Спецкурс «Математическая логика», часть 2

Лекция 8 (06.04.2020)

Интуиционистская логика первого порядка

С. Л. Кузнецов

МГУ имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
весенний семестр 2019–2020 учебного года

Интуиционизм

- Интуиционизм, как одно из направлений философии математики, возник в начале XX века в результате *кризиса оснований математики.*

Интуиционизм

- Интуиционизм, как одно из направлений философии математики, возник в начале XX века в результате *кризиса оснований математики.*
- **Парадокс Рассела** (в наивной теории множеств): рассмотрим множество всех «регулярных» множеств, $z = \{x \mid x \notin x\}$.

Интуиционизм

- Интуиционизм, как одно из направлений философии математики, возник в начале XX века в результате *кризиса оснований математики.*
- **Парадокс Рассела** (в наивной теории множеств): рассмотрим множество всех «регулярных» множеств, $z = \{x \mid x \notin x\}$.
  - Если $z \in z$, то $z \notin z$.

Интуиционизм

- Интуиционизм, как одно из направлений философии математики, возник в начале XX века в результате *кризиса оснований математики.*
- **Парадокс Рассела** (в наивной теории множеств): рассмотрим множество всех «регулярных» множеств, $z = \{x \mid x \notin x\}$.
  - Если $z \in z$, то $z \notin z$.
  - Если $z \notin z$, то $z \in z$.

Интуиционизм

- Интуиционизм, как одно из направлений философии математики, возник в начале XX века в результате *кризиса оснований математики.*
- **Парадокс Рассела** (в наивной теории множеств): рассмотрим множество всех «регулярных» множеств, $z = \{x \mid x \notin x\}$.
  - Если $z \in z$, то $z \notin z$.
  - Если $z \notin z$, то $z \in z$.
- В интуционизме не допускается закон исключённого третьего (*tertium non datur*, „третьего не дано“): $A \vee \neg A$.

Интуиционизм

- Интуиционизм, как одно из направлений философии математики, возник в начале XX века в результате *кризиса оснований математики.*
- **Парадокс Рассела** (в наивной теории множеств): рассмотрим множество всех «регулярных» множеств, $z = \{x \mid x \notin x\}$.
  - Если $z \in z$, то $z \notin z$.
  - Если $z \notin z$, то $z \in z$.
- В интуционизме не допускается закон исключённого третьего (*tertium non datur*, „третьего не дано“): $A \vee \neg A$.
- Действительно, рассмотрим какую-нибудь открытую проблему, например, гипотезу Римана R.

Интуиционизм

- Интуиционизм, как одно из направлений философии математики, возник в начале XX века в результате *кризиса оснований математики.*
- **Парадокс Рассела** (в наивной теории множеств): рассмотрим множество всех «регулярных» множеств, $z = \{x \mid x \notin x\}$.
  - Если $z \in z$, то $z \notin z$.
  - Если $z \notin z$, то $z \in z$.
- В интуционизме не допускается закон исключённого третьего (*tertium non datur*, „третьего не дано“): $A \vee \neg A$.
- Действительно, рассмотрим какую-нибудь открытую проблему, например, гипотезу Римана R.
  - Мы (математики мира) не умеем доказывать ни R, ни $\neg R$.

Интуиционизм

- Интуиционизм, как одно из направлений философии математики, возник в начале XX века в результате *кризиса оснований математики.*
- **Парадокс Рассела** (в наивной теории множеств): рассмотрим множество всех «регулярных» множеств, $z = \{x \mid x \notin x\}$.
  - Если $z \in z$, то $z \notin z$.
  - Если $z \notin z$, то $z \in z$.
- В интуционизме не допускается закон исключённого третьего (*tertium non datur*, „третьего не дано“): $A \vee \neg A$.
- Действительно, рассмотрим какую-нибудь открытую проблему, например, гипотезу Римана R.
  - Мы (математики мира) не умеем доказывать ни R, ни $\neg R$.
  - Тем не менее, классическая логика «доказывает» $R \vee \neg R$.

Пример неинтуиционистского рассуждения

- **Задача.** Существуют ли такие иррациональные числа α и β, что α^β рационально?

Пример неинтуиционистского рассуждения

- **Задача.** Существуют ли такие иррациональные числа α и β, что α^β рационально?
- **«Классическое» решение.** Рассмотрим число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

Пример неинтуиционистского рассуждения

- **Задача.** Существуют ли такие иррациональные числа α и β, что α^{β} рационально?
- **«Классическое» решение.** Рассмотрим число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.
  - Если это число рационально, то годится $\alpha = \beta = \sqrt{2}$.

Пример неинтуиционистского рассуждения

- **Задача.** Существуют ли такие иррациональные числа α и β, что α^β рационально?
- **«Классическое» решение.** Рассмотрим число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.
  - Если это число рационально, то годится $\alpha = \beta = \sqrt{2}$.
  - Если оно иррационально, возьмём $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и $\beta = \sqrt{2}$. (Тогда $\alpha^\beta = 2$.)

Пример неинтуиционистского рассуждения

- **Задача.** Существуют ли такие иррациональные числа α и β, что α^β рационально?
- **«Классическое» решение.** Рассмотрим число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.
  - Если это число рационально, то годится $\alpha = \beta = \sqrt{2}$.
  - Если оно иррационально, возьмём $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и $\beta = \sqrt{2}$. (Тогда $\alpha^\beta = 2$.)
- Мы доказали существование, но не предъявили явный пример. В процессе мы использовали *tertium non datur.*

Пример неинтуиционистского рассуждения

- **Задача.** Существуют ли такие иррациональные числа α и β, что α^β рационально?
- **«Классическое» решение.** Рассмотрим число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.
    - Если это число рационально, то годится $\alpha = \beta = \sqrt{2}$.
    - Если оно иррационально, возьмём $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и $\beta = \sqrt{2}$. (Тогда $\alpha^\beta = 2$.)
- Мы доказали существование, но не предъявили явный пример. В процессе мы использовали *tertium non datur.*
- **«Интуиционистское» решение.** $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \log_{\sqrt{2}} 3$.

Пример неинтуиционистского рассуждения

- **Задача.** Существуют ли такие иррациональные числа α и β, что α^β рационально?
- **«Классическое» решение.** Рассмотрим число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.
  - Если это число рационально, то годится $\alpha = \beta = \sqrt{2}$.
  - Если оно иррационально, возьмём $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и $\beta = \sqrt{2}$. (Тогда $\alpha^\beta = 2$.)
- Мы доказали существование, но не предъявили явный пример. В процессе мы использовали *tertium non datur*.
- **«Интуиционистское» решение.** $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \log_{\sqrt{2}} 3$.
- Если бы задача была сформулирована как «задача на построение»: *найдите* такие рациональные α и β, что α^β иррационально, то годилось бы только второе решение.

Интуиционистское исчисление предикатов (FO-Int)

... получается из классического удалением аксиомы $A \vee \neg A$:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \xi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \xi))$
3. $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
4. $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
5. $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$
6. $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
7. $\psi \to (\varphi \vee \psi)$
8. $(\varphi \to \xi) \to ((\psi \to \xi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \xi))$
9. $\perp \to \varphi$
10. $\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(t)$, если подстановка терма t вместо x допустима (свободна)
11. $\varphi(t) \to \exists x\, \varphi(x)$, если подстановка терма t вместо x допустима (свободна)
12. $\forall x\, (\psi \to \varphi(x)) \to (\psi \to \forall x\, \varphi(x))$, если x не входит свободно в ψ
13. $\forall x\, (\varphi(x) \to \psi) \to ((\exists x\, \varphi(x)) \to \psi)$, если x не входит свободно в ψ

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

$$\frac{\psi(x)}{\forall y\, \psi(y)}$$

если подстановка y вместо x допустима (свободна)

Интуиционистское исчисление предикатов (FO-Int)

... получается из классического удалением аксиомы $A \vee \neg A$:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \xi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \xi))$
3. $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
4. $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
5. $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$
6. $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
7. $\psi \to (\varphi \vee \psi)$
8. $(\varphi \to \xi) \to ((\psi \to \xi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \xi))$
9. $\perp \to \varphi$
10. $\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(t)$, если подстановка терма t вместо x допустима (свободна)
11. $\varphi(t) \to \exists x\, \varphi(x)$, если подстановка терма t вместо x допустима (свободна)
12. $\forall x\, (\psi \to \varphi(x)) \to (\psi \to \forall x\, \varphi(x))$, если x не входит свободно в ψ
13. $\forall x\, (\varphi(x) \to \psi) \to ((\exists x\, \varphi(x)) \to \psi)$, если x не входит свободно в ψ

$$\boxed{\neg\varphi \leftrightharpoons (\varphi \to \perp)}$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

$$\frac{\psi(x)}{\forall y\, \psi(y)}$$

если подстановка y вместо x допустима (свободна)

ВНК-интерпретация

- ВНК-интерпретация (семантика Брауэра – Гейтинга – Колмогорова) — это неформальная интерпретация интуиционистской логики, призванная проявить «конструктивность» рассуждений в этой логике.

ВНК-интерпретация

- ВНК-интерпретация (семантика Брауэра – Гейтинга – Колмогорова) — это неформальная интерпретация интуиционистской логики, призванная проявить «конструктивность» рассуждений в этой логике.
- При ВНК-интерпретации мы считаем формулу «интуиционистски истинной», если для неё есть *свидетельство* её истинности.

ВНК-интерпретация

- ВНК-интерпретация (семантика Брауэра – Гейтинга – Колмогорова) — это неформальная интерпретация интуиционистской логики, призванная проявить «конструктивность» рассуждений в этой логике.
- При ВНК-интерпретации мы считаем формулу «интуиционистски истинной», если для неё есть *свидетельство* её истинности.
- Пишем $s : \varphi$ („s свидетельствует в пользу φ“).

BHK-интерпретация: свидетельства

- $s : (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, если $s = \langle s_1, s_2 \rangle$, где $s_i : \varphi_i$.

ВНК-интерпретация: свидетельства

- $s : (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, если $s = \langle s_1, s_2 \rangle$, где $s_i : \varphi_i$.
- $s : (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, если $s = \langle i, s' \rangle$, где $i \in \{1, 2\}$ и $s' : \varphi_i$.

BHK-интерпретация: свидетельства

- $s : (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, если $s = \langle s_1, s_2 \rangle$, где $s_i : \varphi_i$.
- $s : (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, если $s = \langle i, s' \rangle$, где $i \in \{1, 2\}$ и $s' : \varphi_i$.
- $s : (\varphi \longrightarrow \psi)$, если s — *«общий метод»* построения свидетельства в пользу ψ по свидетельству в пользу φ: если $z : \varphi$, то $s(z) : \psi$.

BHK-интерпретация: свидетельства

- $s : (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, если $s = \langle s_1, s_2 \rangle$, где $s_i : \varphi_i$.
- $s : (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, если $s = \langle i, s' \rangle$, где $i \in \{1, 2\}$ и $s' : \varphi_i$.
- $s : (\varphi \longrightarrow \psi)$, если s — *«общий метод»* построения свидетельства в пользу ψ по свидетельству в пользу φ: если $z : \varphi$, то $s(z) : \psi$.
- $s : (\exists x\ \varphi(x))$, если $s = \langle a, s' \rangle$, где a — элемент предметной области и $s' : \varphi(a)$.

BHK-интерпретация: свидетельства

- $s : (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, если $s = \langle s_1, s_2 \rangle$, где $s_i : \varphi_i$.
- $s : (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, если $s = \langle i, s' \rangle$, где $i \in \{1, 2\}$ и $s' : \varphi_i$.
- $s : (\varphi \longrightarrow \psi)$, если s — *«общий метод»* построения свидетельства в пользу ψ по свидетельству в пользу φ: если $z : \varphi$, то $s(z) : \psi$.
- $s : (\exists x\ \varphi(x))$, если $s = \langle a, s' \rangle$, где a — элемент предметной области и $s' : \varphi(a)$.
- $s : (\forall x\ \varphi(x))$, если s — *«общий метод»* построения по элементу a предметной области свидетельства в пользу $\varphi(a)$ — для любого a должно быть $s(a) : \varphi(a)$.

BHK-интерпретация: свидетельства

- $s : (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, если $s = \langle s_1, s_2 \rangle$, где $s_i : \varphi_i$.
- $s : (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, если $s = \langle i, s' \rangle$, где $i \in \{1, 2\}$ и $s' : \varphi_i$.
- $s : (\varphi \longrightarrow \psi)$, если s — *«общий метод»* построения свидетельства в пользу ψ по свидетельству в пользу φ: если $z : \varphi$, то $s(z) : \psi$.
- $s : (\exists x\ \varphi(x))$, если $s = \langle a, s' \rangle$, где a — элемент предметной области и $s' : \varphi(a)$.
- $s : (\forall x\ \varphi(x))$, если s — *«общий метод»* построения по элементу a предметной области свидетельства в пользу $\varphi(a)$ — для любого a должно быть $s(a) : \varphi(a)$.
- В пользу лжи ($\perp$) свидетельств нет.

BHK-интерпретация FO-Int

- Нетрудно проверить, что аксиомы FO-Int корректны с точки зрения BHK-интерпретации.

BHK-интерпретация FO-Int

- Нетрудно проверить, что аксиомы FO-Int корректны с точки зрения BHK-интерпретации.
- Например, аксиома $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ реализуется как операция взятия первого элемента в паре, аксиома $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ – как функция, по данному значению возвращающая константную функцию, и т.п.

BHK-интерпретация FO-Int

- Нетрудно проверить, что аксиомы FO-Int корректны с точки зрения BHK-интерпретации.
- Например, аксиома $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ реализуется как операция взятия первого элемента в паре, аксиома $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ – как функция, по данному значению возвращающая константную функцию, и т.п.
- Правила FO-Int также корректны.

BHK-интерпретация FO-Int

- Нетрудно проверить, что аксиомы FO-Int корректны с точки зрения BHK-интерпретации.
- Например, аксиома $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ реализуется как операция взятия первого элемента в паре, аксиома $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ – как функция, по данному значению возвращающая константную функцию, и т.п.
- Правила FO-Int также корректны.
- Закон исключённого третьего, напротив, с точки зрения BHK-семантики некорректен. Дело в том, что свидетельство в пользу $\varphi \vee \neg\varphi$ должно *явно выбрать* одну из формул в дизъюнкции.

BHK-интерпретация FO-Int

- Нетрудно проверить, что аксиомы FO-Int корректны с точки зрения BHK-интерпретации.
- Например, аксиома $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ реализуется как операция взятия первого элемента в паре, аксиома $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ — как функция, по данному значению возвращающая константную функцию, и т.п.
- Правила FO-Int также корректны.
- Закон исключённого третьего, напротив, с точки зрения BHK-семантики некорректен. Дело в том, что свидетельство в пользу $\varphi \vee \neg\varphi$ должно *явно выбрать* одну из формул в дизъюнкции.
- BHK-семантика довольно неформальна — неясно, что значит *«общий метод»* в определениях для $\to$ и $\forall$.

BHK-интерпретация FO-Int

- Нетрудно проверить, что аксиомы FO-Int корректны с точки зрения BHK-интерпретации.
- Например, аксиома $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ реализуется как операция взятия первого элемента в паре, аксиома $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ — как функция, по данному значению возвращающая константную функцию, и т.п.
- Правила FO-Int также корректны.
- Закон исключённого третьего, напротив, с точки зрения BHK-семантики некорректен. Дело в том, что свидетельство в пользу $\varphi \vee \neg\varphi$ должно *явно выбрать* одну из формул в дизъюнкции.
- BHK-семантика довольно неформальна — неясно, что значит *«общий метод»* в определениях для $\to$ и $\forall$.
- Как мы увидим, понимать «общий метод» просто как функцию (отображение) нельзя.

Семантика Крипке

- Определим другую, уже вполне строгую интерпретацию FO-Int — *модели Крипке.*

Семантика Крипке

- Определим другую, уже вполне строгую интерпретацию FO-Int — *модели Крипке.*
- В этом курсе мы рассматриваем только сигнатуры без функциональных символов и *без равенства.*

Семантика Крипке

- Определим другую, уже вполне строгую интерпретацию FO-Int — *модели Крипке.*
- В этом курсе мы рассматриваем только сигнатуры без функциональных символов и *без равенства.*
- Модель Крипке $\mathscr{M} = (W, R, \mathscr{D}, \alpha)$ состоит из предикатной шкалы Крипке $\mathscr{F} = (W, R, \mathscr{D})$ и интерпретирующей функции α (для данной сигнатуры Ω).

Семантика Крипке

- Определим другую, уже вполне строгую интерпретацию FO-Int — *модели Крипке.*
- В этом курсе мы рассматриваем только сигнатуры без функциональных символов и *без равенства.*
- Модель Крипке $\mathscr{M} = (W, R, \mathscr{D}, \alpha)$ состоит из предикатной шкалы Крипке $\mathscr{F} = (W, R, \mathscr{D})$ и интерпретирующей функции α (для данной сигнатуры Ω).
    - (W, R) — ч.у.м. (W — множество миров).

Семантика Крипке

- Определим другую, уже вполне строгую интерпретацию FO-Int — *модели Крипке.*
- В этом курсе мы рассматриваем только сигнатуры без функциональных символов и *без равенства.*
- Модель Крипке $\mathscr{M} = (W, R, \mathscr{D}, \alpha)$ состоит из предикатной шкалы Крипке $\mathscr{F} = (W, R, \mathscr{D})$ и интерпретирующей функции α (для данной сигнатуры Ω).
    - (W, R) — ч.у.м. (W — множество миров).
    - $\mathscr{D} : w \mapsto D_w$, где D_w — предметная область мира $w \in W$.

Семантика Крипке

- Определим другую, уже вполне строгую интерпретацию FO-Int — *модели Крипке.*
- В этом курсе мы рассматриваем только сигнатуры без функциональных символов и *без равенства.*
- Модель Крипке $\mathscr{M} = (W, R, \mathscr{D}, \alpha)$ состоит из предикатной шкалы Крипке $\mathscr{F} = (W, R, \mathscr{D})$ и интерпретирующей функции α (для данной сигнатуры Ω).
  - (W, R) — ч.у.м. (W — множество миров).
  - $\mathscr{D} : w \mapsto D_w$, где D_w — предметная область мира $w \in W$.
  - $D_w \neq \varnothing$ для любого w.

Семантика Крипке

- Определим другую, уже вполне строгую интерпретацию FO-Int — *модели Крипке.*
- В этом курсе мы рассматриваем только сигнатуры без функциональных символов и *без равенства.*
- Модель Крипке $\mathscr{M} = (W, R, \mathscr{D}, \alpha)$ состоит из предикатной шкалы Крипке $\mathscr{F} = (W, R, \mathscr{D})$ и интерпретирующей функции α (для данной сигнатуры Ω).
  - (W, R) — ч.у.м. (W — множество миров).
  - $\mathscr{D} : w \longmapsto D_w$, где D_w — предметная область мира $w \in W$.
  - $D_w \neq \varnothing$ для любого w.
  - $\alpha(w)(P) : \underbrace{D_w \times \ldots \times D_w}_{\nu(P) \text{ раз}} \longrightarrow \{0, 1\}$. $\qquad \alpha(w)(c) \in D_w$.

Семантика Крипке

- Определим другую, уже вполне строгую интерпретацию FO-Int — *модели Крипке.*
- В этом курсе мы рассматриваем только сигнатуры без функциональных символов и *без равенства.*
- Модель Крипке $\mathscr{M} = (W, R, \mathscr{D}, \alpha)$ состоит из предикатной шкалы Крипке $\mathscr{F} = (W, R, \mathscr{D})$ и интерпретирующей функции α (для данной сигнатуры Ω).
  - (W, R) — ч.у.м. (W — множество миров).
  - $\mathscr{D} : w \mapsto D_w$, где D_w — предметная область мира $w \in W$.
  - $D_w \neq \varnothing$ для любого w.
  - $\alpha(w)(P) : \underbrace{D_w \times \ldots \times D_w}_{v(P)\text{ раз}} \longrightarrow \{0, 1\}$. $\qquad \alpha(w)(c) \in D_w$.
- Условия монотонности:

Семантика Крипке

- Определим другую, уже вполне строгую интерпретацию FO-Int — *модели Крипке.*
- В этом курсе мы рассматриваем только сигнатуры без функциональных символов и *без равенства.*
- Модель Крипке $\mathscr{M} = (W, R, \mathscr{D}, \alpha)$ состоит из предикатной шкалы Крипке $\mathscr{F} = (W, R, \mathscr{D})$ и интерпретирующей функции α (для данной сигнатуры Ω).
  - (W, R) — ч.у.м. (W — множество миров).
  - $\mathscr{D} : w \mapsto D_w$, где D_w — предметная область мира $w \in W$.
  - $D_w \neq \varnothing$ для любого w.
  - $\alpha(w)(P) : \underbrace{D_w \times \ldots \times D_w}_{\nu(P)\text{ раз}} \longrightarrow \{0, 1\}. \qquad \alpha(w)(c) \in D_w.$
- Условия монотонности:
  - Если wRu, то $D_w \subseteq D_u$.

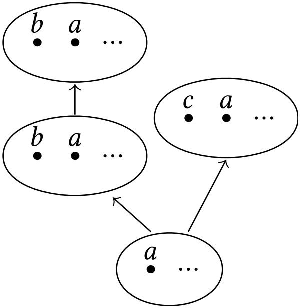
Семантика Крипке

- Определим другую, уже вполне строгую интерпретацию FO-Int — *модели Крипке*.
- В этом курсе мы рассматриваем только сигнатуры без функциональных символов и *без равенства*.
- Модель Крипке $\mathscr{M} = (W, R, \mathscr{D}, \alpha)$ состоит из предикатной шкалы Крипке $\mathscr{F} = (W, R, \mathscr{D})$ и интерпретирующей функции α (для данной сигнатуры Ω).
  - (W, R) — ч.у.м. (W — множество миров).
  - $\mathscr{D} : w \mapsto D_w$, где D_w — предметная область мира $w \in W$.
  - $D_w \neq \varnothing$ для любого w.
  - $\alpha(w)(P) : \underbrace{D_w \times \ldots \times D_w}_{v(P) \text{ раз}} \longrightarrow \{0, 1\}$. $\qquad \alpha(w)(c) \in D_w$.
- Условия монотонности:
  - Если wRu, то $D_w \subseteq D_u$.
  - Если wRu, то $\alpha(u)(c) = \alpha(w)(c)$.

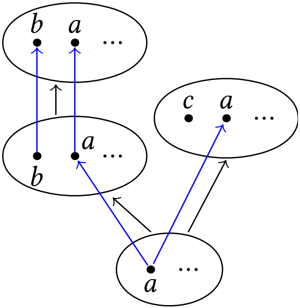
Семантика Крипке

- Определим другую, уже вполне строгую интерпретацию FO-Int — *модели Крипке.*
- В этом курсе мы рассматриваем только сигнатуры без функциональных символов и *без равенства.*
- Модель Крипке $\mathscr{M} = (W, R, \mathscr{D}, \alpha)$ состоит из предикатной шкалы Крипке $\mathscr{F} = (W, R, \mathscr{D})$ и интерпретирующей функции α (для данной сигнатуры Ω).
  - (W, R) — ч.у.м. (W — множество миров).
  - $\mathscr{D} : w \mapsto D_w$, где D_w — предметная область мира $w \in W$.
  - $D_w \neq \varnothing$ для любого w.
  - $\alpha(w)(P) : \underbrace{D_w \times \ldots \times D_w}_{v(P)\text{ раз}} \to \{0, 1\}. \qquad \alpha(w)(c) \in D_w.$
- Условия монотонности:
  - Если wRu, то $D_w \subseteq D_u$.
  - Если wRu, то $\alpha(u)(c) = \alpha(w)(c)$.
  - Если wRu и $\alpha(w)(P)(\vec{a}) = 1$, то $\alpha(u)(P)(\vec{a}) = 1$.

Семантика Крипке

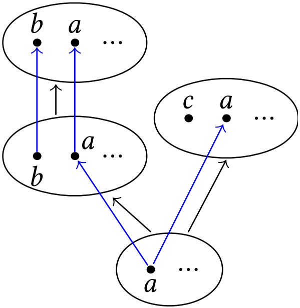


Семантика Крипке



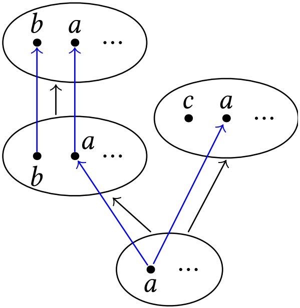
- Каждый элемент наследуется *тем же самым* элементом вдоль R.

Семантика Крипке



- Каждый элемент наследуется *тем же самым* элементом вдоль R.
- Проблема с (нормальными) моделями для равенства: может оказаться, что $u \nVdash a = b$, uRv, $v \Vdash a = b$.

Семантика Крипке



- Каждый элемент наследуется *тем же самым* элементом вдоль R.
- Проблема с (нормальными) моделями для равенства: может оказаться, что $u \nVdash a = b$, uRv, $v \Vdash a = b$. Тогда при переходе от D_u к D_v разные элементы a и b должны «склеиться».

Семантика Крипке: истинность

- Расширенная сигнатура: $\Omega + S$, где S — множество новых констант.

Семантика Крипке: истинность

- Расширенная сигнатура: $\Omega + S$, где S — множество новых констант.
- Будем определять истинность в мире w модели $\mathscr{M}$ *замкнутых* формул расширенной сигнатуры $\Omega + D_w$. Обозначение: $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$.

Семантика Крипке: истинность

- Расширенная сигнатура: $\Omega + S$, где S — множество новых констант.
- Будем определять истинность в мире w модели $\mathscr{M}$ *замкнутых* формул расширенной сигнатуры $\Omega + D_w$. Обозначение: $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$.
  - $\mathscr{M}, w \Vdash P(c_1, \dots, c_{\nu(P)}) \iff \alpha(w)(P)(\vec{c}) = 1$
  - $\mathscr{M}, w \nVdash \bot$
  - $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi \wedge \psi \iff \mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ и $\mathscr{M}, w \Vdash \psi$
  - $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi \iff \mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ или $\mathscr{M}, w \Vdash \psi$
  - $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi \to \psi \iff$
    $\iff$ для любого u, если wRu, то $\mathscr{M}, u \nVdash \varphi$ или $\mathscr{M}, u \Vdash \psi$
  - $\mathscr{M}, w \Vdash \exists x\, \psi(x) \iff \mathscr{M}, w \Vdash \psi(a)$ для некоторого $a \in D_w$
  - $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\, \psi(x) \iff$ для любого u, если wRu,
    то $\mathscr{M}, u \Vdash \psi(a)$ для любого $a \in D_u$

Семантика Крипке: истинность

- Расширенная сигнатура: $\Omega + S$, где S — множество новых констант.
- Будем определять истинность в мире w модели $\mathscr{M}$ *замкнутых* формул расширенной сигнатуры $\Omega + D_w$. Обозначение: $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$.
  - $\mathscr{M}, w \Vdash P(c_1, \dots, c_{\nu(P)}) \iff \alpha(w)(P)(\vec{c}) = 1$
  - $\mathscr{M}, w \nVdash \bot$
  - $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi \wedge \psi \iff \mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ и $\mathscr{M}, w \Vdash \psi$
  - $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi \iff \mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ или $\mathscr{M}, w \Vdash \psi$
  - $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi \to \psi \iff$
    $\iff$ для любого u, если wRu, то $\mathscr{M}, u \nVdash \varphi$ или $\mathscr{M}, u \Vdash \psi$
  - $\mathscr{M}, w \Vdash \exists x\, \psi(x) \iff \mathscr{M}, w \Vdash \psi(a)$ для некоторого $a \in D_w$
  - $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\, \psi(x) \iff$ для любого u, если wRu,
    то $\mathscr{M}, u \Vdash \psi(a)$ для любого $a \in D_u$

Семантика Крипке: истинность

- Расширенная сигнатура: $\Omega + S$, где S — множество новых констант.
- Будем определять истинность в мире w модели $\mathscr{M}$ *замкнутых* формул расширенной сигнатуры $\Omega + D_w$. Обозначение: $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$.
    - $\mathscr{M}, w \Vdash P(c_1, \dots, c_{\nu(P)}) \iff \alpha(w)(P)(\vec{c}) = 1$
    - $\mathscr{M}, w \nVdash \bot$
    - $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi \wedge \psi \iff \mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ и $\mathscr{M}, w \Vdash \psi$
    - $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi \iff \mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ или $\mathscr{M}, w \Vdash \psi$
    - $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi \to \psi \iff$
      $\iff$ для любого u, если wRu, то $\mathscr{M}, u \nVdash \varphi$ или $\mathscr{M}, u \Vdash \psi$
    - $\mathscr{M}, w \Vdash \exists x\, \psi(x) \iff \mathscr{M}, w \Vdash \psi(a)$ для некоторого $a \in D_w$
    - $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\, \psi(x) \iff$ для любого u, если wRu, то $\mathscr{M}, u \Vdash \psi(a)$ для любого $a \in D_u$
- Обозначение: $R(w) = \{u \mid wRu\}$.

Монотонность для произвольных формул

Теорема

Если $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ *и* wRu, *то* $\mathscr{M}, u \Vdash \varphi$.

- Доказательство — индукция по построению φ.

Монотонность для произвольных формул

Теорема

Если $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ *и* wRu, *то* $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$.

- Доказательство — индукция по построению φ.
  - Для атомарных формул: по определению модели Крипке.

Монотонность для произвольных формул

Теорема

Если $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ *и* wRu, *то* $\mathscr{M}, u \Vdash \varphi$.

- Доказательство — индукция по построению φ.
  - Для атомарных формул: по определению модели Крипке.
  - Для $\vee$ и $\wedge$: очевидно (они монотонны как булевы функции).

Монотонность для произвольных формул

Теорема

Если $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ *и* wRu*, то* $\mathscr{M}, u \Vdash \varphi$*.*

- Доказательство — индукция по построению φ.
  - Для атомарных формул: по определению модели Крипке.
  - Для $\vee$ и $\wedge$: очевидно (они монотонны как булевы функции).
  - Для импликации и квантора всеобщности: в силу транзитивности R (если wRu, то $R(u) \subseteq R(w)$).

Монотонность для произвольных формул

Теорема

Если $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ *и* wRu, *то* $\mathscr{M}, u \Vdash \varphi$.

- Доказательство — индукция по построению φ.
  - Для атомарных формул: по определению модели Крипке.
  - Для $\vee$ и $\wedge$: очевидно (они монотонны как булевы функции).
  - Для импликации и квантора всеобщности: в силу транзитивности R (если wRu, то $R(u) \subseteq R(w)$).
  - Для квантора существования: в силу $D_w \subseteq D_u$ (объект a не исчезнет).

Корректность

Теорема

Если FO-Int $\vdash \varphi$, *то* $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ *для любой модели Крипке* $\mathscr{M}$ *и любого мира* w.

Корректность

Теорема

Если FO-Int $\vdash \varphi$, *то* $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ *для любой модели Крипке* $\mathscr{M}$ *и любого мира* w.

- Для доказательства достаточно проверить общезначимость аксиом и сохранение общезначимость для правил вывода.

Корректность

Теорема

Если FO-Int $\vdash \varphi$, *то* $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ *для любой модели Крипке* $\mathscr{M}$ *и любого мира* w.

- Для доказательства достаточно проверить общезначимость аксиом и сохранение общезначимость для правил вывода.
- Проверим аксиому $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ в мире w.

Корректность

Теорема

Если FO-Int $\vdash \varphi$, *то* $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ *для любой модели Крипке* $\mathscr{M}$ *и любого мира* w.

- Для доказательства достаточно проверить общезначимость аксиом и сохранение общезначимость для правил вывода.
- Проверим аксиому $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ в мире w.

$$\begin{array}{c} w \\ \bullet \\ ? \Vdash \varphi \to (\psi \to \varphi) \end{array}$$

Корректность

Теорема

Если FO-Int $\vdash \varphi$, *то* $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ *для любой модели Крипке* $\mathscr{M}$ *и любого мира* w.

- Для доказательства достаточно проверить общезначимость аксиом и сохранение общезначимость для правил вывода.
- Проверим аксиому $\varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi)$ в мире w.

$$\begin{array}{ccc} w & & u \\ \bullet & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} & \bullet \\ ? \Vdash \varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi) & & \Vdash \varphi \\ & & ? \Vdash \psi \longrightarrow \varphi \end{array}$$

Корректность

Теорема

Если FO-Int $\vdash \varphi$, *то* $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ *для любой модели Крипке* $\mathcal{M}$ *и любого мира* w.

- Для доказательства достаточно проверить общезначимость аксиом и сохранение общезначимость для правил вывода.
- Проверим аксиому $\varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi)$ в мире w.

$$
\begin{array}{ccccc}
w & & u & & v \\
\bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
? \Vdash \varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi) & & \Vdash \varphi & & \Vdash \psi \\
 & & ? \Vdash \psi \longrightarrow \varphi & &
\end{array}
$$

Корректность

Теорема

Если FO-Int $\vdash \varphi$, *то* $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ *для любой модели Крипке* $\mathscr{M}$ *и любого мира* w.

- Для доказательства достаточно проверить общезначимость аксиом и сохранение общезначимость для правил вывода.
- Проверим аксиому $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ в мире w.

$$
\begin{tikzcd}
\overset{w}{\bullet} \arrow[r] & \overset{u}{\bullet} \arrow[r] & \overset{v}{\bullet} \\
?\Vdash \varphi \to (\psi \to \varphi) & \Vdash \varphi & \Vdash \psi \\
 & ?\Vdash \psi \to \varphi & \Vdash \varphi
\end{tikzcd}
$$

Корректность

Теорема

Если FO-Int $\vdash \varphi$, *то* $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ *для любой модели Крипке* $\mathscr{M}$ *и любого мира* w.

- Для доказательства достаточно проверить общезначимость аксиом и сохранение общезначимость для правил вывода.
- Проверим аксиому $\varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi)$ в мире w.

$$\begin{array}{ccccc} w & & u & & v \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ ?\Vdash \varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi) & & \Vdash \varphi & & \Vdash \psi \\ & & \Vdash \psi \longrightarrow \varphi & & \Vdash \varphi \end{array}$$

Корректность

Теорема

Если FO-Int $\vdash \varphi$, *то* $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ *для любой модели Крипке* $\mathscr{M}$ *и любого мира* w.

- Для доказательства достаточно проверить общезначимость аксиом и сохранение общезначимость для правил вывода.
- Проверим аксиому $\varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi)$ в мире w.

$$\begin{array}{ccccc} w & & u & & v \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \Vdash \varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi) & & \Vdash \varphi & & \Vdash \psi \\ & & \Vdash \psi \longrightarrow \varphi & & \Vdash \varphi \end{array}$$

Корректность

Теорема

Если FO-Int $\vdash \varphi$, *то* $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi$ *для любой модели Крипке* $\mathscr{M}$ *и любого мира* w.

- Для доказательства достаточно проверить общезначимость аксиом и сохранение общезначимость для правил вывода.
- Проверим аксиому $\varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi)$ в мире w.

$$\begin{array}{ccccc} w & & u & & v \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \Vdash \varphi \longrightarrow (\psi \longrightarrow \varphi) & & \Vdash \varphi & & \Vdash \psi \\ & & \Vdash \psi \longrightarrow \varphi & & \Vdash \varphi \end{array}$$

- Остальные пропозициональные аксиомы проверяются схожим образом **(упражнение).**

Корректность: предикатные аксиомы

- Тонкость: мы определяли истинность в мирах только для *замкнутых* формул, а в выводах могут встречаться формулы со свободными переменными.

Корректность: предикатные аксиомы

- Тонкость: мы определяли истинность в мирах только для *замкнутых* формул, а в выводах могут встречаться формулы со свободными переменными.
- Доопределим: считаем, что $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, если $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ (т.е. $\varphi[x_1 := a_1, \ldots, x_n := a_n]$) для любых $a_1, \ldots, a_n \in D_w$.

Корректность: предикатные аксиомы

- Тонкость: мы определяли истинность в мирах только для *замкнутых* формул, а в выводах могут встречаться формулы со свободными переменными.
- Доопределим: считаем, что $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi(x_1, \dots, x_n)$, если $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi(a_1, \dots, a_n)$ (т.е. $\varphi[x_1 \ := a_1, \dots, x_n \ := a_n]$) для любых $a_1, \dots, a_n \in D_w$.
- Пропозициональные аксиомы от этого не страдают: они проверяются в мире w для произвольных $a_1, \dots, a_n \in D_w$. Для всех $u \in R(w)$ имеем также $a_i \in D_u$.

Корректность: предикатные аксиомы

- Тонкость: мы определяли истинность в мирах только для *замкнутых* формул, а в выводах могут встречаться формулы со свободными переменными.
- Доопределим: считаем, что $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi(x_1, \dots, x_n)$, если $\mathscr{M}, w \Vdash \varphi(a_1, \dots, a_n)$ (т.е. $\varphi[x_1 := a_1, \dots, x_n := a_n]$) для любых $a_1, \dots, a_n \in D_w$.
- Пропозициональные аксиомы от этого не страдают: они проверяются в мире w для произвольных $a_1, \dots, a_n \in D_w$. Для всех $u \in R(w)$ имеем также $a_i \in D_u$.
- В аксиомах $\forall x\, \varphi(x, \vec{y}) \to \varphi(t, \vec{y})$ и $\varphi(t, \vec{y}) \to \exists x\, \varphi(x, \vec{y})$ — подстановка терма t вместо x. Функциональных символов нет, терм — это переменная или константа.

Корректность: предикатные аксиомы

- Тонкость: мы определяли истинность в мирах только для *замкнутых* формул, а в выводах могут встречаться формулы со свободными переменными.
- Доопределим: считаем, что $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, если $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ (т.е. $\varphi[x_1 := a_1, \ldots, x_n := a_n]$) для любых $a_1, \ldots, a_n \in D_w$.
- Пропозициональные аксиомы от этого не страдают: они проверяются в мире w для произвольных $a_1, \ldots, a_n \in D_w$. Для всех $u \in R(w)$ имеем также $a_i \in D_u$.
- В аксиомах $\forall x\, \varphi(x, \vec{y}) \to \varphi(t, \vec{y})$ и $\varphi(t, \vec{y}) \to \exists x\, \varphi(x, \vec{y})$ — подстановка терма t вместо x. Функциональных символов нет, терм — это переменная или константа.
- Подстановка константы всегда свободна.

Корректность: предикатные аксиомы

- Тонкость: мы определяли истинность в мирах только для *замкнутых* формул, а в выводах могут встречаться формулы со свободными переменными.
- Доопределим: считаем, что $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, если $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ (т.е. $\varphi[x_1 := a_1, \ldots, x_n := a_n]$) для любых $a_1, \ldots, a_n \in D_w$.
- Пропозициональные аксиомы от этого не страдают: они проверяются в мире w для произвольных $a_1, \ldots, a_n \in D_w$. Для всех $u \in R(w)$ имеем также $a_i \in D_u$.
- В аксиомах $\forall x\, \varphi(x, \vec{y}) \to \varphi(t, \vec{y})$ и $\varphi(t, \vec{y}) \to \exists x\, \varphi(x, \vec{y})$ — подстановка терма t вместо x. Функциональных символов нет, терм — это переменная или константа.
- Подстановка константы всегда свободна.
- Переменная (одна из $\vec{y}$) — обозначим её z: $\varphi(z, \vec{y})$. Свободность подстановки: $\varphi[x := b, z := b] = \varphi[x := z][z := b] = \varphi(b, b, \vec{y})$.

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверяем $w \Vdash \forall x\, \varphi(x, z, \vec{y}) \longrightarrow \varphi(z, z, \vec{y})$, т.е. $w \Vdash \forall x\, \varphi(x, b, \vec{a}) \longrightarrow \varphi(b, b, \vec{a})$ для произвольных b, $\vec{a}$ из D_w.

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверяем $w \Vdash \forall x\, \varphi(x, z, \vec{y}) \longrightarrow \varphi(z, z, \vec{y})$, т.е. $w \Vdash \forall x\, \varphi(x, b, \vec{a}) \longrightarrow \varphi(b, b, \vec{a})$ для произвольных $b, \vec{a}$ из D_w.
- Пусть wRu и $u \Vdash \forall x\, \varphi(x, b, \vec{a})$.

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверяем $w \Vdash \forall x\, \varphi(x, z, \vec{y}) \longrightarrow \varphi(z, z, \vec{y})$, т.е.
  $w \Vdash \forall x\, \varphi(x, b, \vec{a}) \longrightarrow \varphi(b, b, \vec{a})$ для произвольных $b, \vec{a}$ из D_w.
- Пусть wRu и $u \Vdash \forall x\, \varphi(x, b, \vec{a})$.
- В частности (т.к. uRu), $u \Vdash \varphi(c, b, \vec{a})$ для любого $c \in D_u$.

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверяем $w \Vdash \forall x\, \varphi(x, z, \vec{y}) \longrightarrow \varphi(z, z, \vec{y})$, т.е. $w \Vdash \forall x\, \varphi(x, b, \vec{a}) \longrightarrow \varphi(b, b, \vec{a})$ для произвольных $b, \vec{a}$ из D_w.
- Пусть wRu и $u \Vdash \forall x\, \varphi(x, b, \vec{a})$.
- В частности (т.к. uRu), $u \Vdash \varphi(c, b, \vec{a})$ для любого $c \in D_u$.
- Возьмём $c = b \in D_w \subseteq D_u$. Получим требуемое $u \Vdash \varphi(b, b, \vec{a})$.

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверяем $w \Vdash \forall x\, \varphi(x, z, \vec{y}) \longrightarrow \varphi(z, z, \vec{y})$, т.е.
  $w \Vdash \forall x\, \varphi(x, b, \vec{a}) \longrightarrow \varphi(b, b, \vec{a})$ для произвольных $b, \vec{a}$ из D_w.
- Пусть wRu и $u \Vdash \forall x\, \varphi(x, b, \vec{a})$.
- В частности (т.к. uRu), $u \Vdash \varphi(c, b, \vec{a})$ для любого $c \in D_u$.
- Возьмём $c = b \in D_w \subseteq D_u$. Получим требуемое $u \Vdash \varphi(b, b, \vec{a})$.
- Случай константы ($t = b$) рассматривается так же.

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверяем $w \Vdash \forall x\, \varphi(x, z, \vec{y}) \longrightarrow \varphi(z, z, \vec{y})$, т.е. $w \Vdash \forall x\, \varphi(x, b, \vec{a}) \longrightarrow \varphi(b, b, \vec{a})$ для произвольных $b, \vec{a}$ из D_w.
- Пусть wRu и $u \Vdash \forall x\, \varphi(x, b, \vec{a})$.
- В частности (т.к. uRu), $u \Vdash \varphi(c, b, \vec{a})$ для любого $c \in D_u$.
- Возьмём $c = b \in D_w \subseteq D_u$. Получим требуемое $u \Vdash \varphi(b, b, \vec{a})$.
- Случай константы ($t = b$) рассматривается так же.
- Проверяем $w \Vdash \varphi(b, b, \vec{a}) \longrightarrow \exists x\, \varphi(x, b, \vec{a})$.

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверяем $w \Vdash \forall x\, \varphi(x, z, \vec{y}) \longrightarrow \varphi(z, z, \vec{y})$, т.е. $w \Vdash \forall x\, \varphi(x, b, \vec{a}) \longrightarrow \varphi(b, b, \vec{a})$ для произвольных $b, \vec{a}$ из D_w.
- Пусть wRu и $u \Vdash \forall x\, \varphi(x, b, \vec{a})$.
- В частности (т.к. uRu), $u \Vdash \varphi(c, b, \vec{a})$ для любого $c \in D_u$.
- Возьмём $c = b \in D_w \subseteq D_u$. Получим требуемое $u \Vdash \varphi(b, b, \vec{a})$.
- Случай константы ($t = b$) рассматривается так же.
- Проверяем $w \Vdash \varphi(b, b, \vec{a}) \longrightarrow \exists x\, \varphi(x, b, \vec{a})$.
- Если wRu и $u \Vdash \varphi(b, b, \vec{a})$, то $u \Vdash \exists x\, \varphi(x, b, \vec{a})$.

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверим $w \Vdash \forall x\,(\psi(\vec{a}) \longrightarrow \varphi(x, \vec{a})) \longrightarrow (\psi(\vec{a}) \longrightarrow \forall x\,\varphi(x, \vec{a}))$.

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверим $w \Vdash \forall x\,(\psi(\vec{a}) \longrightarrow \varphi(x, \vec{a})) \longrightarrow (\psi(\vec{a}) \longrightarrow \forall x\,\varphi(x, \vec{a}))$.
- Здесь $\vec{a}$ можно не писать (они не меняются), т.е. считать, что свободных переменных нет.

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверим $w \Vdash \forall x\,(\psi(\vec{a}) \to \varphi(x,\vec{a})) \to (\psi(\vec{a}) \to \forall x\,\varphi(x,\vec{a}))$.
- Здесь $\vec{a}$ можно не писать (они не меняются), т.е. считать, что свободных переменных нет.

w

$\bullet$

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверим $w \Vdash \forall x\,(\psi(\vec{a}) \longrightarrow \varphi(x, \vec{a})) \longrightarrow (\psi(\vec{a}) \longrightarrow \forall x\,\varphi(x, \vec{a}))$.
- Здесь $\vec{a}$ можно не писать (они не меняются), т.е. считать, что свободных переменных нет.

$$\begin{tikzcd} \overset{w}{\bullet} \arrow[r] & \overset{u}{\bullet} \end{tikzcd}$$

$$\Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x))$$

$$? \Vdash \psi \longrightarrow \forall x\,\psi(x)$$

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверим $w \Vdash \forall x\,(\psi(\vec{a}) \longrightarrow \varphi(x,\vec{a})) \longrightarrow (\psi(\vec{a}) \longrightarrow \forall x\,\varphi(x,\vec{a}))$.
- Здесь $\vec{a}$ можно не писать (они не меняются), т.е. считать, что свободных переменных нет.

$$
\begin{tikzcd}
\overset{w}{\bullet} \arrow[r] & \overset{u}{\bullet} \arrow[r] & \overset{v}{\bullet} \\
& \Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x)) & \Vdash \psi \\
& ?\Vdash \psi \longrightarrow \forall x\,\psi(x) & ?\Vdash \forall x\,\varphi(x)
\end{tikzcd}
$$

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверим $w \Vdash \forall x\,(\psi(\vec{a}) \longrightarrow \varphi(x,\vec{a})) \longrightarrow (\psi(\vec{a}) \longrightarrow \forall x\,\varphi(x,\vec{a}))$.
- Здесь $\vec{a}$ можно не писать (они не меняются), т.е. считать, что свободных переменных нет.

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
w & u & v & q \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \\
 & \Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x)) & \Vdash \psi & ?\Vdash \varphi(b) \quad \text{для любого } b \in D_q \\
 & ?\Vdash \psi \longrightarrow \forall x\,\psi(x) & ?\Vdash \forall x\,\varphi(x) &
\end{tikzcd}$$

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверим $w \Vdash \forall x\,(\psi(\vec{a}) \longrightarrow \varphi(x,\vec{a})) \longrightarrow (\psi(\vec{a}) \longrightarrow \forall x\,\varphi(x,\vec{a}))$.
- Здесь $\vec{a}$ можно не писать (они не меняются), т.е. считать, что свободных переменных нет.

$$\begin{tikzcd}
\overset{w}{\bullet} \arrow[r] & \overset{u}{\bullet} \arrow[r] & \overset{v}{\bullet} \arrow[r] & \overset{q}{\bullet} \\
& \Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x)) & \Vdash \psi & ?\Vdash \varphi(b) \quad \text{для любого } b \in D_q \\
& ?\Vdash \psi \longrightarrow \forall x\,\psi(x) & ?\Vdash \forall x\,\varphi(x) & \Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x))
\end{tikzcd}$$

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверим $w \Vdash \forall x\,(\psi(\vec{a}) \longrightarrow \varphi(x,\vec{a})) \longrightarrow (\psi(\vec{a}) \longrightarrow \forall x\,\varphi(x,\vec{a}))$.
- Здесь $\vec{a}$ можно не писать (они не меняются), т.е. считать, что свободных переменных нет.

$$
\begin{tikzcd}
\underset{w}{\bullet} \arrow[r] & \underset{u}{\bullet} \arrow[r] & \underset{v}{\bullet} \arrow[r] & \underset{q}{\bullet}
\end{tikzcd}
$$

$\Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x))$ $\quad$ $\Vdash \psi$ $\quad$ $? \Vdash \varphi(b)$ для любого $b \in D_q$

$? \Vdash \psi \longrightarrow \forall x\,\psi(x)$ $\quad$ $? \Vdash \forall x\,\varphi(x)$ $\quad$ $\Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x))$

$\Vdash \psi \longrightarrow \varphi(b)$ для любого $b \in D_q$

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверим $w \Vdash \forall x\,(\psi(\vec{a}) \longrightarrow \varphi(x, \vec{a})) \longrightarrow (\psi(\vec{a}) \longrightarrow \forall x\,\varphi(x, \vec{a}))$.
- Здесь $\vec{a}$ можно не писать (они не меняются), т.е. считать, что свободных переменных нет.

$$\begin{tikzcd} \overset{w}{\bullet} \arrow[r] & \overset{u}{\bullet} \arrow[r] & \overset{v}{\bullet} \arrow[r] & \overset{q}{\bullet} \end{tikzcd}$$

u	v	q
$\Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x))$	$\Vdash \psi$	$? \Vdash \varphi(b)$ для любого $b \in D_q$
$? \Vdash \psi \longrightarrow \forall x\,\psi(x)$	$? \Vdash \forall x\,\varphi(x)$	$\Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x))$
		$\Vdash \psi \longrightarrow \varphi(b)$ для любого $b \in D_q$
		$\Vdash \psi$

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверим $w \Vdash \forall x\,(\psi(\vec{a}) \longrightarrow \varphi(x,\vec{a})) \longrightarrow (\psi(\vec{a}) \longrightarrow \forall x\,\varphi(x,\vec{a}))$.
- Здесь $\vec{a}$ можно не писать (они не меняются), т.е. считать, что свободных переменных нет.

$$
\begin{tikzcd}
\overset{w}{\bullet} \arrow[r] & \overset{u}{\bullet} \arrow[r] & \overset{v}{\bullet} \arrow[r] & \overset{q}{\bullet}
\end{tikzcd}
$$

$\Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x))$

$? \Vdash \psi \longrightarrow \forall x\,\psi(x)$

$\Vdash \psi$

$? \Vdash \forall x\,\varphi(x)$

$\Vdash \varphi(b)$ для любого $b \in D_q$

$\Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x))$

$\Vdash \psi \longrightarrow \varphi(b)$ для любого $b \in D_q$

$\Vdash \psi$

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверим $w \Vdash \forall x\,(\psi(\vec{a}) \longrightarrow \varphi(x,\vec{a})) \longrightarrow (\psi(\vec{a}) \longrightarrow \forall x\,\varphi(x,\vec{a}))$.
- Здесь $\vec{a}$ можно не писать (они не меняются), т.е. считать, что свободных переменных нет.

$$\begin{tikzcd} \overset{w}{\bullet} \arrow[r] & \overset{u}{\bullet} \arrow[r] & \overset{v}{\bullet} \arrow[r] & \overset{q}{\bullet} \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{cccc}
 & \Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x)) & \Vdash \psi & \Vdash \varphi(b) \quad \text{для любого } b \in D_q \\
 & ?\Vdash \psi \longrightarrow \forall x\,\psi(x) & \Vdash \forall x\,\varphi(x) & \Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x)) \\
 & & & \Vdash \psi \longrightarrow \varphi(b) \quad \text{для любого } b \in D_q \\
 & & & \Vdash \psi
\end{array}$$

Корректность: предикатные аксиомы

- Проверим $w \Vdash \forall x\,(\psi(\vec{a}) \longrightarrow \varphi(x,\vec{a})) \longrightarrow (\psi(\vec{a}) \longrightarrow \forall x\,\varphi(x,\vec{a}))$.
- Здесь $\vec{a}$ можно не писать (они не меняются), т.е. считать, что свободных переменных нет.

$$\begin{tikzcd} \overset{w}{\bullet} \arrow[r] & \overset{u}{\bullet} \arrow[r] & \overset{v}{\bullet} \arrow[r] & \overset{q}{\bullet} \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
\Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x)) & \Vdash \psi & \Vdash \varphi(b) \quad \text{для любого } b \in D_q \\
\Vdash \psi \longrightarrow \forall x\,\psi(x) & \Vdash \forall x\,\varphi(x) & \Vdash \forall x\,(\psi \longrightarrow \varphi(x)) \\
 & & \Vdash \psi \longrightarrow \varphi(b) \quad \text{для любого } b \in D_q \\
 & & \Vdash \psi
\end{array}$$

- Аксиома $\forall x\,(\varphi(x) \longrightarrow \psi) \longrightarrow ((\exists x\,\varphi(x)) \longrightarrow \psi)$ проверяется сходным образом **(упражнение).**

Корректность: правила вывода

- Modus ponens:

Корректность: правила вывода

- Modus ponens:
  - Пусть $w \Vdash \varphi$ и $w \Vdash \varphi \longrightarrow \psi$.

Корректность: правила вывода

- Modus ponens:
    - Пусть $w \Vdash \varphi$ и $w \Vdash \varphi \longrightarrow \psi$.
    - Тогда, в частности (т.к. wRw), $w \nVdash \varphi$ или $w \Vdash \psi$.

Корректность: правила вывода

- Modus ponens:
  - Пусть $w \Vdash \varphi$ и $w \Vdash \varphi \to \psi$.
  - Тогда, в частности (т.к. wRw), $w \nVdash \varphi$ или $w \Vdash \psi$.
  - Следовательно, $w \Vdash \psi$.

Корректность: правила вывода

- Modus ponens:
  - Пусть $w \Vdash \varphi$ и $w \Vdash \varphi \to \psi$.
  - Тогда, в частности (т.к. wRw), $w \nVdash \varphi$ или $w \Vdash \psi$.
  - Следовательно, $w \Vdash \psi$.
- Усиление:

Корректность: правила вывода

- Modus ponens:
  - Пусть $w \Vdash \varphi$ и $w \Vdash \varphi \longrightarrow \psi$.
  - Тогда, в частности (т.к. wRw), $w \nVdash \varphi$ или $w \Vdash \psi$.
  - Следовательно, $w \Vdash \psi$.
- Усиление:
  - Пусть $v \Vdash \varphi(a)$ для любого $v \in W$ и любого $a \in D_v$.

Корректность: правила вывода

- Modus ponens:
  - Пусть $w \Vdash \varphi$ и $w \Vdash \varphi \longrightarrow \psi$.
  - Тогда, в частности (т.к. wRw), $w \nVdash \varphi$ или $w \Vdash \psi$.
  - Следовательно, $w \Vdash \psi$.
- Усиление:
  - Пусть $v \Vdash \varphi(a)$ для любого $v \in W$ и любого $a \in D_v$.
  - В частности, для любого $v \in R(w)$ и для любого $a \in D_v$ имеем $v \Vdash \varphi(a)$.

Корректность: правила вывода

- Modus ponens:
  - Пусть $w \Vdash \varphi$ и $w \Vdash \varphi \longrightarrow \psi$.
  - Тогда, в частности (т.к. wRw), $w \nVdash \varphi$ или $w \Vdash \psi$.
  - Следовательно, $w \Vdash \psi$.
- Усиление:
  - Пусть $v \Vdash \varphi(a)$ для любого $v \in W$ и любого $a \in D_v$.
  - В частности, для любого $v \in R(w)$ и для любого $a \in D_v$ имеем $v \Vdash \varphi(a)$.
  - Следовательно, $w \Vdash \forall y\, \psi(y)$.

Полнота

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке, то она доказуема в FO-Int.

Полнота

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке, то она доказуема в FO-Int.

- Эту теорему мы докажем на следующей лекции.

Сдвиг двойного отрицания

- Рассмотрим следующую формулу: $\forall x\, \neg\neg P(x) \longrightarrow \neg\neg\forall x\, P(x)$.

Сдвиг двойного отрицания

- Рассмотрим следующую формулу: $\forall x \neg\neg P(x) \to \neg\neg\forall x\, P(x)$.
- Доказуема ли эта формула в FO-Int?

Сдвиг двойного отрицания

- Рассмотрим следующую формулу: $\forall x \, \neg\neg P(x) \;\to\; \neg\neg\forall x \, P(x)$.
- Доказуема ли эта формула в FO-Int?
- С точки зрения BHK-семантики: не должна.

Сдвиг двойного отрицания

- Рассмотрим следующую формулу: $\forall x\, \neg\neg P(x) \ \rightarrow\ \neg\neg\forall x\, P(x)$.
- Доказуема ли эта формула в FO-Int?
- С точки зрения BHK-семантики: не должна.
  - Посылка: для каждого конкретного x_0 умеем опровергать любое опровержение $P(x_0)$.

Сдвиг двойного отрицания

- Рассмотрим следующую формулу: $\forall x\, \neg\neg P(x) \;\to\; \neg\neg\forall x\, P(x)$.
- Доказуема ли эта формула в FO-Int?
- С точки зрения BHK-семантики: не должна.
  - Посылка: для каждого конкретного x_0 умеем опровергать любое опровержение $P(x_0)$.
  - Заключение: нужно уметь опровергнуть любое опровержение $\forall x P(x)$.

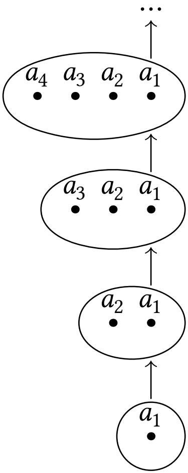
Сдвиг двойного отрицания

- Рассмотрим следующую формулу: $\forall x\, \neg\neg P(x) \to \neg\neg\forall x\, P(x)$.
- Доказуема ли эта формула в FO-Int?
- С точки зрения BHK-семантики: не должна.
    - Посылка: для каждого конкретного x_0 умеем опровергать любое опровержение $P(x_0)$.
    - Заключение: нужно уметь опровергнуть любое опровержение $\forall x P(x)$.
    - Это гипотетическое опровержение может не давать явного контрпримера x_0.

Сдвиг двойного отрицания

- Рассмотрим следующую формулу: $\forall x \neg\neg P(x) \ \rightarrow\ \neg\neg\forall x\, P(x)$.
- Доказуема ли эта формула в FO-Int?
- С точки зрения BHK-семантики: не должна.
  - Посылка: для каждого конкретного x_0 умеем опровергать любое опровержение $P(x_0)$.
  - Заключение: нужно уметь опровергнуть любое опровержение $\forall x P(x)$.
  - Это гипотетическое опровержение может не давать явного контрпримера x_0.
- Построим контрмодель Крипке.

Сдвиг двойного отрицания: контрмодель



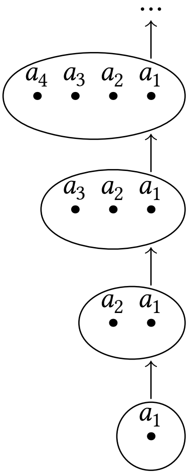
$$w_4 \Vdash P(a_1), \Vdash P(a_2), \Vdash P(a_3), \nVdash P(a_4)$$

$$w_3 \Vdash P(a_1), \Vdash P(a_2), \nVdash P(a_3)$$

$$w_2 \Vdash P(a_1), \nVdash P(a_2)$$

$$w_1 \nVdash P(a_1)$$

Сдвиг двойного отрицания: контрмодель



$$w_4 \Vdash P(a_1), \Vdash P(a_2), \Vdash P(a_3), \nVdash P(a_4)$$

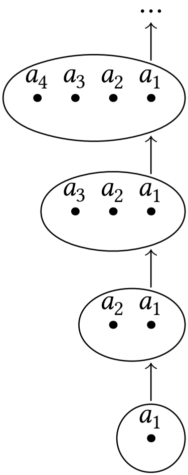
$$w_3 \Vdash P(a_1), \Vdash P(a_2), \nVdash P(a_3)$$

$$w_2 \Vdash P(a_1), \nVdash P(a_2)$$

$$w_1 \nVdash P(a_1)$$

- $w \Vdash \neg\neg\varphi$ означает, что φ становится истинной, начиная с какого-то мира $u \in R(w)$.

Сдвиг двойного отрицания: контрмодель



$w_4 \Vdash P(a_1), \Vdash P(a_2), \Vdash P(a_3), \nVdash P(a_4)$

$w_3 \Vdash P(a_1), \Vdash P(a_2), \nVdash P(a_3)$

$w_2 \Vdash P(a_1), \nVdash P(a_2)$

$w_1 \nVdash P(a_1)$

- $w \Vdash \neg\neg\varphi$ означает, что φ становится истинной, начиная с какого-то мира $u \in R(w)$.
- $w_1 \Vdash \forall x\, \neg\neg P(x)$, но $w_1 \nVdash \neg\neg\forall x\, P(x)$.

Сдвиг двойного отрицания: конечные модели

- FO-Int $\nvdash \forall x \, \neg\neg P(x) \to \neg\neg\forall x \, P(x)$ (есть контрмодель)

Сдвиг двойного отрицания: конечные модели

- FO-Int $\nvdash \forall x\, \neg\neg P(x) \to \neg\neg\forall x\, P(x)$ (есть контрмодель)
- **Задача.** Докажите, что формула $\forall x\, \neg\neg P(x) \to \neg\neg\forall x\, P(x)$ истинна во всех моделях Крипке с конечным множеством миров W.

Сдвиг двойного отрицания: конечные модели

- FO-Int $\nVdash \forall x\, \neg\neg P(x) \to \neg\neg\forall x\, P(x)$ (есть контрмодель)
- **Задача.** Докажите, что формула $\forall x\, \neg\neg P(x) \to \neg\neg\forall x\, P(x)$ истинна во всех моделях Крипке с конечным множеством миров W.
- При этом предметные области D_w могут быть бесконечны.

Сдвиг двойного отрицания: конечные модели

- FO-Int $\nVdash \forall x\, \neg\neg P(x) \to \neg\neg\forall x\, P(x)$ (есть контрмодель)
- **Задача.** Докажите, что формула $\forall x\, \neg\neg P(x) \to \neg\neg\forall x\, P(x)$ истинна во всех моделях Крипке с конечным множеством миров W.
- При этом предметные области D_w могут быть бесконечны.
- **Следствие.** FO-Int, в отличие от интуиционистского исчисления высказываний Int, не обладает свойством конечных (в смысле количества миров) моделей.

Принцип постоянства области

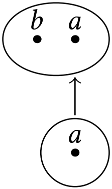
- Рассмотрим ещё одну невыводимую в FO-Int формулу: $\forall x\,(Q \vee P(x)) \to (Q \vee \forall x\, P(x))$.

Принцип постоянства области

- Рассмотрим ещё одну невыводимую в FO-Int формулу: $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$.
  - Здесь Q — 0-местный предикатный символ (пропозициональная константа).

Принцип постоянства области

- Рассмотрим ещё одну невыводимую в FO-Int формулу: $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\,P(x))$.
  - Здесь Q — 0-местный предикатный символ (пропозициональная константа).
- Контрмодель:



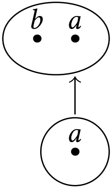
$v \Vdash P(a), \nVdash P(b), \Vdash Q$

$u \Vdash P(a), \nVdash Q$

$u \Vdash \forall x\,(Q \vee P(x))$,
но $u \nVdash Q$ и $u \nVdash \forall x\,P(x)$

Принцип постоянства области

- Рассмотрим ещё одну невыводимую в FO-Int формулу: $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\,P(x))$.
  - Здесь Q — 0-местный предикатный символ (пропозициональная константа).
- Контрмодель:



$v \Vdash P(a), \nVdash P(b), \Vdash Q$

$u \Vdash P(a), \nVdash Q$

$u \Vdash \forall x\,(Q \vee P(x))$,
но $u \nVdash Q$ и $u \nVdash \forall x\,P(x)$

- Но: для опровержения этой формулы важно, что $D_v \neq D_u$.

Принцип постоянства области

Теорема

Если в модели $\mathscr{M}$ *для всех* $u \in W$ *предметная область* D_u *одна и та же* ($\mathscr{D} = \mathrm{const}$)*, то* $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$ *для любого мира* $w \in W$*.*

- Возьмём любой $u \in R(w)$, и пусть $u \Vdash \forall x\,(Q \vee P(x))$.

Принцип постоянства области

Теорема

Если в модели $\mathscr{M}$ *для всех* $u \in W$ *предметная область* D_u *одна и та же (*$\mathscr{D} = \mathrm{const}$*), то* $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$ *для любого мира* $w \in W$*.*

- Возьмём любой $u \in R(w)$, и пусть $u \Vdash \forall x\,(Q \vee P(x))$.
- Если $u \Vdash Q$, то $u \Vdash Q \vee \forall x\, P(x)$.

Принцип постоянства области

Теорема

Если в модели $\mathscr{M}$ *для всех* $u \in W$ *предметная область* D_u *одна и та же* ($\mathscr{D} = \mathrm{const}$), *то* $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\,P(x))$ *для любого мира* $w \in W$.

- Возьмём любой $u \in R(w)$, и пусть $u \Vdash \forall x\,(Q \vee P(x))$.
- Если $u \Vdash Q$, то $u \Vdash Q \vee \forall x\,P(x)$.
- Иначе для каждого $a \in D_u$ имеем $u \Vdash P(a)$.

Принцип постоянства области

Теорема

Если в модели $\mathscr{M}$ *для всех* $u \in W$ *предметная область* D_u *одна и та же* ($\mathscr{D} = \mathrm{const}$), *то* $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$ *для любого мира* $w \in W$.

- Возьмём любой $u \in R(w)$, и пусть $u \Vdash \forall x\,(Q \vee P(x))$.
- Если $u \Vdash Q$, то $u \Vdash Q \vee \forall x\, P(x)$.
- Иначе для каждого $a \in D_u$ имеем $u \Vdash P(a)$.
- Значит, для любого $v \in R(u)$ и любого $a \in D_v = D_u$ будет $v \Vdash P(a)$ по монотонности. (Здесь важно, что не появляются новые элементы!)

Принцип постоянства области

Теорема

Если в модели $\mathscr{M}$ *для всех* $u \in W$ *предметная область* D_u *одна и та же* ($\mathscr{D} = \mathrm{const}$), *то* $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$ *для любого мира* $w \in W$.

- Возьмём любой $u \in R(w)$, и пусть $u \Vdash \forall x\,(Q \vee P(x))$.
- Если $u \Vdash Q$, то $u \Vdash Q \vee \forall x\, P(x)$.
- Иначе для каждого $a \in D_u$ имеем $u \Vdash P(a)$.
- Значит, для любого $v \in R(u)$ и любого $a \in D_v = D_u$ будет $v \Vdash P(a)$ по монотонности. (Здесь важно, что не появляются новые элементы!)
- Следовательно, $u \Vdash \forall x\, P(x)$.

Принцип постоянства области

Хотим и обратное утверждение: эта формула опровергается на любой шкале с непостоянными областями.

Принцип постоянства области

Хотим и обратное утверждение: эта формула опровергается на любой шкале с непостоянными областями.

Теорема

Если в шкале $\mathscr{F}$ *общезначима* $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\,P(x))$, *то для любых двух миров* u *и* v, *если* uRv, *то* $D_u = D_v$.

Принцип постоянства области

Хотим и обратное утверждение: эта формула опровергается на любой шкале с непостоянными областями.

Теорема

Если в шкале $\mathcal{F}$ общезначима $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\,P(x))$, то для любых двух миров u и v, если uRv, то $D_u = D_v$.

- Таким образом, если два мира w_1 и w_2 соединены неориентированным путём из стрелок, то $D_{w_1} = D_{w_2}$.

Принцип постоянства области

Хотим и обратное утверждение: эта формула опровергается на любой шкале с непостоянными областями.

Теорема

Если в шкале $\mathscr{F}$ *общезначима* $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$, *то для любых двух миров* u *и* v, *если* uRv, *то* $D_u = D_v$.

- Таким образом, если два мира w_1 и w_2 соединены неориентированным путём из стрелок, то $D_{w_1} = D_{w_2}$.
- Однако $\mathscr{F}$ может распасться на несколько компонент связности (*прямая сумма шкал*) с разными значениями $\mathscr{D}$.

Принцип постоянства области

Теорема

Если в шкале $\mathcal{F}$ *общезначима* $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$, *то для любых двух миров* u *и* v, *если* uRv, *то* $D_u = D_v$.

- Идея доказательства — та же, что и идея контрмодели.

Принцип постоянства области

Теорема

Если в шкале $\mathscr{F}$ общезначима $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$, то для любых двух миров u и v, если uRv, то $D_u = D_v$.

- Идея доказательства — та же, что и идея контрмодели.
- Пусть uRv, при этом $D_u \neq D_v$. Тогда $D_u \subsetneq D_v$.

Принцип постоянства области

Теорема

Если в шкале $\mathscr{F}$ *общезначима* $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\,P(x))$, *то для любых двух миров* u *и* v, *если* uRv, *то* $D_u = D_v$.

- Идея доказательства — та же, что и идея контрмодели.
- Пусть uRv, при этом $D_u \neq D_v$. Тогда $D_u \subsetneq D_v$.
- В частности, отсюда следует, что не vRu.

Принцип постоянства области

Теорема

Если в шкале $\mathscr{F}$ общезначима $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$, то для любых двух миров u и v, если uRv, то $D_u = D_v$.

- Идея доказательства — та же, что и идея контрмодели.
- Пусть uRv, при этом $D_u \neq D_v$. Тогда $D_u \subsetneq D_v$.
- В частности, отсюда следует, что не vRu.
- Возьмём $b \in D_v - D_u$.

Принцип постоянства области

Теорема

Если в шкале $\mathscr{F}$ общезначима $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$, то для любых двух миров u и v, если uRv, то $D_u = D_v$.

- Идея доказательства — та же, что и идея контрмодели.
- Пусть uRv, при этом $D_u \neq D_v$. Тогда $D_u \subsetneq D_v$.
- В частности, отсюда следует, что не vRu.
- Возьмём $b \in D_v - D_u$.
- Интерпретируем Q: $w \Vdash Q \iff w \in R(v)$ ($\Longrightarrow u \nVdash Q, v \Vdash Q$).

Принцип постоянства области

Теорема

Если в шкале $\mathscr{F}$ общезначима $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$, то для любых двух миров u и v, если uRv, то $D_u = D_v$.

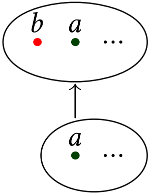
- Идея доказательства — та же, что и идея контрмодели.
- Пусть uRv, при этом $D_u \neq D_v$. Тогда $D_u \subsetneq D_v$.
- В частности, отсюда следует, что не vRu.
- Возьмём $b \in D_v - D_u$.
- Интерпретируем Q: $w \Vdash Q \iff w \in R(v)$ ($\Longrightarrow u \nVdash Q$, $v \Vdash Q$).
- Интерпретируем P: $w \nVdash P(b)$, если $w \in R(v)$; $w \Vdash P(a)$ во всех остальных случаях.

Принцип постоянства области

Теорема

Если в шкале $\mathscr{F}$ общезначима $\forall x\,(Q \lor P(x)) \longrightarrow (Q \lor \forall x\, P(x))$, то для любых двух миров u и v, если uRv, то $D_u = D_v$.

- Идея доказательства — та же, что и идея контрмодели.
- Пусть uRv, при этом $D_u \neq D_v$. Тогда $D_u \subsetneq D_v$.
- В частности, отсюда следует, что не vRu.
- Возьмём $b \in D_v - D_u$.
- Интерпретируем Q: $w \Vdash Q \iff w \in R(v)$ ($\Longrightarrow u \nVdash Q$, $v \Vdash Q$).
- Интерпретируем P: $w \nVdash P(b)$, если $w \in R(v)$; $w \Vdash P(a)$ во всех остальных случаях.
-



$v \Vdash P(a), \nVdash P(b), \Vdash Q;$ то же для любого $w \in R(v)$

$u \Vdash P(a), \nVdash Q;$ то же для любого $w \notin R(v)$

Принцип постоянства области и BHK-семантика

- «Наивная» BHK-семантика — понимаем «общий метод» как функцию в теоретико-множественном смысле.

Принцип постоянства области и BHK-семантика

- «Наивная» BHK-семантика — понимаем «общий метод» как функцию в теоретико-множественном смысле.
- При такой интерпретации принцип постоянства области $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$ оказывается истинным.

Принцип постоянства области и ВНК-семантика

- «Наивная» ВНК-семантика — понимаем «общий метод» как функцию в теоретико-множественном смысле.
- При такой интерпретации принцип постоянства области $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$ оказывается истинным.
- Действительно, в левой части дана функция $f : a \mapsto \langle i, v \rangle$, где либо $i = 1$ и $v : Q$, либо $i = 2$ и $v : P(a)$.

Принцип постоянства области и BHK-семантика

- «Наивная» BHK-семантика — понимаем «общий метод» как функцию в теоретико-множественном смысле.
- При такой интерпретации принцип постоянства области $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$ оказывается истинным.
- Действительно, в левой части дана функция $f : a \mapsto \langle i, v\rangle$, где либо $i = 1$ и $v : Q$, либо $i = 2$ и $v : P(a)$.
- Определим «общий метод» h для нашей формулы так:

$$h(f) = \begin{cases} \langle 1, v\rangle & \text{если } f(a_0) = \langle 1, v\rangle \text{ для какого-то } a_0 \\ \langle 2, \pi_2 \circ f\rangle & \text{если } \pi_1(f(a)) = 2 \text{ для любого } a \end{cases}$$

Принцип постоянства области и BHK-семантика

- «Наивная» BHK-семантика — понимаем «общий метод» как функцию в теоретико-множественном смысле.
- При такой интерпретации принцип постоянства области $\forall x\,(Q \vee P(x)) \longrightarrow (Q \vee \forall x\, P(x))$ оказывается истинным.
- Действительно, в левой части дана функция $f : a \mapsto \langle i, v \rangle$, где либо $i = 1$ и $v : Q$, либо $i = 2$ и $v : P(a)$.
- Определим «общий метод» h для нашей формулы так:

$$h(f) = \begin{cases} \langle 1, v \rangle & \text{если } f(a_0) = \langle 1, v \rangle \text{ для какого-то } a_0 \\ \langle 2, \pi_2 \circ f \rangle & \text{если } \pi_1(f(a)) = 2 \text{ для любого } a \end{cases}$$

- Чтобы принцип постоянства области не выполнялся, нужно уточнить BHK-семантику, придав ей «вычислительное» звучание (к примеру, как в соответствии Карри – Говарда).