Спецкурс «Математическая логика», часть 2

Лекция 12 (20.04.2020)
Интуиционистская логика первого порядка. Теории с разрешимым равенством

С. Л. Кузнецов

МГУ имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
весенний семестр 2019–2020 учебного года

Перевод Куроды

- $\left(P(\vec{t})\right)^K = P(\vec{t})$
- $\bot^K = \bot$
- $(\varphi \vee \psi)^K = \varphi^K \vee \psi^K$
- $(\varphi \wedge \psi)^K = \varphi^K \wedge \psi^K$
- $(\varphi \longrightarrow \psi)^K = \varphi^K \longrightarrow \psi^K$
- $\left(\exists x\, \xi\right)^K = \exists x\, \xi^K$
- $\left(\forall x\, \xi\right)^K = \forall x \neg\neg\, \xi^K$

Теорема

$\text{FO-CL} \vdash \varphi \iff \text{FO-Int} \vdash \neg\neg\, \varphi^K$.

Перевод Куроды: пробел в доказательстве

- Мир v_0 стабилен на подформулах формулы φ^K, если:
  1. если $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $c_1, \dots, c_n \in D_{v_0}$, то либо $v_0 \Vdash \theta(\vec{c})$, либо $v_0 \Vdash \neg\,\theta(\vec{c})$;
  2. для любой $\forall x \neg\neg\,\xi(x) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg\,\xi(x)$, то $v_0 \Vdash \neg\,\xi(a)$ для некоторого $a \in D_{v_0}$.

Перевод Куроды: пробел в доказательстве

- Мир v_0 стабилен на подформулах формулы φ^K, если:
  1. если $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $c_1, \dots, c_n \in D_{v_0}$, то либо $v_0 \Vdash \theta(\vec{c})$, либо $v_0 \Vdash \neg\,\theta(\vec{c})$;
  2. для любой $\forall x \neg\neg\,\xi(x) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg\,\xi(x)$, то $v_0 \Vdash \neg\,\xi(a)$ для некоторого $a \in D_{v_0}$.
- $w \nVdash \neg\neg\,\varphi^K \Longrightarrow v_0 \Vdash \neg\,\varphi^K$; если v_0 стабилен на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, то из него извлекается классическая контрмодель.

Перевод Куроды: пробел в доказательстве

- Мир v_0 стабилен на подформулах формулы φ^K, если:
  1. если $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $c_1, \dots, c_n \in D_{v_0}$, то либо $v_0 \Vdash \theta(\vec{c})$, либо $v_0 \Vdash \neg\,\theta(\vec{c})$;
  2. для любой $\forall x \neg\neg\,\xi(x) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg\,\xi(x)$, то $v_0 \Vdash \neg\,\xi(a)$ для некоторого $a \in D_{v_0}$.
- $w \nVdash \neg\neg\,\varphi^K \Longrightarrow v_0 \Vdash \neg\,\varphi^K$; если v_0 стабилен на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, то из него извлекается классическая контрмодель.
- Стабилизация: перенумеруем формулы вида $\theta(\vec{c})$, каждую бесконечно много раз, и обрабатываем по очереди.

Перевод Куроды: пробел в доказательстве

- Мир v_0 стабилен на подформулах формулы φ^K, если:
  1. если $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $c_1, \dots, c_n \in D_{v_0}$, то либо $v_0 \Vdash \theta(\vec{c})$, либо $v_0 \Vdash \neg\theta(\vec{c})$;
  2. для любой $\forall x \neg\neg\xi(x) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg\xi(x)$, то $v_0 \Vdash \neg\xi(a)$ для некоторого $a \in D_{v_0}$.
- $w \nVdash \neg\neg\varphi^K \Longrightarrow v_0 \Vdash \neg\varphi^K$; если v_0 стабилен на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, то из него извлекается классическая контрмодель.
- Стабилизация: перенумеруем формулы вида $\theta(\vec{c})$, каждую бесконечно много раз, и обрабатываем по очереди.
- Обрабатываем подформулу $\Longrightarrow$ переходим от v_i к v_{i+1}.

Перевод Куроды: пробел в доказательстве

- Мир v_0 стабилен на подформулах формулы φ^K, если:
  1. если $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $c_1, \dots, c_n \in D_{v_0}$, то либо $v_0 \Vdash \theta(\vec{c})$, либо $v_0 \Vdash \neg\,\theta(\vec{c})$;
  2. для любой $\forall x \neg\neg\,\xi(x) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg\,\xi(x)$, то $v_0 \Vdash \neg\,\xi(a)$ для некоторого $a \in D_{v_0}$.
- $w \nVdash \neg\neg\,\varphi^K \implies v_0 \Vdash \neg\,\varphi^K$; если v_0 стабилен на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, то из него извлекается классическая контрмодель.
- Стабилизация: перенумеруем формулы вида $\theta(\vec{c})$, каждую бесконечно много раз, и обрабатываем по очереди.
- Обрабатываем подформулу $\implies$ переходим от v_i к v_{i+1}.
- **Проблема:** почему существует «предельный» мир, находящийся над всеми v_i? ($v_0 = v_\infty \in \bigcup R(v_i)$)

Перевод Куроды: пробел в доказательстве

- Мир v_0 стабилен на подформулах формулы φ^K, если:
  1. если $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $c_1, \dots, c_n \in D_{v_0}$, то либо $v_0 \Vdash \theta(\vec{c})$, либо $v_0 \Vdash \neg\theta(\vec{c})$;
  2. для любой $\forall x \neg\neg\xi(x) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg\xi(x)$, то $v_0 \Vdash \neg\xi(a)$ для некоторого $a \in D_{v_0}$.
- $w \nVdash \neg\neg\varphi^K \implies v_0 \Vdash \neg\varphi^K$; если v_0 стабилен на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, то из него извлекается классическая контрмодель.
- Стабилизация: перенумеруем формулы вида $\theta(\vec{c})$, каждую бесконечно много раз, и обрабатываем по очереди.
- Обрабатываем подформулу $\implies$ переходим от v_i к v_{i+1}.
- **Проблема:** почему существует «предельный» мир, находящийся над всеми v_i? ($v_0 = v_\infty \in \bigcup R(v_i)$)

$$\begin{tikzcd}
\underset{v_1}{\bullet} \arrow[r] & \underset{v_2}{\bullet} \arrow[r] & \underset{v_3}{\bullet} \arrow[r] & \dots & \underset{v_\infty}{\bullet}
\end{tikzcd}$$

Перевод Куроды: пробел в доказательстве

- Мир v_0 стабилен на подформулах формулы φ^K, если:
  1. если $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$ и $c_1, \dots, c_n \in D_{v_0}$, то либо $v_0 \Vdash \theta(\vec{c})$, либо $v_0 \Vdash \neg\,\theta(\vec{c})$;
  2. для любой $\forall x \neg\neg\,\xi(x) \in \mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, если $v_0 \nVdash \forall x \neg\neg\,\xi(x)$, то $v_0 \Vdash \neg\,\xi(a)$ для некоторого $a \in D_{v_0}$.
- $w \nVdash \neg\neg\,\varphi^K \implies v_0 \Vdash \neg\,\varphi^K$; если v_0 стабилен на $\mathrm{SubFm}(\varphi^K)$, то из него извлекается классическая контрмодель.
- Стабилизация: перенумеруем формулы вида $\theta(\vec{c})$, каждую бесконечно много раз, и обрабатываем по очереди.
- Обрабатываем подформулу $\implies$ переходим от v_i к v_{i+1}.
- **Проблема:** почему существует «предельный» мир, находящийся над всеми v_i? ($v_0 = v_\infty \in \bigcup R(v_i)$)

$$\begin{tikzcd} \underset{v_1}{\bullet} \arrow[r] & \underset{v_2}{\bullet} \arrow[r] & \underset{v_3}{\bullet} \arrow[r] & \dots & & \underset{v_\infty}{\bullet} \end{tikzcd}$$

- В пропозициональном случае проблемы нет: $\mathscr{V}$ конечно.

Перевод Куроды: пробел в доказательстве

- **Проблема:** почему существует «предельный» мир, находящийся над всеми v_i? ($v_0 = v_\infty \in \bigcup R(v_i)$)

$$v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow \dots \qquad\qquad v_\infty$$

Перевод Куроды: пробел в доказательстве

- **Проблема:** почему существует «предельный» мир, находящийся над всеми v_i? ($v_0 = v_\infty \in \bigcup R(v_i)$)

$$\underset{v_1}{\bullet} \longrightarrow \underset{v_2}{\bullet} \longrightarrow \underset{v_3}{\bullet} \longrightarrow \dots \qquad \underset{v_\infty}{\bullet}$$

- Если такой мир существует, то дальше доказательство проходит без проблем.

Перевод Куроды: пробел в доказательстве

- **Проблема:** почему существует «предельный» мир, находящийся над всеми v_i? ($v_0 = v_\infty \in \bigcup R(v_i)$)

$$\underset{v_1}{\bullet} \longrightarrow \underset{v_2}{\bullet} \longrightarrow \underset{v_3}{\bullet} \longrightarrow \dots \qquad \underset{v_\infty}{\bullet}$$

- Если такой мир существует, то дальше доказательство проходит без проблем.
- Каждая формула вида $\theta(\vec{c})$, если константы из $\vec{c}$ встречались в $\bigcup D_{v_i}$, стабилизирована в одном из миров v_j. Следовательно, по монотонности, она стабильна в v_∞.

Перевод Куроды: пробел в доказательстве

- **Проблема:** почему существует «предельный» мир, находящийся над всеми v_i? ($v_0 = v_\infty \in \bigcup R(v_i)$)

$$\underset{v_1}{\bullet} \longrightarrow \underset{v_2}{\bullet} \longrightarrow \underset{v_3}{\bullet} \longrightarrow \dots \qquad \underset{v_\infty}{\bullet}$$

- Если такой мир существует, то дальше доказательство проходит без проблем.
- Каждая формула вида $\theta(\vec{c})$, если константы из $\vec{c}$ встречались в $\bigcup D_{v_i}$, стабилизирована в одном из миров v_j. Следовательно, по монотонности, она стабильна в v_∞.
- То же верно для второго пункта определения стабильности: если получили $v_j \Vdash \neg\,\xi(a)$, то $v_\infty \Vdash \neg\,\xi(a)$.

Перевод Куроды: пробел в доказательстве

- **Проблема:** почему существует «предельный» мир, находящийся над всеми v_i? ($v_0 = v_\infty \in \bigcup R(v_i)$)

$$v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow \dots \qquad v_\infty$$

- Если такой мир существует, то дальше доказательство проходит без проблем.
- Каждая формула вида $\theta(\vec{c})$, если константы из $\vec{c}$ встречались в $\bigcup D_{v_i}$, стабилизирована в одном из миров v_j. Следовательно, по монотонности, она стабильна в v_∞.
- То же верно для второго пункта определения стабильности: если получили $v_j \Vdash \neg\xi(a)$, то $v_\infty \Vdash \neg\xi(a)$.
- Но мир v_∞ может, вообще говоря, не существовать (например, $W = \mathbb{N}$, $R = <$, $v_i = i$).

Перевод Куроды: пробел в доказательстве

- **Проблема:** почему существует «предельный» мир, находящийся над всеми v_i? ($v_0 = v_\infty \in \bigcup R(v_i)$)

$$\underset{v_1}{\bullet} \longrightarrow \underset{v_2}{\bullet} \longrightarrow \underset{v_3}{\bullet} \longrightarrow \ldots \qquad \underset{v_\infty}{\bullet}$$

- Если такой мир существует, то дальше доказательство проходит без проблем.
- Каждая формула вида $\theta(\vec{c})$, если константы из $\vec{c}$ встречались в $\bigcup D_{v_i}$, стабилизирована в одном из миров v_j. Следовательно, по монотонности, она стабильна в v_∞.
- То же верно для второго пункта определения стабильности: если получили $v_j \Vdash \neg\,\xi(a)$, то $v_\infty \Vdash \neg\,\xi(a)$.
- Но мир v_∞ может, вообще говоря, не существовать (например, $W = \mathbb{N}$, $R = <$, $v_i = i$).
- **Что делать?**

Теории с равенством

- Равенство в логике первого порядка можно понимать просто как двуместный предикат =.

Теории с равенством

- Равенство в логике первого порядка можно понимать просто как двуместный предикат $=$.
- Аксиомы равенства — теория Eq_Ω:
  1. $\forall x\,(x = x)$
  2. $\forall x, y\,(x = y \longrightarrow y = x)$
  3. $\forall x, y, z\,(x = y \wedge y = z \longrightarrow x = y)$
  4. $\forall \vec{x}, \vec{y}\,\big(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \longrightarrow P(\vec{x}) = P(\vec{y})\big)$

Теории с равенством

- Равенство в логике первого порядка можно понимать просто как двуместный предикат =.
- Аксиомы равенства — теория Eq_Ω:
  1. $\forall x\,(x = x)$
  2. $\forall x, y\,(x = y \longrightarrow y = x)$
  3. $\forall x, y, z\,(x = y \wedge y = z \longrightarrow x = y)$
  4. $\forall \vec{x}, \vec{y}\,\big(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \longrightarrow P(\vec{x}) = P(\vec{y})\big)$
- Естественно, сохраняют силу теоремы о корректности и полноте по Крипке.

Теории с равенством

- Равенство в логике первого порядка можно понимать просто как двуместный предикат =.
- Аксиомы равенства — теория Eq_Ω:
  1. $\forall x\,(x = x)$
  2. $\forall x, y\,(x = y \longrightarrow y = x)$
  3. $\forall x, y, z\,(x = y \land y = z \longrightarrow x = y)$
  4. $\forall \vec{x}, \vec{y}\,\big(x_1 = y_1 \land \ldots \land x_n = y_n \longrightarrow P(\vec{x}) = P(\vec{y})\big)$
- Естественно, сохраняют силу теоремы о корректности и полноте по Крипке.
- Однако хотим большего: *нормальных* моделей, т.е. $\alpha_w(=)(a, b) = 1 \iff a$ и b — один и тот же элемент D_w.

Теории с равенством

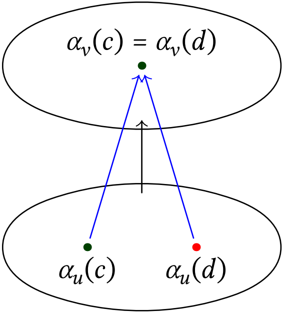
- Равенство в логике первого порядка можно понимать просто как двуместный предикат =.
- Аксиомы равенства — теория Eq_Ω:
  1. $\forall x\,(x = x)$
  2. $\forall x, y\,(x = y \longrightarrow y = x)$
  3. $\forall x, y, z\,(x = y \wedge y = z \longrightarrow x = y)$
  4. $\forall \vec{x}, \vec{y}\,\big(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \longrightarrow P(\vec{x}) = P(\vec{y})\big)$
- Естественно, сохраняют силу теоремы о корректности и полноте по Крипке.
- Однако хотим большего: *нормальных* моделей, т.е. $\alpha_w(=)(a, b) = 1 \iff$ a и b — один и тот же элемент D_w.
- В классическом случае имеет место теорема о полноте теорий T, включающих Eq_Ω, относительно нормальных моделей.

Теории с равенством

- Равенство в логике первого порядка можно понимать просто как двуместный предикат =.
- Аксиомы равенства — теория Eq_Ω:
  1. $\forall x\,(x = x)$
  2. $\forall x, y\,(x = y \longrightarrow y = x)$
  3. $\forall x, y, z\,(x = y \land y = z \longrightarrow x = y)$
  4. $\forall \vec{x}, \vec{y}\,\big(x_1 = y_1 \land \ldots \land x_n = y_n \longrightarrow P(\vec{x}) = P(\vec{y})\big)$
- Естественно, сохраняют силу теоремы о корректности и полноте по Крипке.
- Однако хотим большего: *нормальных* моделей, т.е. $\alpha_w(=)(a, b) = 1 \iff$ a и b — один и тот же элемент D_w.
- В классическом случае имеет место теорема о полноте теорий T, включающих Eq_Ω, относительно нормальных моделей.
- Доказательство проводится факторизацией модели по отношению эквивалентности $\alpha(=)$ (т.е. отождествлением элементов, объявленных равными).

Равенство в моделях Крипке

- В моделях Крипке с равенством может возникнуть следующая трудность:

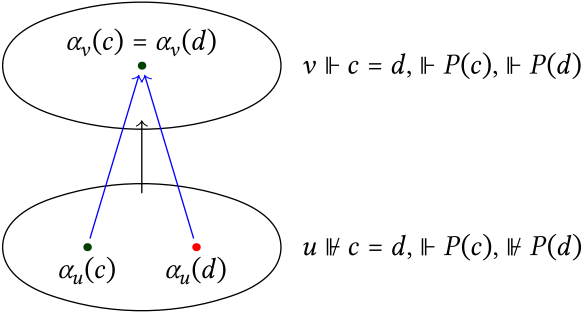


$v \Vdash c = d, \Vdash P(c), \Vdash P(d)$

$u \nVdash c = d, \Vdash P(c), \nVdash P(d)$

Равенство в моделях Крипке

- В моделях Крипке с равенством может возникнуть следующая трудность:



- Таким образом, в нормальной модели не всегда можем обеспечить $D_w \subseteq D_u$ при wRu.

Теории с разрешимым равенством

- *Теория разрешимого равенства:*

$$\mathrm{DEq}_\Omega \quad = \quad \mathrm{Eq}_\Omega + \forall x, y \left(x = y \vee \neg\, x = y\right).$$

Теории с разрешимым равенством

- *Теория разрешимого равенства:*

$$\mathrm{DEq}_\Omega \quad = \quad \mathrm{Eq}_\Omega + \forall x, y\,(x = y \vee \neg\, x = y).$$

- Неформально: принимаем для атомарных равенств закон исключённого третьего, и они начинают себя вести классически (значит, одинаково во всех мирах).

Полнота для теорий с разрешимым равенством

Теорема

Если теория T *содержит* DEq_Ω *и* $T \nvdash \varphi$, *то существует нормальная модель* $\mathscr{M}$ *и мир* w, *для которых* $\mathscr{M}, w \nVdash \varphi$.

Полнота для теорий с разрешимым равенством

Теорема

Если теория T содержит DEq_Ω и $T \nvdash \varphi$, то существует нормальная модель $\mathscr{M}$ и мир w, для которых $\mathscr{M}, w \nVdash \varphi$.

- Сначала по теореме о полноте $\mathscr{M}', w \nVdash \varphi$, где $\mathscr{M}'$ не обязательно нормальна, w — корень $\mathscr{M}'$.

Полнота для теорий с разрешимым равенством

Теорема

Если теория T содержит DEq_Ω и $T \nvdash \varphi$, то существует нормальная модель $\mathscr{M}$ и мир w, для которых $\mathscr{M}, w \nVdash \varphi$.

- Сначала по теореме о полноте $\mathscr{M}', w \nVdash \varphi$, где $\mathscr{M}'$ не обязательно нормальна, w — корень $\mathscr{M}'$.
- Определим на каждом D'_u отношение эквивалентности: $a \approx_u b \iff \mathscr{M}', u \Vdash a = b$.

Полнота для теорий с разрешимым равенством

Теорема

Если теория T содержит DEq_Ω *и* $T \nVdash \varphi$, *то существует нормальная модель* $\mathscr{M}$ *и мир* w, *для которых* $\mathscr{M}, w \nVdash \varphi$.

- Сначала по теореме о полноте $\mathscr{M}', w \nVdash \varphi$, где $\mathscr{M}'$ не обязательно нормальна, w — корень $\mathscr{M}'$.
- Определим на каждом D'_u отношение эквивалентности: $a \approx_u b \iff \mathscr{M}', u \Vdash a = b$.
- Поскольку $\mathscr{M}', u \Vdash \mathrm{Eq}_\Omega$, отношение $\approx_u$ — это отношение эквивалентности и конгруэнция (сохраняет истинность предикатных символов).

Полнота для теорий с разрешимым равенством

Лемма

Если $uR'v$, *то для любых* $a, b \in D'_u$ *верно* $a \approx_u b \iff a \approx_v b$.

Полнота для теорий с разрешимым равенством

Лемма

Если $uR'v$*, то для любых* $a, b \in D'_u$ *верно* $a \approx_u b \iff a \approx_v b$.

- Если $\mathscr{M}', u \Vdash a = b$, то $\mathscr{M}', v \Vdash a = b$ по монотонности.

Полнота для теорий с разрешимым равенством

Лемма

Если $uR'v$, то для любых $a, b \in D'_u$ верно $a \approx_u b \iff a \approx_v b$.

- Если $\mathscr{M}', u \Vdash a = b$, то $\mathscr{M}', v \Vdash a = b$ по монотонности.
- Если $\mathscr{M}', u \nVdash a = b$, то по аксиоме разрешимости $\mathscr{M}', u \Vdash \neg a = b$, откуда $\mathscr{M}', v \nVdash a = b$.

Полнота для теорий с разрешимым равенством

Лемма

Если $uR'v$, *то для любых* $a, b \in D'_u$ *верно* $a \approx_u b \iff a \approx_v b$.

- Если $\mathscr{M}', u \Vdash a = b$, то $\mathscr{M}', v \Vdash a = b$ по монотонности.
- Если $\mathscr{M}', u \nVdash a = b$, то по аксиоме разрешимости $\mathscr{M}', u \Vdash \neg a = b$, откуда $\mathscr{M}', v \nVdash a = b$.

- Далее пишем просто $\approx$.

Полнота для теорий с разрешимым равенством

Лемма

Если $uR'v$, то для любых $a, b \in D'_u$ верно $a \approx_u b \iff a \approx_v b$.

- Если $\mathscr{M}', u \Vdash a = b$, то $\mathscr{M}', v \Vdash a = b$ по монотонности.
- Если $\mathscr{M}', u \nVdash a = b$, то по аксиоме разрешимости $\mathscr{M}', u \Vdash \neg a = b$, откуда $\mathscr{M}', v \nVdash a = b$.

- Далее пишем просто $\approx$.
- Определим нормальную модель $\mathscr{M}$: $W = W'$, $R = R'$, $D_u = D'_u \big/ \approx$. $D_u \subset D_v$ при uRv.

Полнота для теорий с разрешимым равенством

Лемма

Если $uR'v$, то для любых $a, b \in D'_u$ верно $a \approx_u b \iff a \approx_v b$.

- Если $\mathcal{M}', u \Vdash a = b$, то $\mathcal{M}', v \Vdash a = b$ по монотонности.
- Если $\mathcal{M}', u \nVdash a = b$, то по аксиоме разрешимости $\mathcal{M}', u \Vdash \neg a = b$, откуда $\mathcal{M}', v \nVdash a = b$.

- Далее пишем просто $\approx$.
- Определим нормальную модель $\mathcal{M}$: $W = W'$, $R = R'$, $D_u = D'_u \big/ \approx$. $D_u \subset D_v$ при uRv.
- $\mathcal{M}, u \Vdash P([a_1], \dots, [a_n]) \iff \mathcal{M}', u \Vdash P(a_1, \dots, a_n)$.

Полнота для теорий с разрешимым равенством

Лемма

Если $uR'v$, то для любых $a, b \in D'_u$ верно $a \approx_u b \iff a \approx_v b$.

- Если $\mathscr{M}', u \Vdash a = b$, то $\mathscr{M}', v \Vdash a = b$ по монотонности.
- Если $\mathscr{M}', u \nVdash a = b$, то по аксиоме разрешимости $\mathscr{M}', u \Vdash \neg a = b$, откуда $\mathscr{M}', v \nVdash a = b$.

- Далее пишем просто $\approx$.
- Определим нормальную модель $\mathscr{M}$: $W = W'$, $R = R'$, $D_u = D'_u \big/ \approx$. $D_u \subset D_v$ при uRv.
- $\mathscr{M}, u \Vdash P([a_1], \dots, [a_n]) \iff \mathscr{M}', u \Vdash P(a_1, \dots, a_n)$.
- Корректность — за счёт свойства конгруэнции.

Полнота для теорий с разрешимым равенством

Лемма

Если $uR'v$, то для любых $a, b \in D'_u$ верно $a \approx_u b \iff a \approx_v b$.

- Если $\mathscr{M}', u \Vdash a = b$, то $\mathscr{M}', v \Vdash a = b$ по монотонности.
- Если $\mathscr{M}', u \nVdash a = b$, то по аксиоме разрешимости $\mathscr{M}', u \Vdash \neg a = b$, откуда $\mathscr{M}', v \nVdash a = b$.

- Далее пишем просто $\approx$.
- Определим нормальную модель $\mathscr{M}$: $W = W'$, $R = R'$, $D_u = D'_u \big/ \approx$. $D_u \subset D_v$ при uRv.
- $\mathscr{M}, u \Vdash P([a_1], \dots, [a_n]) \iff \mathscr{M}', u \Vdash P(a_1, \dots, a_n)$.
- Корректность — за счёт свойства конгруэнции.
- $\mathscr{M}, u \Vdash \xi([a_1], \dots, [a_n]) \iff \mathscr{M}', u \Vdash \xi(a_1, \dots, a_n)$.

Полнота для теорий с разрешимым равенством

Лемма

Если $uR'v$, *то для любых* $a, b \in D'_u$ *верно* $a \approx_u b \iff a \approx_v b$.

- Если $\mathscr{M}', u \Vdash a = b$, то $\mathscr{M}', v \Vdash a = b$ по монотонности.
- Если $\mathscr{M}', u \nVdash a = b$, то по аксиоме разрешимости $\mathscr{M}', u \Vdash \neg a = b$, откуда $\mathscr{M}', v \nVdash a = b$.

- Далее пишем просто $\approx$.
- Определим нормальную модель $\mathscr{M}$: $W = W'$, $R = R'$, $D_u = D'_u \big/ \approx$. $\quad D_u \subset D_v$ при uRv.
- $\mathscr{M}, u \Vdash P([a_1], \dots, [a_n]) \iff \mathscr{M}', u \Vdash P(a_1, \dots, a_n)$.
- Корректность — за счёт свойства конгруэнции.
- $\mathscr{M}, u \Vdash \xi([a_1], \dots, [a_n]) \iff \mathscr{M}', u \Vdash \xi(a_1, \dots, a_n)$.
- $\mathscr{M}$ — искомая нормальная контрмодель.

Функциональные символы

- Разрешим в сигнатуре Ω функциональные символы.

Функциональные символы

- Разрешим в сигнатуре Ω функциональные символы.
- В моделях Крипке функциональные символы интерпретируются «классически»: $\alpha_u(f): D_u \times \ldots \times D_u \longrightarrow D_u$, и если uRv, то $\alpha_v(f) = \alpha_u(f) \restriction D_u$.

Функциональные символы

- Разрешим в сигнатуре Ω функциональные символы.
- В моделях Крипке функциональные символы интерпретируются «классически»: $\alpha_u(f) : D_u \times \ldots \times D_u \longrightarrow D_u$, и если uRv, то $\alpha_v(f) = \alpha_u(f) \upharpoonright D_u$.
- Пусть T — теория с разрешимым равенством, в сигнатуре с функциональными символами.

Функциональные символы

- Разрешим в сигнатуре Ω функциональные символы.
- В моделях Крипке функциональные символы интерпретируются «классически»: $\alpha_u(f) : D_u \times \ldots \times D_u \longrightarrow D_u$, и если uRv, то $\alpha_v(f) = \alpha_u(f) \upharpoonright D_u$.
- Пусть T — теория с разрешимым равенством, в сигнатуре с функциональными символами.
- Имеет место теорема о корректности: если $T \vdash \varphi$, то φ истинна во всех моделях, в которых истинна T.

Функциональные символы: полнота

- Пусть T — теория с разрешимым равенством, в сигнатуре с функциональными символами.

Функциональные символы: полнота

- Пусть T — теория с разрешимым равенством, в сигнатуре с функциональными символами.
- Для каждого функционального символа $f(\vec{x})$ заведём новый предикатный символ $F(\vec{x}, y)$ и аксиому $\forall \vec{x}, y \left(F(\vec{x}, y) \leftrightarrow f(\vec{x}) = y\right)$. Получим теорию T_F.

Функциональные символы: полнота

- Пусть T — теория с разрешимым равенством, в сигнатуре с функциональными символами.
- Для каждого функционального символа $f(\vec{x})$ заведём новый предикатный символ $F(\vec{x}, y)$ и аксиому $\forall \vec{x}, y\, \big(F(\vec{x}, y) \leftrightarrow f(\vec{x}) = y\big)$. Получим теорию T_F.
- **Консервативность:** если $T_F \vdash \varphi$ и φ не использует новых предикатных символов, то $T \vdash \varphi$.

Функциональные символы: полнота

- Пусть T — теория с разрешимым равенством, в сигнатуре с функциональными символами.
- Для каждого функционального символа $f(\vec{x})$ заведём новый предикатный символ $F(\vec{x}, y)$ и аксиому $\forall \vec{x}, y\,\big(F(\vec{x}, y) \leftrightarrow f(\vec{x}) = y\big)$. Получим теорию T_F.
- **Консервативность:** если $T_F \vdash \varphi$ и φ не использует новых предикатных символов, то $T \vdash \varphi$.
  - Заменим везде в доказательстве $F(\vec{t}, s)$ на $f(\vec{t}) = s$.

Функциональные символы: полнота

- Пусть T — теория с разрешимым равенством, в сигнатуре с функциональными символами.
- Для каждого функционального символа $f(\vec{x})$ заведём новый предикатный символ $F(\vec{x}, y)$ и аксиому $\forall \vec{x}, y \left(F(\vec{x}, y) \leftrightarrow f(\vec{x}) = y\right)$. Получим теорию T_F.
- **Консервативность:** если $T_F \vdash \varphi$ и φ не использует новых предикатных символов, то $T \vdash \varphi$.
  - Заменим везде в доказательстве $F(\vec{t}, s)$ на $f(\vec{t}) = s$.
- Для любой φ существует такая φ' без функциональных символов, что $T_F \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$.

Функциональные символы: полнота

- Пусть T — теория с разрешимым равенством, в сигнатуре с функциональными символами.
- Для каждого функционального символа $f(\vec{x})$ заведём новый предикатный символ $F(\vec{x}, y)$ и аксиому $\forall \vec{x}, y \left(F(\vec{x}, y) \leftrightarrow f(\vec{x}) = y\right)$. Получим теорию T_F.
- **Консервативность:** если $T_F \vdash \varphi$ и φ не использует новых предикатных символов, то $T \vdash \varphi$.
  - Заменим везде в доказательстве $F(\vec{t}, s)$ на $f(\vec{t}) = s$.
- Для любой φ существует такая φ' без функциональных символов, что $T_F \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$.
  - Например, $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ заменяется на $\exists w_1, w_2, w_3, w_4 \left(\mathrm{Plus}(x, y, w_1) \wedge \mathrm{Mult}(w_1, z, w_2) \wedge \mathrm{Mult}(x, z, w_3) \wedge \mathrm{Mult}(y, z, w_4) \wedge \mathrm{Plus}(w_3, w_4, w_2)\right)$.

Функциональные символы: полнота

- Пусть T — теория с разрешимым равенством, в сигнатуре с функциональными символами.
- Для каждого функционального символа $f(\vec{x})$ заведём новый предикатный символ $F(\vec{x}, y)$ и аксиому $\forall \vec{x}, y \left(F(\vec{x}, y) \leftrightarrow f(\vec{x}) = y\right)$. Получим теорию T_F.
- **Консервативность:** если $T_F \vdash \varphi$ и φ не использует новых предикатных символов, то $T \vdash \varphi$.
  - Заменим везде в доказательстве $F(\vec{t}, s)$ на $f(\vec{t}) = s$.
- Для любой φ существует такая φ' без функциональных символов, что $T_F \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$.
  - Например, $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ заменяется на $\exists w_1, w_2, w_3, w_4 \left(\mathrm{Plus}(x, y, w_1) \wedge \mathrm{Mult}(w_1, z, w_2) \wedge \mathrm{Mult}(x, z, w_3) \wedge \mathrm{Mult}(y, z, w_4) \wedge \mathrm{Plus}(w_3, w_4, w_2)\right)$.
  - Интересное направление $\longleftarrow$. Пусть $\exists w\,(\mathrm{Plus}(x, y, w) \wedge \mathrm{Plus}(y, x, w))$, тогда $\exists w\,(x + y = w \wedge y + x = w)$, откуда $x + y = y + x$.

Функциональные символы: полнота

- $T'_F = \{\psi \mid T_F \vdash \psi$ и ψ без функциональных символов$\}$.

Функциональные символы: полнота

- $T'_F = \{\psi \mid T_F \vdash \psi$ и ψ без функциональных символов$\}$.
- Пусть $T \nvdash \varphi$. Тогда $T_F \nvdash \varphi$ (консервативность), $T_F \nvdash \varphi'$, $T'_F \nvdash \varphi'$.

Функциональные символы: полнота

- $T'_F = \{\psi \mid T_F \vdash \psi$ и ψ без функциональных символов$\}$.
- Пусть $T \nvdash \varphi$. Тогда $T_F \nvdash \varphi$ (консервативность), $T_F \nvdash \varphi'$, $T'_F \nvdash \varphi'$.
- Пусть $\mathcal{M}', w \nVdash \varphi'$; $\mathcal{M}$ нормальная.

Функциональные символы: полнота

- $T'_F = \{\psi \mid T_F \vdash \psi$ и ψ без функциональных символов$\}$.
- Пусть $T \nvdash \varphi$. Тогда $T_F \nvdash \varphi$ (консервативность), $T_F \nvdash \varphi'$, $T'_F \nvdash \varphi'$.
- Пусть $\mathscr{M}', w \nVdash \varphi'$; $\mathscr{M}$ нормальная.
- Имеем $T_F \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$, точнее, $\forall \vec{x}\, \exists y\, F(\vec{x}, y)$ и $\forall \vec{x}, y_1, y_2\, (F(\vec{x}, y_1) \wedge F(\vec{x}, y_2) \longrightarrow y_1 = y_2)$.

Функциональные символы: полнота

- $T'_F = \{\psi \mid T_F \vdash \psi$ и ψ без функциональных символов$\}$.
- Пусть $T \nvdash \varphi$. Тогда $T_F \nvdash \varphi$ (консервативность), $T_F \nvdash \varphi'$, $T'_F \nvdash \varphi'$.
- Пусть $\mathscr{M}', w \nVdash \varphi'$; $\mathscr{M}$ нормальная.
- Имеем $T_F \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$, точнее, $\forall \vec{x}\, \exists y\, F(\vec{x}, y)$ и $\forall \vec{x}, y_1, y_2\, (F(\vec{x}, y_1) \land F(\vec{x}, y_2) \longrightarrow y_1 = y_2)$.
- Значит, $T'_F \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$.

Функциональные символы: полнота

- $T'_F = \{\psi \mid T_F \vdash \psi$ и ψ без функциональных символов$\}$.
- Пусть $T \nvdash \varphi$. Тогда $T_F \nvdash \varphi$ (консервативность), $T_F \nvdash \varphi'$, $T'_F \nvdash \varphi'$.
- Пусть $\mathscr{M}', w \nVdash \varphi'$; $\mathscr{M}$ нормальная.
- Имеем $T_F \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$, точнее, $\forall \vec{x}\, \exists y\, F(\vec{x}, y)$ и $\forall \vec{x}, y_1, y_2\, (F(\vec{x}, y_1) \wedge F(\vec{x}, y_2) \to y_1 = y_2)$.
- Значит, $T'_F \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$.
- В D_u для любых $\vec{a}$ найдётся единственный b со свойством $u \Vdash F(\vec{a}, b)$ (единственность — за счёт нормальности).

Функциональные символы: полнота

- $T'_F = \{\psi \mid T_F \vdash \psi$ и ψ без функциональных символов$\}$.
- Пусть $T \nvdash \varphi$. Тогда $T_F \nvdash \varphi$ (консервативность), $T_F \nvdash \varphi'$, $T'_F \nvdash \varphi'$.
- Пусть $\mathscr{M}', w \nVdash \varphi'$; $\mathscr{M}$ нормальная.
- Имеем $T_F \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$, точнее, $\forall \vec{x}\, \exists y\, F(\vec{x}, y)$ и $\forall \vec{x}, y_1, y_2\, (F(\vec{x}, y_1) \wedge F(\vec{x}, y_2) \longrightarrow y_1 = y_2)$.
- Значит, $T'_F \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$.
- В D_u для любых $\vec{a}$ найдётся единственный b со свойством $u \Vdash F(\vec{a}, b)$ (единственность — за счёт нормальности).
- Если uRv, то этот элемент «наследуется» из D_u тем же элементом D_v.

Функциональные символы: полнота

- $T'_F = \{\psi \mid T_F \vdash \psi$ и ψ без функциональных символов$\}$.
- Пусть $T \nvdash \varphi$. Тогда $T_F \nvdash \varphi$ (консервативность), $T_F \nvdash \varphi'$, $T'_F \nvdash \varphi'$.
- Пусть $\mathscr{M}', w \nVdash \varphi'$; $\mathscr{M}$ нормальная.
- Имеем $T_F \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$, точнее, $\forall \vec{x}\, \exists y\, F(\vec{x}, y)$ и $\forall \vec{x}, y_1, y_2\, (F(\vec{x}, y_1) \wedge F(\vec{x}, y_2) \longrightarrow y_1 = y_2)$.
- Значит, $T'_F \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$.
- В D_u для любых $\vec{a}$ найдётся единственный b со свойством $u \Vdash F(\vec{a}, b)$ (единственность — за счёт нормальности).
- Если uRv, то этот элемент «наследуется» из D_u тем же элементом D_v.
- Определим $\alpha_u(f)(\vec{a}) = b$, получим модель $\mathscr{M}$.

Функциональные символы: полнота

- $T'_F = \{\psi \mid T_F \vdash \psi$ и ψ без функциональных символов$\}$.
- Пусть $T \nvdash \varphi$. Тогда $T_F \nvdash \varphi$ (консервативность), $T_F \nvdash \varphi'$, $T'_F \nvdash \varphi'$.
- Пусть $\mathscr{M}', w \nVdash \varphi'$; $\mathscr{M}$ нормальная.
- Имеем $T_F \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$, точнее, $\forall \vec{x}\, \exists y\, F(\vec{x}, y)$ и $\forall \vec{x}, y_1, y_2\, (F(\vec{x}, y_1) \wedge F(\vec{x}, y_2) \longrightarrow y_1 = y_2)$.
- Значит, $T'_F \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$.
- В D_u для любых $\vec{a}$ найдётся единственный b со свойством $u \Vdash F(\vec{a}, b)$ (единственность — за счёт нормальности).
- Если uRv, то этот элемент «наследуется» из D_u тем же элементом D_v.
- Определим $\alpha_u(f)(\vec{a}) = b$, получим модель $\mathscr{M}$.
- $\mathscr{M} \Vdash T_F$ (для формул ξ из T — через перевод ξ')

Функциональные символы: полнота

- $T'_F = \{\psi \mid T_F \vdash \psi$ и ψ без функциональных символов$\}$.
- Пусть $T \nvdash \varphi$. Тогда $T_F \nvdash \varphi$ (консервативность), $T_F \nvdash \varphi'$, $T'_F \nvdash \varphi'$.
- Пусть $\mathscr{M}', w \nVdash \varphi'$; $\mathscr{M}$ нормальная.
- Имеем $T_F \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$, точнее, $\forall \vec{x}\, \exists y\, F(\vec{x}, y)$ и $\forall \vec{x}, y_1, y_2\, (F(\vec{x}, y_1) \wedge F(\vec{x}, y_2) \longrightarrow y_1 = y_2)$.
- Значит, $T'_F \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, F(\vec{x}, y)$.
- В D_u для любых $\vec{a}$ найдётся единственный b со свойством $u \Vdash F(\vec{a}, b)$ (единственность — за счёт нормальности).
- Если uRv, то этот элемент «наследуется» из D_u тем же элементом D_v.
- Определим $\alpha_u(f)(\vec{a}) = b$, получим модель $\mathscr{M}$.
- $\mathscr{M} \Vdash T_F$ (для формул ξ из T — через перевод ξ')
- $\mathscr{M}, w \nVdash \varphi'$, откуда $\mathscr{M}, w \nVdash \varphi$.

Интуиционистская арифметика

Интуиционистская арифметика (арифметика Гейтинга) HA задаётся теми же аксиомами, что и арифметика Пеано PA, но над FO-Int вместо FO-CL. Сигнатура та же: $=$, S, $+$, $\cdot$.

Интуиционистская арифметика

Интуиционистская арифметика (арифметика Гейтинга) HA задаётся теми же аксиомами, что и арифметика Пеано PA, но над FO-Int вместо FO-CL. Сигнатура та же: $=, S, +, \cdot$.

- FO-Int;

Интуиционистская арифметика

Интуиционистская арифметика (арифметика Гейтинга) HA задаётся теми же аксиомами, что и арифметика Пеано PA, но над FO-Int вместо FO-CL. Сигнатура та же: $=$, S, $+$, $\cdot$.

- FO-Int;
- аксиомы равенства $\mathrm{Eq}_{\mathrm{Ar}}$;

Интуиционистская арифметика

Интуиционистская арифметика (арифметика Гейтинга) HA задаётся теми же аксиомами, что и арифметика Пеано PA, но над FO-Int вместо FO-CL. Сигнатура та же: $=$, S, $+$, $\cdot$.

- FO-Int;
- аксиомы равенства $\mathrm{Eq}_{\mathrm{Ar}}$;
- определяющие аксиомы для функциональных символов:
  - $\neg\, 0 = Sx$; $Sx = Sy \longrightarrow x = y$;
  - $x + 0 = x$; $x + Sy = S(x + y)$;
  - $x \cdot 0 = 0$; $x \cdot (Sy) = (x \cdot y) + x$;

Интуиционистская арифметика

Интуиционистская арифметика (арифметика Гейтинга) HA задаётся теми же аксиомами, что и арифметика Пеано PA, но над FO-Int вместо FO-CL. Сигнатура та же: $=$, S, $+$, $\cdot$.

- FO-Int;
- аксиомы равенства $\mathrm{Eq}_{\mathrm{Ar}}$;
- определяющие аксиомы для функциональных символов:
  - $\neg\, 0 = Sx$; $Sx = Sy \longrightarrow x = y$;
  - $x + 0 = x$; $x + Sy = S(x + y)$;
  - $x \cdot 0 = 0$; $x \cdot (Sy) = (x \cdot y) + x$;
- индукция:

$$\big(\varphi(0, \vec{y}) \wedge \forall x\, (\varphi(x, \vec{y}) \longrightarrow \varphi(Sx, \vec{y}))\big) \longrightarrow \forall z\, \varphi(z, \vec{y}).$$

Интуиционистская арифметика

- В аксиоматику HA мы явно не включили разрешимость равенства, но она доказуема по индукции!

Интуиционистская арифметика

- В аксиоматику HA мы явно не включили разрешимость равенства, но она доказуема по индукции!
- Сначала докажем индукцией по x, что $x = 0 \vee \neg x = 0$. Действительно, $0 = 0$, а если $x = Sx'$, то используем аксиому $\neg 0 = Sx'$.

Интуиционистская арифметика

- В аксиоматику HA мы явно не включили разрешимость равенства, но она доказуема по индукции!
- Сначала докажем индукцией по x, что $x = 0 \vee \neg\, x = 0$. Действительно, $0 = 0$, а если $x = Sx'$, то используем аксиому $\neg 0 = Sx'$.
- Теперь индукцией по y докажем $\forall x \left(y = x \vee \neg\, y = x\right)$.

Интуиционистская арифметика

- В аксиоматику HA мы явно не включили разрешимость равенства, но она доказуема по индукции!
- Сначала докажем индукцией по x, что $x = 0 \vee \neg\, x = 0$. Действительно, $0 = 0$, а если $x = Sx'$, то используем аксиому $\neg 0 = Sx'$.
- Теперь индукцией по y докажем $\forall x \left(y = x \vee \neg\, y = x\right)$.
  - $y = 0$ — уже доказали.

Интуиционистская арифметика

- В аксиоматику HA мы явно не включили разрешимость равенства, но она доказуема по индукции!
- Сначала докажем индукцией по x, что $x = 0 \vee \neg\, x = 0$. Действительно, $0 = 0$, а если $x = Sx'$, то используем аксиому $\neg 0 = Sx'$.
- Теперь индукцией по y докажем $\forall x\,\bigl(y = x \vee \neg\, y = x\bigr)$.
  - $y = 0$ — уже доказали.
  - $y = Sy'$. Разбираем два случая: (1) $x = 0$. Тогда $y \neq x$. (2) $x \neq 0$. Тогда $x = Sx'$ и имеем $y' = x' \vee \neg\, y' = x'$. Отсюда $Sy' = Sx' \vee \neg\, Sy' = Sx'$.

Интуиционистская арифметика

- В аксиоматику HA мы явно не включили разрешимость равенства, но она доказуема по индукции!
- Сначала докажем индукцией по x, что $x = 0 \vee \neg\, x = 0$. Действительно, $0 = 0$, а если $x = Sx'$, то используем аксиому $\neg 0 = Sx'$.
- Теперь индукцией по y докажем $\forall x \left(y = x \vee \neg\, y = x\right)$.
  - $y = 0$ — уже доказали.
  - $y = Sy'$. Разбираем два случая: (1) $x = 0$. Тогда $y \neq x$. (2) $x \neq 0$. Тогда $x = Sx'$ и имеем $y' = x' \vee \neg\, y' = x'$. Отсюда $Sy' = Sx' \vee \neg\, Sy' = Sx'$.
  - Утверждение $x = 0 \vee \exists x'\, x = Sx'$ также следует из принципа индукции.

Интуиционистская арифметика

- В аксиоматику HA мы явно не включили разрешимость равенства, но она доказуема по индукции!
- Сначала докажем индукцией по x, что $x = 0 \vee \neg\, x = 0$. Действительно, $0 = 0$, а если $x = Sx'$, то используем аксиому $\neg 0 = Sx'$.
- Теперь индукцией по y докажем $\forall x \left(y = x \vee \neg\, y = x \right)$.
  - $y = 0$ — уже доказали.
  - $y = Sy'$. Разбираем два случая: (1) $x = 0$. Тогда $y \neq x$. (2) $x \neq 0$. Тогда $x = Sx'$ и имеем $y' = x' \vee \neg\, y' = x'$. Отсюда $Sy' = Sx' \vee \neg\, Sy' = Sx'$.
  - Утверждение $x = 0 \vee \exists x'\, x = Sx'$ также следует из принципа индукции.
- Значит, можем применять теорию моделей Крипке!

Интуиционистская арифметика

Задачи:

- Докажите, что HA не эквивалентна PA.
- Докажите, что принцип наименьшего числа,

$$(\exists x\, \varphi(x)) \longrightarrow \exists x_0\, (\varphi(x_0) \wedge \forall y < x_0\, \neg\varphi(x_0)),$$

  влечёт закон исключённого третьего для произвольных (замкнутых) формул θ. Таким образом, арифметика над FO-Int с принципом наименьшего числа эквивалентна PA, а не HA.
- Докажите теоремы Харропа для теорий с разрешимым равенством и функциональными символами.

Интуиционистская арифметика

Задачи:

- Докажите, что HA не эквивалентна PA.
- Докажите, что принцип наименьшего числа,

$$(\exists x\, \varphi(x)) \longrightarrow \exists x_0\, (\varphi(x_0) \wedge \forall y < x_0\, \neg\varphi(x_0)),$$

  влечёт закон исключённого третьего для произвольных (замкнутых) формул θ. Таким образом, арифметика над FO-Int с принципом наименьшего числа эквивалентна PA, а не HA.
- Докажите теоремы Харропа для теорий с разрешимым равенством и функциональными символами.
  - Вместо множества констант в качестве D_w нужно взять множество замкнутых термов.

Интуиционистская арифметика

- К сожалению, аксиоматика HA не харропова (за счёт аксиомы индукции).

Интуиционистская арифметика

- К сожалению, аксиоматика HA не харропова (за счёт аксиомы индукции).
- Тем не менее, дизъюнктивное и экзистенциальное для этой теории выполняются **(задача*)** [Клини 1945].

Перевод Куроды — стабилизация

- У нас остался небольшой долг: добиться, чтобы в контрмодели, используемой в доказательстве теоремы Куроды, существовали «предельные миры».

$$v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow \dots \qquad v_\infty$$

Перевод Куроды — стабилизация

- У нас остался небольшой долг: добиться, чтобы в контрмодели, используемой в доказательстве теоремы Куроды, существовали «предельные миры».

$$\underset{v_1}{\bullet} \longrightarrow \underset{v_2}{\bullet} \longrightarrow \underset{v_3}{\bullet} \longrightarrow \ldots \qquad\qquad \underset{v_\infty}{\bullet}$$

- Считаем, что мы находимся в *канонической модели*, при этом «запас констант» $\hat{S}$ несчётен.

Перевод Куроды — стабилизация

- У нас остался небольшой долг: добиться, чтобы в контрмодели, используемой в доказательстве теоремы Куроды, существовали «предельные миры».

$$\underset{v_1}{\bullet} \longrightarrow \underset{v_2}{\bullet} \longrightarrow \underset{v_3}{\bullet} \longrightarrow \dots \qquad\qquad \underset{v_\infty}{\bullet}$$

- Считаем, что мы находимся в *канонической модели,* при этом «запас констант» $\hat{S}$ несчётен.
- Тогда $v_i = \langle S_i, \Gamma_i, \Delta_i \rangle$; $S_i \subseteq S_j$ и $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ при $i \neq j$.

Перевод Куроды — стабилизация

- У нас остался небольшой долг: добиться, чтобы в контрмодели, используемой в доказательстве теоремы Куроды, существовали «предельные миры».

$$\underset{v_1}{\bullet} \longrightarrow \underset{v_2}{\bullet} \longrightarrow \underset{v_3}{\bullet} \longrightarrow \ldots \qquad\qquad \underset{v_\infty}{\bullet}$$

- Считаем, что мы находимся в *канонической модели,* при этом «запас констант» $\hat{S}$ несчётен.
- Тогда $v_i = \langle S_i, \Gamma_i, \Delta_i \rangle$; $S_i \subseteq S_j$ и $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ при $i \neq j$.
- Положим $S = \bigcup S_i$ и $\Gamma = \bigcup \Gamma_i$. Би-теория $\langle S, \Gamma, \varnothing \rangle$ непротиворечива (иначе противоречие проявится в какой-то $\langle S_i, \Gamma_i, \Delta_i \rangle$).

Перевод Куроды — стабилизация

- У нас остался небольшой долг: добиться, чтобы в контрмодели, используемой в доказательстве теоремы Куроды, существовали «предельные миры».

$$v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow \ldots \qquad\qquad v_\infty$$

- Считаем, что мы находимся в *канонической модели*, при этом «запас констант» $\hat{S}$ несчётен.
- Тогда $v_i = \langle S_i, \Gamma_i, \Delta_i \rangle$; $S_i \subseteq S_j$ и $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ при $i \neq j$.
- Положим $S = \bigcup S_i$ и $\Gamma = \bigcup \Gamma_i$. Би-теория $\langle S, \Gamma, \varnothing \rangle$ непротиворечива (иначе противоречие проявится в какой-то $\langle S_i, \Gamma_i, \Delta_i \rangle$).
- Насыщаем до $v_\infty = \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$. (Би-теории все малые, поскольку запас констант несчётен.)