидетеля a, для которого $v_0 \Vdash \neg\, \xi(a)$.

Перевод Куроды

- Проблема с теоремой Гливенко — отсутствие стабилизации для формул вида $\forall x\, \xi(x)$.
- Может быть, что $v_0 \Vdash \neg\forall x\, \xi(x)$, но при этом нет «классического» свидетеля a, для которого $v_0 \Vdash \neg\, \xi(a)$.
  - В каждом следующем мире — новый свидетель.

Перевод Куроды

- Проблема с теоремой Гливенко — отсутствие стабилизации для формул вида $\forall x\, \xi(x)$.
- Может быть, что $v_0 \Vdash \neg\forall x\, \xi(x)$, но при этом нет «классического» свидетеля a, для которого $v_0 \Vdash \neg\, \xi(a)$.
  - В каждом следующем мире — новый свидетель.
- При этом в двойственном случае, с $\exists x\, \xi(x)$, проблемы нет.

Перевод Куроды

- Проблема с теоремой Гливенко — отсутствие стабилизации для формул вида $\forall x\, \xi(x)$.
- Может быть, что $v_0 \Vdash \neg\forall x\, \xi(x)$, но при этом нет «классического» свидетеля a, для которого $v_0 \Vdash \neg\, \xi(a)$.
  - В каждом следующем мире — новый свидетель.
- При этом в двойственном случае, с $\exists x\, \xi(x)$, проблемы нет.
  - Если $v_0 \Vdash \exists x\, \xi(x)$, то $v \Vdash \xi(a)$ для всех $v \in R(v_0)$, причём $a \in D_{v_0}$.

Перевод Куроды

- Проблема с теоремой Гливенко — отсутствие стабилизации для формул вида $\forall x\, \xi(x)$.
- Может быть, что $v_0 \Vdash \neg\forall x\, \xi(x)$, но при этом нет «классического» свидетеля a, для которого $v_0 \Vdash \neg\, \xi(a)$.
  - В каждом следующем мире — новый свидетель.
- При этом в двойственном случае, с $\exists x\, \xi(x)$, проблемы нет.
  - Если $v_0 \Vdash \exists x\, \xi(x)$, то $v \Vdash \xi(a)$ для всех $v \in R(v_0)$, причём $a \in D_{v_0}$.
- **Перевод Куроды:** помимо «навешивания» двойного отрицания на всю формулу φ, заменим каждую подформулу вида $\forall x\, \xi(x)$ на $\forall x\, \neg\neg\, \xi(x)$.

Перевод Куроды

Рекурсивное определение перевода:

- $\left(P(\vec{t})\right)^K = P(\vec{t})$
- $\bot^K = \bot$
- $(\varphi \vee \psi)^K = \varphi^K \vee \psi^K$
- $(\varphi \wedge \psi)^K = \varphi^K \wedge \psi^K$
- $(\varphi \longrightarrow \psi)^K = \varphi^K \longrightarrow \psi^K$
- $\left(\exists x\, \xi\right)^K = \exists x\, \xi^K$
- $\left(\forall x\, \xi\right)^K = \forall x \neg\neg\, \xi^K$

Перевод Куроды

Рекурсивное определение перевода:

- $\big(P(\vec{t})\big)^K = P(\vec{t})$
- $\bot^K = \bot$
- $(\varphi \vee \psi)^K = \varphi^K \vee \psi^K$
- $(\varphi \wedge \psi)^K = \varphi^K \wedge \psi^K$
- $(\varphi \longrightarrow \psi)^K = \varphi^K \longrightarrow \psi^K$
- $\big(\exists x\, \xi\big)^K = \exists x\, \xi^K$
- $\big(\forall x\, \xi\big)^K = \forall x \neg\neg\, \xi^K$

Теорема

FO-CL $\vdash \varphi \iff$ FO-Int $\vdash \neg\neg\, \varphi^K$.

Перевод Куроды

Рекурсивное определение перевода:

- $\left(P(\vec{t})\right)^K = P(\vec{t})$
- $\bot^K = \bot$
- $(\varphi \vee \psi)^K = \varphi^K \vee \psi^K$
- $(\varphi \wedge \psi)^K = \varphi^K \wedge \psi^K$
- $(\varphi \longrightarrow \psi)^K = \varphi^K \longrightarrow \psi^K$
- $\left(\exists x\, \xi\right)^K = \exists x\, \xi^K$
- $\left(\forall x\, \xi\right)^K = \forall x \neg\neg\, \xi^K$

Теорема

$\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \neg\neg\, \varphi^K$.

Вопрос (напоминание): верна ли теорема Гливенко для FO-Int + CD (логика моделей с постоянными областями)?

Перевод Куроды

Теорема

FO-CL $\vdash \varphi \iff$ FO-Int $\vdash \neg\neg\,\varphi^K$.

Новое определение **стабилизации:** мир v_0 стабилен на подформулах формулы φ^K, если:

1. если $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $c_1, \dots, c_n \in D_{v_0}$, то либо $v_0 \Vdash \theta(\vec{c})$, либо $v_0 \Vdash \neg\,\theta(\vec{c})$;
2. для любой $\forall x \neg\neg\,\xi(x) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg\,\xi(x)$, то $v_0 \Vdash \neg\,\xi(a)$ для некоторого $a \in D_{v_0}$.

Перевод Куроды

Теорема

FO-CL $\vdash \varphi \iff$ FO-Int $\vdash \neg\neg\varphi^K$.

Новое определение **стабилизации:** мир v_0 стабилен на подформулах формулы φ^K, если:

1. если $\theta(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $c_1, \ldots, c_n \in D_{v_0}$, то либо $v_0 \Vdash \theta(\vec{c})$, либо $v_0 \Vdash \neg\theta(\vec{c})$;
2. для любой $\forall x \neg\neg\xi(x) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg\xi(x)$, то $v_0 \Vdash \neg\xi(a)$ для некоторого $a \in D_{v_0}$.

Лемма

Если v_0 стабилен на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $v_0 \Vdash \neg\varphi^K$, то в классической модели α_{v_0} на D_{v_0} ложна формула φ.

Перевод Куроды: стабилизация

Мир v_0 стабилен на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если:

1. если $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $c_1, \dots, c_n \in D_{v_0}$, то либо $v_0 \Vdash \theta(\vec{c})$, либо $v_0 \Vdash \neg\theta(\vec{c})$;
2. для любой $\forall x \neg\neg\xi(x) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg\xi(x)$, то $v_0 \Vdash \neg\xi(a)$ для некоторого $a \in D_{v_0}$.

Перевод Куроды: стабилизация

Мир v_0 стабилен на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если:

1. если $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $c_1, \dots, c_n \in D_{v_0}$, то либо $v_0 \Vdash \theta(\vec{c})$, либо $v_0 \Vdash \neg\theta(\vec{c})$;
2. для любой $\forall x \neg\neg\xi(x) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg\xi(x)$, то $v_0 \Vdash \neg\xi(a)$ для некоторого $a \in D_{v_0}$.

Лемма

Для любого $u \in W$ и любой формулы φ существует мир $v_0 \in W$, стабильный на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$.

Перевод Куроды: стабилизация

Мир v_0 стабилен на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если:

1. если $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $c_1, \dots, c_n \in D_{v_0}$, то либо $v_0 \Vdash \theta(\vec{c})$, либо $v_0 \Vdash \neg\,\theta(\vec{c})$;
2. для любой $\forall x \neg\neg\,\xi(x) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg\,\xi(x)$, то $v_0 \Vdash \neg\,\xi(a)$ для некоторого $a \in D_{v_0}$.

Лемма

Для любого $u \in W$ и любой формулы φ существует мир $v_0 \in W$, стабильный на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$.

- Считаем, что W и все области D_v счётны.

Перевод Куроды: стабилизация

Мир v_0 стабилен на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если:

1. если $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $c_1, \dots, c_n \in D_{v_0}$, то либо $v_0 \Vdash \theta(\vec{c})$, либо $v_0 \Vdash \neg\,\theta(\vec{c})$;
2. для любой $\forall x\, \neg\neg\, \xi(x) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если $v_0 \nVdash \forall x\, \neg\neg\, \xi(x)$, то $v_0 \Vdash \neg\, \xi(a)$ для некоторого $a \in D_{v_0}$.

Лемма

Для любого $u \in W$ и любой формулы φ существует мир $v_0 \in W$, стабильный на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$.

- Считаем, что W и все области D_v счётны.
- Перенумеруем формулы вида $\theta(\vec{c})$, $c_i \in \bigcup D_v$, чтобы в нумерации каждая формула встречалась бесконечно много раз.

Перевод Куроды: стабилизация

Мир v_0 стабилен на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если:

1. если $\theta(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $c_1, \ldots, c_n \in D_{v_0}$, то либо $v_0 \Vdash \theta(\vec{c})$, либо $v_0 \Vdash \neg\theta(\vec{c})$;
2. для любой $\forall x \neg\neg\xi(x) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg\xi(x)$, то $v_0 \Vdash \neg\xi(a)$ для некоторого $a \in D_{v_0}$.

Лемма

Для любого $u \in W$ и любой формулы φ существует мир $v_0 \in W$, стабильный на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$.

- Считаем, что W и все области D_v счётны.
- Перенумеруем формулы вида $\theta(\vec{c})$, $c_i \in \bigcup D_v$, чтобы в нумерации каждая формула встречалась бесконечно много раз.
- На каждом шаге обрабатываем $\theta(\vec{c})$, только если $c_i \in D_{v_0}$ для текущего v_0.

Перевод Куроды: стабилизация

Лемма

Для любого $u \in W$ *и любой формулы* φ *существует мир* $v_0 \in W$, *стабильный на* $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$.

- Если очередная $\theta(\vec{c})$ не имеет вид $\forall x \neg\neg \xi(x)$, то действуем как в пропозициональном случае: если $v_0 \nVdash \neg \theta(\vec{c})$, то найдём $v_0' \in R(v_0)$, для которого $v_0' \Vdash \theta(\vec{c})$.

Перевод Куроды: стабилизация

Лемма

Для любого $u \in W$ *и любой формулы* φ *существует мир* $v_0 \in W$*, стабильный на* $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$.

- Если очередная $\theta(\vec{c})$ не имеет вид $\forall x \neg\neg \xi(x)$, то действуем как в пропозициональном случае: если $v_0 \nVdash \neg \theta(\vec{c})$, то найдём $v_0' \in R(v_0)$, для которого $v_0' \Vdash \theta(\vec{c})$.
- Стабильность ранее обработанных формул при этом не портится.

Перевод Куроды: стабилизация

Лемма

Для любого $u \in W$ *и любой формулы* φ *существует мир* $v_0 \in W$, *стабильный на* $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$.

- Если очередная $\theta(\vec{c})$ не имеет вид $\forall x \neg\neg \xi(x)$, то действуем как в пропозициональном случае: если $v_0 \nVdash \neg \theta(\vec{c})$, то найдём $v_0' \in R(v_0)$, для которого $v_0' \Vdash \theta(\vec{c})$.
- Стабильность ранее обработанных формул при этом не портится.
- Если $\theta(\vec{c}) = \forall x \neg\neg \xi(x)$ и $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg \xi(x)$, то найдётся мир $v \in R(v_0)$, в котором $v \nVdash \neg\neg \xi(a)$, $a \in D_v$.

Перевод Куроды: стабилизация

Лемма

Для любого $u \in W$ *и любой формулы* φ *существует мир* $v_0 \in W$*, стабильный на* $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$.

- Если очередная $\theta(\vec{c})$ не имеет вид $\forall x \neg\neg \xi(x)$, то действуем как в пропозициональном случае: если $v_0 \nVdash \neg \theta(\vec{c})$, то найдём $v_0' \in R(v_0)$, для которого $v_0' \Vdash \theta(\vec{c})$.
- Стабильность ранее обработанных формул при этом не портится.
- Если $\theta(\vec{c}) = \forall x \neg\neg \xi(x)$ и $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg \xi(x)$, то найдётся мир $v \in R(v_0)$, в котором $v \nVdash \neg\neg \xi(a)$, $a \in D_v$.
- Далее, найдётся $v_0' \in R(v)$, для которого $v_0' \Vdash \neg \xi(a)$.

Перевод Куроды: стабилизация

Лемма

Для любого $u \in W$ *и любой формулы* φ *существует мир* $v_0 \in W$, *стабильный на* $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$.

- Если очередная $\theta(\vec{c})$ не имеет вид $\forall x \neg\neg\xi(x)$, то действуем как в пропозициональном случае: если $v_0 \nVdash \neg\theta(\vec{c})$, то найдём $v_0' \in R(v_0)$, для которого $v_0' \Vdash \theta(\vec{c})$.
- Стабильность ранее обработанных формул при этом не портится.
- Если $\theta(\vec{c}) = \forall x \neg\neg\xi(x)$ и $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg\xi(x)$, то найдётся мир $v \in R(v_0)$, в котором $v \nVdash \neg\neg\xi(a)$, $a \in D_v$.
- Далее, найдётся $v_0' \in R(v)$, для которого $v_0' \Vdash \neg\xi(a)$.
- В частности, $v_0' \Vdash \neg\forall x \neg\neg\xi(x)$.

Перевод Куроды: стабилизация

Лемма

Для любого $u \in W$ и любой формулы φ существует мир $v_0 \in W$, стабильный на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$.

- Если очередная $\theta(\vec{c})$ не имеет вид $\forall x \neg\neg \xi(x)$, то действуем как в пропозициональном случае: если $v_0 \nVdash \neg \theta(\vec{c})$, то найдём $v_0' \in R(v_0)$, для которого $v_0' \Vdash \theta(\vec{c})$.
- Стабильность ранее обработанных формул при этом не портится.
- Если $\theta(\vec{c}) = \forall x \neg\neg \xi(x)$ и $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg \xi(x)$, то найдётся мир $v \in R(v_0)$, в котором $v \nVdash \neg\neg \xi(a)$, $a \in D_v$.
- Далее, найдётся $v_0' \in R(v)$, для которого $v_0' \Vdash \neg \xi(a)$.
- В частности, $v_0' \Vdash \neg\forall x \neg\neg \xi(x)$.
- Бесконечное повторение формул в нумерации нужно, потому что мы могли проигнорировать формулу, т.к. её параметры ещё не появились в D_{v_0}.

Перевод Куроды: окончание доказательства

Теорема

$\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \neg\neg\,\varphi^K.$

- Рассуждаем как в теореме Гливенко.

Перевод Куроды: окончание доказательства

Теорема

$\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \neg\neg\varphi^K$.

- Рассуждаем как в теореме Гливенко.
- В FO-CL формулы φ и $\neg\neg\varphi^K$ равносильны, отсюда получаем импликацию $\Leftarrow$.

Перевод Куроды: окончание доказательства

Теорема

FO-CL $\vdash \varphi \iff$ FO-Int $\vdash \neg\neg\varphi^K$.

- Рассуждаем как в теореме Гливенко.
- В FO-CL формулы φ и $\neg\neg\varphi^K$ равносильны, отсюда получаем импликацию $\Leftarrow$.
- Пусть теперь FO-Int $\nvdash \neg\neg\varphi^K$. Отсюда $\mathscr{M}, w \nVdash \neg\neg\varphi^K$.

Перевод Куроды: окончание доказательства

Теорема

$\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \neg\neg\varphi^K$.

- Рассуждаем как в теореме Гливенко.
- В FO-CL формулы φ и $\neg\neg\varphi^K$ равносильны, отсюда получаем импликацию $\Longleftarrow$.
- Пусть теперь $\text{FO-Int} \nvdash \neg\neg\varphi^K$. Отсюда $\mathscr{M}, w \nVdash \neg\neg\varphi^K$.
- Существует $u \in R(w)$, где $u \Vdash \neg\varphi^K$.

Перевод Куроды: окончание доказательства

Теорема

FO-CL $\vdash \varphi \iff$ FO-Int $\vdash \neg\neg\varphi^K$.

- Рассуждаем как в теореме Гливенко.
- В FO-CL формулы φ и $\neg\neg\varphi^K$ равносильны, отсюда получаем импликацию $\Leftarrow$.
- Пусть теперь FO-Int $\nvdash \neg\neg\varphi^K$. Отсюда $\mathscr{M}, w \nVdash \neg\neg\varphi^K$.
- Существует $u \in R(w)$, где $u \Vdash \neg\varphi^K$.
- Построим стабильный $v_0 \in R(u)$; по монотонности $v_0 \Vdash \neg\varphi^K$.

Перевод Куроды: окончание доказательства

Теорема

$\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \neg\neg\varphi^K$.

- Рассуждаем как в теореме Гливенко.
- В FO-CL формулы φ и $\neg\neg\varphi^K$ равносильны, отсюда получаем импликацию $\Longleftarrow$.
- Пусть теперь $\text{FO-Int} \nvdash \neg\neg\varphi^K$. Отсюда $\mathscr{M}, w \nVdash \neg\neg\varphi^K$.
- Существует $u \in R(w)$, где $u \Vdash \neg\varphi^K$.
- Построим стабильный $v_0 \in R(u)$; по монотонности $v_0 \Vdash \neg\varphi^K$.
- Классически $(D_{v_0}, \alpha_{v_0}) \models \neg\varphi$.

Перевод Куроды: окончание доказательства

Теорема

$\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \neg\neg\varphi^K$.

- Рассуждаем как в теореме Гливенко.
- В FO-CL формулы φ и $\neg\neg\varphi^K$ равносильны, отсюда получаем импликацию $\Leftarrow$.
- Пусть теперь $\text{FO-Int} \nvdash \neg\neg\varphi^K$. Отсюда $\mathscr{M}, w \nVdash \neg\neg\varphi^K$.
- Существует $u \in R(w)$, где $u \Vdash \neg\varphi^K$.
- Построим стабильный $v_0 \in R(u)$; по монотонности $v_0 \Vdash \neg\varphi^K$.
- Классически $(D_{v_0}, \alpha_{v_0}) \vDash \neg\varphi$.
- $\text{FO-CL} \nvdash \varphi$.

Перевод Куроды: окончание доказательства

Теорема

FO-CL $\vdash \varphi \iff$ FO-Int $\vdash \neg\neg\varphi^K$.

- Рассуждаем как в теореме Гливенко.
- В FO-CL формулы φ и $\neg\neg\varphi^K$ равносильны, отсюда получаем импликацию $\Leftarrow$.
- Пусть теперь FO-Int $\nvdash \neg\neg\varphi^K$. Отсюда $\mathscr{M}, w \nVdash \neg\neg\varphi^K$.
- Существует $u \in R(w)$, где $u \Vdash \neg\varphi^K$.
- Построим стабильный $v_0 \in R(u)$; по монотонности $v_0 \Vdash \neg\varphi^K$.
- Классически $(D_{v_0}, \alpha_{v_0}) \vDash \neg\varphi$.
- FO-CL $\nvdash \varphi$.

В доказательстве теоремы Куроды есть пробел (см. след. лекцию).

Переводы FO-CL в FO-Int

- Перевод Куроды (1951) — в некотором смысле минимальная модификация теоремы Гливенко, чтобы она стала верна для логик предикатов.

Переводы FO-CL в FO-Int

- Перевод Куроды (1951) — в некотором смысле минимальная модификация теоремы Гливенко, чтобы она стала верна для логик предикатов.
- Есть и другие переводы, выполняющие ту же функцию: $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^*$.

Переводы FO-CL в FO-Int

- Перевод Куроды (1951) — в некотором смысле минимальная модификация теоремы Гливенко, чтобы она стала верна для логик предикатов.
- Есть и другие переводы, выполняющие ту же функцию: $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^*$.
- Перевод Колмогорова (1925): «навешиваем» $\neg\neg$ на каждую подформулу.

Переводы FO-CL в FO-Int

- Перевод Куроды (1951) — в некотором смысле минимальная модификация теоремы Гливенко, чтобы она стала верна для логик предикатов.
- Есть и другие переводы, выполняющие ту же функцию: $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^*$.
- Перевод Колмогорова (1925): «навешиваем» $\neg\neg$ на каждую подформулу.
- Перевод Гёделя – Генцена (1930е): «навешиваем» $\neg\neg$ на атомарные формулы, $\vee$ и $\exists$.

Переводы FO-CL в FO-Int

- Перевод Куроды (1951) — в некотором смысле минимальная модификация теоремы Гливенко, чтобы она стала верна для логик предикатов.
- Есть и другие переводы, выполняющие ту же функцию: $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^*$.
- Перевод Колмогорова (1925): «навешиваем» $\neg\neg$ на каждую подформулу.
- Перевод Гёделя – Генцена (1930е): «навешиваем» $\neg\neg$ на атомарные формулы, $\vee$ и $\exists$.
- Перевод Гёделя – Генцена (вариант): «навешиваем» $\neg\neg$ на атомарные, заменяем $\xi \vee \theta$ на $\neg(\neg\xi \wedge \neg\theta)$ и $\exists x\, \xi(x)$ на $\neg\forall x \neg\xi(x)$.

Переводы FO-CL в FO-Int

- Перевод Куроды (1951) — в некотором смысле минимальная модификация теоремы Гливенко, чтобы она стала верна для логик предикатов.
- Есть и другие переводы, выполняющие ту же функцию: $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^*$.
- Перевод Колмогорова (1925): «навешиваем» $\neg\neg$ на каждую подформулу.
- Перевод Гёделя – Генцена (1930е): «навешиваем» $\neg\neg$ на атомарные формулы, $\vee$ и $\exists$.
- Перевод Гёделя – Генцена (вариант): «навешиваем» $\neg\neg$ на атомарные, заменяем $\xi \vee \theta$ на $\neg(\neg\xi \wedge \neg\theta)$ и $\exists x\, \xi(x)$ на $\neg\forall x \neg\xi(x)$.
- Перевод Кривина (1990).

Переводы FO-CL в FO-Int

- Перевод Куроды (1951) — в некотором смысле минимальная модификация теоремы Гливенко, чтобы она стала верна для логик предикатов.
- Есть и другие переводы, выполняющие ту же функцию: $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^*$.
- Перевод Колмогорова (1925): «навешиваем» $\neg\neg$ на каждую подформулу.
- Перевод Гёделя – Генцена (1930е): «навешиваем» $\neg\neg$ на атомарные формулы, $\vee$ и $\exists$.
- Перевод Гёделя – Генцена (вариант): «навешиваем» $\neg\neg$ на атомарные, заменяем $\xi \vee \theta$ на $\neg(\neg\xi \wedge \neg\theta)$ и $\exists x\, \xi(x)$ на $\neg\forall x\, \neg\xi(x)$.
- Перевод Кривина (1990).
- Для Int: перевод Гливенко (1929).

Перевод Гёделя – Генцена

Рекурсивное определение:

- $\left(P(\vec{t})\right)^{GG} = \neg\neg\, P(\vec{t})$
- $\bot^{GG} = \bot$
- $(\varphi \vee \psi)^{GG} = \neg\, (\neg\varphi^{GG} \wedge \neg\psi^{GG})$
- $(\varphi \wedge \psi)^{GG} = \varphi^{GG} \wedge \psi^{GG}$
- $(\varphi \longrightarrow \psi)^{GG} = \varphi^{GG} \longrightarrow \psi^{GG}$
- $\left(\exists x\, \xi\right)^{GG} = \neg\, \forall x\, \neg\, \xi^{GG}$
- $\left(\forall x\, \xi\right)^{GG} = \forall x\, \xi^{GG}$

Перевод Гёделя – Генцена

Рекурсивное определение:

- $\left(P(\vec{t})\right)^{GG} = \neg\neg\, P(\vec{t})$
- $\bot^{GG} = \bot$
- $(\varphi \vee \psi)^{GG} = \neg\,(\neg\varphi^{GG} \wedge \neg\psi^{GG})$
- $(\varphi \wedge \psi)^{GG} = \varphi^{GG} \wedge \psi^{GG}$
- $(\varphi \longrightarrow \psi)^{GG} = \varphi^{GG} \longrightarrow \psi^{GG}$
- $\left(\exists x\, \xi\right)^{GG} = \neg\, \forall x\, \neg\, \xi^{GG}$
- $\left(\forall x\, \xi\right)^{GG} = \forall x\, \xi^{GG}$

Определение. Формула ψ *негативная,*, если в ней отсутствуют $\vee$ и $\exists$, а все атомарные формулы стоят непосредственно под знаком отрицания.

Перевод Гёделя – Генцена

Рекурсивное определение:

- $\big(P(\vec{t})\big)^{GG} = \neg\neg\, P(\vec{t})$
- $\bot^{GG} = \bot$
- $(\varphi \vee \psi)^{GG} = \neg\,(\neg\varphi^{GG} \wedge \neg\psi^{GG})$
- $(\varphi \wedge \psi)^{GG} = \varphi^{GG} \wedge \psi^{GG}$
- $(\varphi \longrightarrow \psi)^{GG} = \varphi^{GG} \longrightarrow \psi^{GG}$
- $\big(\exists x\, \xi\big)^{GG} = \neg\,\forall x\,\neg\,\xi^{GG}$
- $\big(\forall x\, \xi\big)^{GG} = \forall x\, \xi^{GG}$

Определение. Формула ψ *негативная*,, если в ней отсутствуют $\vee$ и $\exists$, а все атомарные формулы стоят непосредственно под знаком отрицания.

- Любая φ классически эквивалентна своему переводу φ^{GG}.

Перевод Гёделя – Генцена

Рекурсивное определение:

- $\big(P(\vec{t})\big)^{GG} = \neg\neg\, P(\vec{t})$
- $\bot^{GG} = \bot$
- $(\varphi \vee \psi)^{GG} = \neg\,(\neg\varphi^{GG} \wedge \neg\psi^{GG})$
- $(\varphi \wedge \psi)^{GG} = \varphi^{GG} \wedge \psi^{GG}$
- $(\varphi \longrightarrow \psi)^{GG} = \varphi^{GG} \longrightarrow \psi^{GG}$
- $\big(\exists x\, \xi\big)^{GG} = \neg\,\forall x\,\neg\,\xi^{GG}$
- $\big(\forall x\, \xi\big)^{GG} = \forall x\, \xi^{GG}$

Определение. Формула ψ *негативная*,, если в ней отсутствуют $\vee$ и $\exists$, а все атомарные формулы стоят непосредственно под знаком отрицания.

- Любая φ классически эквивалентна своему переводу φ^{GG}.
- Формулы вида φ^{GG} негативны.

Негативные формулы

Лемма

Если ψ *негативна, то* $\text{FO-Int} \vdash \psi \iff \text{FO-CL} \vdash \psi$.

Негативные формулы

Лемма

Если ψ негативна, то $\text{FO-Int} \vdash \psi \iff \text{FO-CL} \vdash \psi$.

- Отсюда сразу следует теорема о переводе:
  $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-CL} \vdash \varphi^{GG} \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^{GG}$.

Негативные формулы

Лемма

Если ψ *негативна, то* $\text{FO-Int} \vdash \psi \iff \text{FO-CL} \vdash \psi$.

- Отсюда сразу следует теорема о переводе:
  $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-CL} \vdash \varphi^{GG} \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^{GG}$.
- Пусть $\text{FO-Int} \nvdash \psi$; $\mathscr{M}, w \nVdash \psi$.

Негативные формулы

Лемма

Если ψ негативна, то $\text{FO-Int} \vdash \psi \iff \text{FO-CL} \vdash \psi$.

- Отсюда сразу следует теорема о переводе:
  $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-CL} \vdash \varphi^{GG} \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^{GG}$.
- Пусть $\text{FO-Int} \nvdash \psi$; $\mathscr{M}, w \nVdash \psi$.
- Найдём мир $u \in R(w)$, где $u \Vdash \neg\psi$.

Негативные формулы

Лемма

Если ψ *негативна, то* $\text{FO-Int} \vdash \psi \iff \text{FO-CL} \vdash \psi$.

- Отсюда сразу следует теорема о переводе: $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-CL} \vdash \varphi^{GG} \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^{GG}$.
- Пусть $\text{FO-Int} \nvdash \psi$; $\mathscr{M}, w \nVdash \psi$.
- Найдём мир $u \in R(w)$, где $u \Vdash \neg\psi$.
  - Индукция по построению ψ.

Негативные формулы

Лемма

Если ψ *негативна, то* $\mathrm{FO\text{-}Int} \vdash \psi \iff \mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \psi$.

- Отсюда сразу следует теорема о переводе:
  $\mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \varphi \iff \mathrm{FO\text{-}CL} \vdash \varphi^{GG} \iff \mathrm{FO\text{-}Int} \vdash \varphi^{GG}$.
- Пусть $\mathrm{FO\text{-}Int} \nvdash \psi$; $\mathscr{M}, w \nVdash \psi$.
- Найдём мир $u \in R(w)$, где $u \Vdash \neg\psi$.
  - Индукция по построению ψ.
  - Атомарный случай — за счёт двойного отрицания.

Негативные формулы

Лемма

Если ψ негативна, то $\text{FO-Int} \vdash \psi \iff \text{FO-CL} \vdash \psi$.

- Отсюда сразу следует теорема о переводе:
  $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-CL} \vdash \varphi^{GG} \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^{GG}$.
- Пусть $\text{FO-Int} \nvdash \psi$; $\mathscr{M}, w \nVdash \psi$.
- Найдём мир $u \in R(w)$, где $u \Vdash \neg\psi$.
  - Индукция по построению ψ.
  - Атомарный случай — за счёт двойного отрицания.
  - $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$: либо $\nVdash \psi_1$, либо $\nVdash \psi_2$.

Негативные формулы

Лемма

Если ψ *негативна, то* $\text{FO-Int} \vdash \psi \iff \text{FO-CL} \vdash \psi$.

- Отсюда сразу следует теорема о переводе:
  $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-CL} \vdash \varphi^{GG} \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^{GG}$.
- Пусть $\text{FO-Int} \nvdash \psi$; $\mathscr{M}, w \nVdash \psi$.
- Найдём мир $u \in R(w)$, где $u \Vdash \neg\psi$.
  - Индукция по построению ψ.
  - Атомарный случай — за счёт двойного отрицания.
  - $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$: либо $\nVdash \psi_1$, либо $\nVdash \psi_2$.
  - $\psi = \psi_1 \longrightarrow \psi_2$: в некотором $u_1 \in R(w)$ имеем $u_1 \Vdash \psi_1$ и $u_1 \nVdash \psi_2$.
    Значит, существует $u_2 \in R(u_1)$, где $u_2 \Vdash \psi_1$ и $u_2 \Vdash \neg\psi_2$.

Негативные формулы

Лемма

Если ψ *негативна, то* $\text{FO-Int} \vdash \psi \iff \text{FO-CL} \vdash \psi$.

- Отсюда сразу следует теорема о переводе:
  $\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-CL} \vdash \varphi^{GG} \iff \text{FO-Int} \vdash \varphi^{GG}$.
- Пусть $\text{FO-Int} \nvdash \psi$; $\mathscr{M}, w \nVdash \psi$.
- Найдём мир $u \in R(w)$, где $u \Vdash \neg\psi$.
  - Индукция по построению ψ.
  - Атомарный случай — за счёт двойного отрицания.
  - $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$: либо $\nVdash \psi_1$, либо $\nVdash \psi_2$.
  - $\psi = \psi_1 \longrightarrow \psi_2$: в некотором $u_1 \in R(w)$ имеем $u_1 \Vdash \psi_1$ и $u_1 \nVdash \psi_2$.
    Значит, существует $u_2 \in R(u_1)$, где $u_2 \Vdash \psi_1$ и $u_2 \Vdash \neg\psi_2$.
  - $\psi = \forall x\, \xi(x)$. Тогда $u_1 \nVdash \xi(a)$ и $u_2 \Vdash \neg\xi(a)$, откуда $u_2 \Vdash \neg\forall x\, \xi(x)$.

Негативные формулы — стабилизация

- После $\forall x$ не нужно добавлять двойное отрицание: теперь стабилизация $\xi(a)$ достигается за счёт негативности этой формулы.

Негативные формулы — стабилизация

- После $\forall x$ не нужно добавлять двойное отрицание: теперь стабилизация $\xi(a)$ достигается за счёт негативности этой формулы.
- Таким образом, получаем лемму о стабилизации: если ψ негативна (следовательно, таковы все её подформулы, кроме атомарных), то для любого мира u существует достижимый из него v_0, стабильный на $\mathrm{SubFm}(\psi)$.

Негативные формулы — стабилизация

- После $\forall x$ не нужно добавлять двойное отрицание: теперь стабилизация $\xi(a)$ достигается за счёт негативности этой формулы.
- Таким образом, получаем лемму о стабилизации: если ψ негативна (следовательно, таковы все её подформулы, кроме атомарных), то для любого мира u существует достижимый из него v_0, стабильный на $\mathrm{SubFm}(\psi)$.
- Теперь можно завершить доказательство леммы о негативных формулах:

$$\text{FO-Int} \nvdash \psi \Longrightarrow w \nVdash \psi \Longrightarrow v_0 \nVdash \psi \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (D_{v_0}, \alpha_{v_0}) \not\models \psi \Longrightarrow \text{FO-CL} \nvdash \psi$$