Спецкурс «Математическая логика», часть 2

Лекция 9 (09.04.2020)
Интуиционистская логика первого порядка. Теорема о полноте по Крипке

С. Л. Кузнецов

МГУ имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
весенний семестр 2019–2020 учебного года

Интуиционистское исчисление предикатов (FO-Int)

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \xi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \xi))$
3. $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
4. $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
5. $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$
6. $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
7. $\psi \to (\varphi \vee \psi)$
8. $(\varphi \to \xi) \to ((\psi \to \xi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \xi))$
9. $\bot \to \varphi$
10. $\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(t)$, если подстановка терма t вместо x допустима (свободна)
11. $\varphi(t) \to \exists x\, \varphi(x)$, если подстановка терма t вместо x допустима (свободна)
12. $\forall x\, (\psi \to \varphi(x)) \to (\psi \to \forall x\, \varphi(x))$, если x не входит свободно в ψ
13. $\forall x\, (\varphi(x) \to \psi) \to ((\exists x\, \varphi(x)) \to \psi)$, если x не входит свободно в ψ

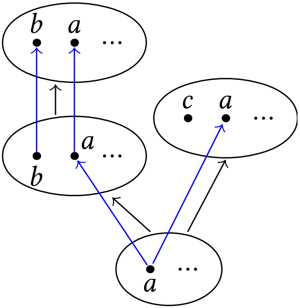
$$\boxed{\neg\varphi \leftrightharpoons (\varphi \to \bot)}$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

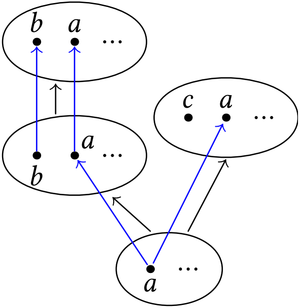
$$\frac{\psi(x)}{\forall y\, \psi(y)}$$

если подстановка y вместо x допустима (свободна)

Модели Крипке для FO-Int

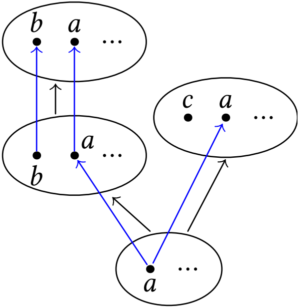


Модели Крипке для FO-Int



- $\vee$, $\wedge$, $\bot$, $\exists$ интерпретируются локально.
- Для истинности $\to$ и $\forall$ в мире w нужно проверять во всех мирах $u \in R(w)$.

Модели Крипке для FO-Int



- $\vee$, $\wedge$, $\bot$, $\exists$ интерпретируются локально.
- Для истинности $\to$ и $\forall$ в мире w нужно проверять во всех мирах $u \in R(w)$.
- Так устанавливается монотонность: если что-то истинно в w и $w\,R\,u$, то это истинно и в u.

Теорема о полноте

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке, то она доказуема в FO-Int.

Теорема о полноте

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке, то она доказуема в FO-Int.

Идея доказательства:

Теорема о полноте

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке, то она доказуема в FO-Int.

Идея доказательства:

- Пусть $\nvdash \varphi$, нужно построить *контрмодель:* $\mathscr{M}, w \nVdash \varphi$.

Теорема о полноте

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке, то она доказуема в FO-Int.

Идея доказательства:

- Пусть $\nvdash \varphi$, нужно построить *контрмодель:* $\mathscr{M}, w \nVdash \varphi$.
- Полнота классической логики предикатов (по Хенкину): строим полную и экзистенциально полную теорию, содержащую $\neg\varphi$.

Теорема о полноте

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке, то она доказуема в FO-Int.

Идея доказательства:

- Пусть $\nvdash \varphi$, нужно построить *контрмодель:* $\mathscr{M}, w \nVdash \varphi$.
- Полнота классической логики предикатов (по Хенкину): строим полную и экзистенциально полную теорию, содержащую $\neg\varphi$.
- Полнота интуиционистской логики высказываний: строим *каноническую модель Крипке* из полных теорий.

Теорема о полноте

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке, то она доказуема в FO-Int.

Идея доказательства:

- Пусть $\nvdash \varphi$, нужно построить *контрмодель:* $\mathscr{M}, w \nVdash \varphi$.
- Полнота классической логики предикатов (по Хенкину): строим полную и экзистенциально полную теорию, содержащую $\neg\varphi$.
- Полнота интуиционистской логики высказываний: строим *каноническую модель Крипке* из полных теорий.
- Комбинация: строим каноническую модель для FO-Int из полных и экзистенциально полных теорий.

Би-теории

- Интуиционистское отрицание слишком сильное: из $\nvdash \varphi$ не следует непротиворечивость $\{\neg \varphi\}$.

Би-теории

- Интуиционистское отрицание слишком сильное: из $\nvdash \varphi$ не следует непротиворечивость $\{\neg\varphi\}$.
  - Пример: $\nvdash (P \vee \neg P)$, но $\neg(P \vee \neg P) \vdash \bot$, т.к. $\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)$.

Би-теории

- Интуиционистское отрицание слишком сильное: из $\nvdash \varphi$ не следует непротиворечивость $\{\neg\varphi\}$.
  - Пример: $\nvdash (P \vee \neg P)$, но $\neg(P \vee \neg P) \vdash \bot$, т.к. $\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)$.
  - В моделях Крипке: $w \Vdash \neg\varphi$ сильнее, чем $w \nVdash \varphi$.

Би-теории

- Интуиционистское отрицание слишком сильное: из $\nvdash \varphi$ не следует непротиворечивость $\{\neg\varphi\}$.
  - Пример: $\nvdash (P \vee \neg P)$, но $\neg(P \vee \neg P) \vdash \bot$, т.к. $\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)$.
  - В моделях Крипке: $w \Vdash \neg\varphi$ сильнее, чем $w \nVdash \varphi$.
- Поэтому удобно рассматривать теории как пары из «положительного» и «отрицательного» множеств формул.

Би-теории

- Интуиционистское отрицание слишком сильное: из $\nvdash \varphi$ не следует непротиворечивость $\{\neg\varphi\}$.
  - Пример: $\nvdash (P \vee \neg P)$, но $\neg(P \vee \neg P) \vdash \bot$, т.к. $\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)$.
  - В моделях Крипке: $w \Vdash \neg\varphi$ сильнее, чем $w \nVdash \varphi$.
- Поэтому удобно рассматривать теории как пары из «положительного» и «отрицательного» множеств формул.
- У нас нет постоянства области, поэтому множества хенкиновских констант могут быть разными.

Би-теории

- Интуиционистское отрицание слишком сильное: из $\nvdash \varphi$ не следует непротиворечивость $\{\neg\varphi\}$.
  - Пример: $\nvdash (P \vee \neg P)$, но $\neg(P \vee \neg P) \vdash \bot$, т.к. $\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)$.
  - В моделях Крипке: $w \Vdash \neg\varphi$ сильнее, чем $w \nVdash \varphi$.
- Поэтому удобно рассматривать теории как пары из «положительного» и «отрицательного» множеств формул.
- У нас нет постоянства области, поэтому множества хенкиновских констант могут быть разными.
- **Определение.** *Би-теория* — это тройка $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$, где $S \subseteq \hat{S}$ — множество дополнительных констант, а Γ и Δ — множества замкнутых формул в сигнатуре $\Omega + S$.

Би-теории

- Интуиционистское отрицание слишком сильное: из $\nvdash \varphi$ не следует непротиворечивость $\{\neg\varphi\}$.
  - Пример: $\nvdash (P \vee \neg P)$, но $\neg(P \vee \neg P) \vdash \bot$, т.к. $\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)$.
  - В моделях Крипке: $w \Vdash \neg\varphi$ сильнее, чем $w \nVdash \varphi$.
- Поэтому удобно рассматривать теории как пары из «положительного» и «отрицательного» множеств формул.
- У нас нет постоянства области, поэтому множества хенкиновских констант могут быть разными.
- **Определение.** *Би-теория* — это тройка $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$, где $S \subseteq \hat{S}$ — множество дополнительных констант, а Γ и Δ — множества замкнутых формул в сигнатуре $\Omega + S$.
  - $\hat{S}$ — фиксированное счётное множество («запас констант»).

Би-теории

- Интуиционистское отрицание слишком сильное: из $\nvdash \varphi$ не следует непротиворечивость $\{\neg \varphi\}$.
  - Пример: $\nvdash (P \vee \neg P)$, но $\neg(P \vee \neg P) \vdash \bot$, т.к. $\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)$.
  - В моделях Крипке: $w \Vdash \neg \varphi$ сильнее, чем $w \nVdash \varphi$.
- Поэтому удобно рассматривать теории как пары из «положительного» и «отрицательного» множеств формул.
- У нас нет постоянства области, поэтому множества хенкиновских констант могут быть разными.
- **Определение.** *Би-теория* — это тройка $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$, где $S \subseteq \hat{S}$ — множество дополнительных констант, а Γ и Δ — множества замкнутых формул в сигнатуре $\Omega + S$.
  - $\hat{S}$ — фиксированное счётное множество («запас констант»).
  - Считаем $\mathrm{Cnst}_\Omega \subset S$ для любой би-теории.

Би-теории

- Интуиционистское отрицание слишком сильное: из $\nvdash \varphi$ не следует непротиворечивость $\{\neg \varphi\}$.
  - Пример: $\nvdash (P \vee \neg P)$, но $\neg(P \vee \neg P) \vdash \bot$, т.к. $\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)$.
  - В моделях Крипке: $w \Vdash \neg \varphi$ сильнее, чем $w \nVdash \varphi$.
- Поэтому удобно рассматривать теории как пары из «положительного» и «отрицательного» множеств формул.
- У нас нет постоянства области, поэтому множества хенкиновских констант могут быть разными.
- **Определение.** *Би-теория* — это тройка $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$, где $S \subseteq \hat{S}$ — множество дополнительных констант, а Γ и Δ — множества замкнутых формул в сигнатуре $\Omega + S$.
  - $\hat{S}$ — фиксированное счётное множество («запас констант»).
  - Считаем $\mathrm{Cnst}_\Omega \subset S$ для любой би-теории.
  - Би-теории (с некоторыми свойствами полноты) будут мирами канонической модели.

Би-теории

- Интуиционистское отрицание слишком сильное: из $\nvdash \varphi$ не следует непротиворечивость $\{\neg \varphi\}$.
  - Пример: $\nvdash (P \vee \neg P)$, но $\neg(P \vee \neg P) \vdash \bot$, т.к. $\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)$.
  - В моделях Крипке: $w \Vdash \neg \varphi$ сильнее, чем $w \nVdash \varphi$.
- Поэтому удобно рассматривать теории как пары из «положительного» и «отрицательного» множеств формул.
- У нас нет постоянства области, поэтому множества хенкиновских констант могут быть разными.
- **Определение.** *Би-теория* — это тройка $\langle S, \Gamma, \Delta\rangle$, где $S \subseteq \hat{S}$ — множество дополнительных констант, а Γ и Δ — множества замкнутых формул в сигнатуре $\Omega + S$.
  - $\hat{S}$ — фиксированное счётное множество («запас констант»).
  - Считаем $\mathrm{Cnst}_\Omega \subset S$ для любой би-теории.
  - Би-теории (с некоторыми свойствами полноты) будут мирами канонической модели.
  - Хотим, чтобы в мире $\langle S, \Gamma, \Delta\rangle$ были истинны формулы из Γ и не истинны формулы из Δ.

Виды би-теорий

Би-теория $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ называется…

- … *непротиворечивой*, если $\nvdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta'$ для любых конечных $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$.

Виды би-теорий

Би-теория $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ называется...

- ... *непротиворечивой,* если $\nvdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta'$ для любых конечных $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$.
  - $\bigwedge \varnothing = \top$, $\bigvee \varnothing = \bot$.

Виды би-теорий

Би-теория $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ называется...

- ... *непротиворечивой,* если $\nvdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta'$ для любых конечных $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$.
  - $\bigwedge \varnothing = \top$, $\bigvee \varnothing = \bot$.
- ... *полной,* если $\Gamma \cup \Delta = \mathrm{CFm}_{\Omega+S}$.

Виды би-теорий

Би-теория $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ называется...

- ... *непротиворечивой*, если $\nvdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta'$ для любых конечных $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$.
  - $\bigwedge \varnothing = \top$, $\bigvee \varnothing = \bot$.
- ... *полной*, если $\Gamma \cup \Delta = \mathrm{CFm}_{\Omega+S}$.
- ... экзистенциально полной ($\exists$-*полной*), если для каждой формулы $\exists x\, \psi(x) \in \Gamma$ существует такая $a \in S$, что $\psi(a) \in \Gamma$.

Виды би-теорий

Би-теория $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ называется...

- ... *непротиворечивой*, если $\nvdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta'$ для любых конечных $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$.
  - $\bigwedge \varnothing = \top$, $\bigvee \varnothing = \bot$.
- ... *полной*, если $\Gamma \cup \Delta = \mathrm{CFm}_{\Omega+S}$.
- ... экзистенциально полной ($\exists$-*полной*), если для каждой формулы $\exists x\, \psi(x) \in \Gamma$ существует такая $a \in S$, что $\psi(a) \in \Gamma$.
- ... *малой*, если множество $\hat{S} - S$ бесконечно.

Виды би-теорий

Би-теория $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ называется...

- ... *непротиворечивой*, если $\nvdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta'$ для любых конечных $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$.
  - $\bigwedge \varnothing = \top$, $\bigvee \varnothing = \bot$.
- ... *полной*, если $\Gamma \cup \Delta = \mathrm{CFm}_{\Omega+S}$.
- ... экзистенциально полной ($\exists$-*полной*), если для каждой формулы $\exists x\, \psi(x) \in \Gamma$ существует такая $a \in S$, что $\psi(a) \in \Gamma$.
- ... *малой*, если множество $\hat{S} - S$ бесконечно.

Мирами канонической модели будут би-теории, обладающие всеми 4 свойствами.

Свойства полных непротиворечивых би-теорий

Пусть $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ — полная непротиворечивая би-теория.

- Дедуктивная замкнутость: если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\varphi \in \Gamma$.

Свойства полных непротиворечивых би-теорий

Пусть $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ — полная непротиворечивая би-теория.

- Дедуктивная замкнутость: если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\varphi \in \Gamma$.
  - Если $\varphi \notin \Gamma$, то $\varphi \in \Delta$, но по теореме дедукции $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \{\varphi\}$.

Свойства полных непротиворечивых би-теорий

Пусть $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ — полная непротиворечивая би-теория.

- Дедуктивная замкнутость: если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\varphi \in \Gamma$.
  - Если $\varphi \notin \Gamma$, то $\varphi \in \Delta$, но по теореме дедукции $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \{\varphi\}$.
- $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma \iff \big(\varphi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma\big)$.

Свойства полных непротиворечивых би-теорий

Пусть $\langle S, \Gamma, \Delta\rangle$ — полная непротиворечивая би-теория.

- Дедуктивная замкнутость: если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\varphi \in \Gamma$.
  - Если $\varphi \notin \Gamma$, то $\varphi \in \Delta$, но по теореме дедукции $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \{\varphi\}$.
- $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma \iff \big(\varphi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma\big)$.
  - По дедуктивной замкнутости, с помощью аксиом $\varphi \wedge \psi \to \varphi$, $\varphi \wedge \psi \to \psi$, $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$.

Свойства полных непротиворечивых би-теорий

Пусть $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ — полная непротиворечивая би-теория.

- Дедуктивная замкнутость: если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\varphi \in \Gamma$.
  - Если $\varphi \notin \Gamma$, то $\varphi \in \Delta$, но по теореме дедукции $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \{\varphi\}$.
- $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma \iff \big(\varphi \in \Gamma \text{ и } \psi \in \Gamma\big)$.
  - По дедуктивной замкнутости, с помощью аксиом $\varphi \wedge \psi \to \varphi$, $\varphi \wedge \psi \to \psi$, $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$.
- Дизъюнктивность: $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma \iff \big(\varphi \in \Gamma \text{ или } \psi \in \Gamma\big)$.

Свойства полных непротиворечивых би-теорий

Пусть $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ — полная непротиворечивая би-теория.

- Дедуктивная замкнутость: если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\varphi \in \Gamma$.
  - Если $\varphi \notin \Gamma$, то $\varphi \in \Delta$, но по теореме дедукции $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \{\varphi\}$.
- $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma \iff \big(\varphi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma\big)$.
  - По дедуктивной замкнутости, с помощью аксиом $\varphi \wedge \psi \to \varphi$, $\varphi \wedge \psi \to \psi$, $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$.
- Дизъюнктивность: $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma \iff \big(\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma\big)$.
  - $\Leftarrow$: по аксиомам $\varphi \to \varphi \vee \psi$ и $\psi \to \varphi \vee \psi$.

Свойства полных непротиворечивых би-теорий

Пусть $\langle S, \Gamma, \Delta\rangle$ — полная непротиворечивая би-теория.

- Дедуктивная замкнутость: если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\varphi \in \Gamma$.
  - Если $\varphi \notin \Gamma$, то $\varphi \in \Delta$, но по теореме дедукции $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee\{\varphi\}$.
- $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma \iff \big(\varphi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma\big)$.
  - По дедуктивной замкнутости, с помощью аксиом $\varphi \wedge \psi \to \varphi$, $\varphi \wedge \psi \to \psi$, $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$.
- Дизъюнктивность: $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma \iff \big(\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma\big)$.
  - $\Leftarrow$: по аксиомам $\varphi \to \varphi \vee \psi$ и $\psi \to \varphi \vee \psi$.
  - $\Rightarrow$: пусть $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, но $\varphi, \psi \in \Delta$. Противоречие с непротиворечивостью: $\vdash \bigwedge\{\varphi \vee \psi\} \to \bigvee\{\varphi, \psi\}$.

Свойства полных непротиворечивых би-теорий

Пусть $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ — полная непротиворечивая би-теория.

- Дедуктивная замкнутость: если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\varphi \in \Gamma$.
  - Если $\varphi \notin \Gamma$, то $\varphi \in \Delta$, но по теореме дедукции $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \{\varphi\}$.
- $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma \iff \big(\varphi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma\big)$.
  - По дедуктивной замкнутости, с помощью аксиом $\varphi \wedge \psi \to \varphi$, $\varphi \wedge \psi \to \psi$, $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$.
- Дизъюнктивность: $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma \iff \big(\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma\big)$.
  - $\Longleftarrow$: по аксиомам $\varphi \to \varphi \vee \psi$ и $\psi \to \varphi \vee \psi$.
  - $\Longrightarrow$: пусть $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, но $\varphi, \psi \in \Delta$. Противоречие с непротиворечивостью: $\vdash \bigwedge\{\varphi \vee \psi\} \to \bigvee\{\varphi, \psi\}$.
- Если $\forall x\, \psi(x) \in \Gamma$, то $\psi(a) \in \Gamma$ для любого $a \in S$.

Свойства полных непротиворечивых би-теорий

Пусть $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ — полная непротиворечивая би-теория.

- Дедуктивная замкнутость: если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\varphi \in \Gamma$.
  - Если $\varphi \notin \Gamma$, то $\varphi \in \Delta$, но по теореме дедукции $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \{\varphi\}$.
- $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma \iff \big(\varphi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma\big)$.
  - По дедуктивной замкнутости, с помощью аксиом $\varphi \wedge \psi \to \varphi$, $\varphi \wedge \psi \to \psi$, $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$.
- Дизъюнктивность: $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma \iff \big(\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma\big)$.
  - $\Leftarrow$: по аксиомам $\varphi \to \varphi \vee \psi$ и $\psi \to \varphi \vee \psi$.
  - $\Rightarrow$: пусть $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, но $\varphi, \psi \in \Delta$. Противоречие с непротиворечивостью: $\vdash \bigwedge\{\varphi \vee \psi\} \to \bigvee\{\varphi, \psi\}$.
- Если $\forall x\, \psi(x) \in \Gamma$, то $\psi(a) \in \Gamma$ для любого $a \in S$.
  - По аксиоме $\forall x\, \psi(x) \to \psi(a)$.

Свойства полных непротиворечивых би-теорий

Пусть $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ — полная непротиворечивая би-теория.

- Дедуктивная замкнутость: если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\varphi \in \Gamma$.
  - Если $\varphi \notin \Gamma$, то $\varphi \in \Delta$, но по теореме дедукции $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \{\varphi\}$.
- $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma \iff \big(\varphi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma\big)$.
  - По дедуктивной замкнутости, с помощью аксиом $\varphi \wedge \psi \to \varphi$, $\varphi \wedge \psi \to \psi$, $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$.
- Дизъюнктивность: $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma \iff \big(\varphi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma\big)$.
  - $\Longleftarrow$: по аксиомам $\varphi \to \varphi \vee \psi$ и $\psi \to \varphi \vee \psi$.
  - $\Longrightarrow$: пусть $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, но $\varphi, \psi \in \Delta$. Противоречие с непротиворечивостью: $\vdash \bigwedge\{\varphi \vee \psi\} \to \bigvee\{\varphi, \psi\}$.
- Если $\forall x\, \psi(x) \in \Gamma$, то $\psi(a) \in \Gamma$ для любого $a \in S$.
  - По аксиоме $\forall x\, \psi(x) \to \psi(a)$.

Заметим, что здесь нет условия для $\exists$ (за это отвечает $\exists$-полнота), а условия для $\to$ и $\forall$ сформулированы в одну сторону (их истинность в модели Крипке определяется нелокально).

Каноническая модель

$\mathscr{M}_C = \langle W_C, R_C, \mathscr{D}_C, \alpha_C \rangle$, где:

Каноническая модель

$\mathscr{M}_C = \langle W_C, R_C, \mathscr{D}_C, \alpha_C \rangle$, где:

- W_C — множество всех непротиворечивых полных $\exists$-полных малых би-теорий;

Каноническая модель

$\mathscr{M}_C = \langle W_C, R_C, \mathscr{D}_C, \alpha_C \rangle$, где:

- W_C — множество всех непротиворечивых полных $\exists$-полных малых би-теорий;
- $\langle S_1, \Gamma_1, \Delta_1 \rangle \, R_C \, \langle S_2, \Gamma_2, \Delta_2 \rangle \iff S_1 \subseteq S_2$ и $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$;

Каноническая модель

$\mathscr{M}_C = \langle W_C, R_C, \mathscr{D}_C, \alpha_C \rangle$, где:

- W_C — множество всех непротиворечивых полных $\exists$-полных малых би-теорий;
- $\langle S_1, \Gamma_1, \Delta_1 \rangle \, R_C \, \langle S_2, \Gamma_2, \Delta_2 \rangle \iff S_1 \subseteq S_2$ и $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$;
  - **Вопрос.** Можно ли сказать что-то про Δ_1 и Δ_2?

Каноническая модель

$\mathscr{M}_C = \langle W_C, R_C, \mathscr{D}_C, \alpha_C \rangle$, где:

- W_C — множество всех непротиворечивых полных $\exists$-полных малых би-теорий;
- $\langle S_1, \Gamma_1, \Delta_1 \rangle \, R_C \, \langle S_2, \Gamma_2, \Delta_2 \rangle \iff S_1 \subseteq S_2$ и $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$;
  - **Вопрос.** Можно ли сказать что-то про Δ_1 и Δ_2?
- $D_{\langle S, \Gamma, \Delta \rangle} = S$; (если би-теория $\exists$-полна, то $S \neq \varnothing$)

Каноническая модель

$\mathscr{M}_C = \langle W_C, R_C, \mathscr{D}_C, \alpha_C \rangle$, где:

- W_C — множество всех непротиворечивых полных $\exists$-полных малых би-теорий;
- $\langle S_1, \Gamma_1, \Delta_1 \rangle \, R_C \, \langle S_2, \Gamma_2, \Delta_2 \rangle \iff S_1 \subseteq S_2$ и $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$;
  - **Вопрос.** Можно ли сказать что-то про Δ_1 и Δ_2?
- $D_{\langle S, \Gamma, \Delta \rangle} = S$; (если би-теория $\exists$-полна, то $S \neq \varnothing$)
- $\alpha_C(c) = c$ для $c \in S$;
- $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash P(c_1, \dots, c_{\nu(P)})$, если $P(\vec{c}) \in \Gamma$.

Каноническая модель

$\mathscr{M}_C = \langle W_C, R_C, \mathscr{D}_C, \alpha_C \rangle$, где:

- W_C — множество всех непротиворечивых полных $\exists$-полных малых би-теорий;
- $\langle S_1, \Gamma_1, \Delta_1 \rangle \, R_C \, \langle S_2, \Gamma_2, \Delta_2 \rangle \iff S_1 \subseteq S_2$ и $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$;
  - **Вопрос.** Можно ли сказать что-то про Δ_1 и Δ_2?
- $D_{\langle S, \Gamma, \Delta \rangle} = S$; (если би-теория $\exists$-полна, то $S \neq \varnothing$)
- $\alpha_C(c) = c$ для $c \in S$;
- $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash P(c_1, \dots, c_{\nu(P)})$, если $P(\vec{c}) \in \Gamma$.

Основная семантическая лемма

$\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma$.

Лемма о насыщении

Всякая непротиворечивая малая би-теория может быть расширена до мира $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \in W_C$.

Каноническая модель

$\mathscr{M}_C = \langle W_C, R_C, \mathscr{D}_C, \alpha_C \rangle$, где:

- W_C — множество всех непротиворечивых полных $\exists$-полных малых би-теорий;
- $\langle S_1, \Gamma_1, \Delta_1 \rangle \, R_C \, \langle S_2, \Gamma_2, \Delta_2 \rangle \iff S_1 \subseteq S_2$ и $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$;
  - **Вопрос.** Можно ли сказать что-то про Δ_1 и Δ_2?
- $D_{\langle S, \Gamma, \Delta \rangle} = S;$ (если би-теория $\exists$-полна, то $S \neq \varnothing$)
- $\alpha_C(c) = c$ для $c \in S$;
- $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash P(c_1, \ldots, c_{\nu(P)})$, если $P(\vec{c}) \in \Gamma$.

Основная семантическая лемма

$\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma$.

Лемма о насыщении

Всякая непротиворечивая малая би-теория может быть расширена до мира $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \in W_C$.

Если $\nvdash \varphi$, то расширим би-теорию $\langle \mathrm{Cnst}_\Omega, \varnothing, \{\varphi\} \rangle$ до мира $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi$.

Лемма о насыщении

Лемма

Если $\langle S_0, \Gamma_0, \Delta_0 \rangle$ *— непротиворечивая малая би-теория, то существует такая непротиворечивая малая полная* $\exists$*-полная би-теория* $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$*, что* $S_0 \subseteq S$*,* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$*,* $\Delta_0 \subseteq \Delta$*.*

- Возьмём S такое, что $S - S_0$ и $\hat{S} - S$ бесконечны.

Лемма о насыщении

Лемма

Если $\langle S_0, \Gamma_0, \Delta_0 \rangle$ *— непротиворечивая малая би-теория, то существует такая непротиворечивая малая полная* $\exists$*-полная би-теория* $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$*, что* $S_0 \subseteq S$*,* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$*,* $\Delta_0 \subseteq \Delta$*.*

- Возьмём S такое, что $S - S_0$ и $\hat{S} - S$ бесконечны.
- Пусть $\mathrm{CFm}_{\Omega+S} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.

Лемма о насыщении

Лемма

Если $\langle S_0, \Gamma_0, \Delta_0 \rangle$ *— непротиворечивая малая би-теория, то существует такая непротиворечивая малая полная* $\exists$*-полная би-теория* $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$, *что* $S_0 \subseteq S$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\Delta_0 \subseteq \Delta$.

- Возьмём S такое, что $S - S_0$ и $\hat{S} - S$ бесконечны.
- Пусть $\mathrm{CFm}_{\Omega+S} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$.
- Строим $\langle S, \Gamma_k, \Delta_k \rangle$ из $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \rangle$ $(k \geqslant 1)$:

Лемма о насыщении

Лемма

Если $\langle S_0, \Gamma_0, \Delta_0 \rangle$ — непротиворечивая малая би-теория, то существует такая непротиворечивая малая полная ∃-полная би-теория $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$, что $S_0 \subseteq S$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\Delta_0 \subseteq \Delta$.

- Возьмём S такое, что $S - S_0$ и $\hat{S} - S$ бесконечны.
- Пусть $\mathrm{CFm}_{\Omega+S} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$.
- Строим $\langle S, \Gamma_k, \Delta_k \rangle$ из $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \rangle$ $(k \geqslant 1)$:
    1. φ_k не имеет вид $\exists x\, \psi(x)$. Одна из $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi\}, \Delta_{k-1} \rangle$ и $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi\} \rangle$ непротиворечива. Это будет $\langle S, \Gamma_k, \Delta_k \rangle$.

Лемма о насыщении

Лемма

Если $\langle S_0, \Gamma_0, \Delta_0 \rangle$ *— непротиворечивая малая би-теория, то существует такая непротиворечивая малая полная* $\exists$*-полная би-теория* $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$*, что* $S_0 \subseteq S$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\Delta_0 \subseteq \Delta$.

- Возьмём S такое, что $S - S_0$ и $\hat{S} - S$ бесконечны.
- Пусть $\mathrm{CFm}_{\Omega+S} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.
- Строим $\langle S, \Gamma_k, \Delta_k \rangle$ из $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \rangle$ $(k \geqslant 1)$:
    1. φ_k не имеет вид $\exists x\, \psi(x)$. Одна из $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi\}, \Delta_{k-1} \rangle$ и $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi\} \rangle$ непротиворечива. Это будет $\langle S, \Gamma_k, \Delta_k \rangle$.
    2. $\varphi_k = \exists x\, \psi(x)$. Тогда берём либо $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x)\} \rangle$, если она непротиворечива, либо $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x), \psi(a)\}, \Delta_{k-1} \rangle$, где a — константа, не использовавшаяся в Γ_{k-1} и Δ_{k-1}.

Лемма о насыщении

- Почему $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1}\rangle$ или $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}\rangle$ непротиворечива?

Лемма о насыщении

- Почему $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1}\rangle$ или $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}\rangle$ непротиворечива?
  - Иначе $\vdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta' \vee \varphi_k$ и $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge \varphi_k \longrightarrow \bigvee \Delta'$, откуда $\vdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta'$.

Лемма о насыщении

- Почему $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1}\rangle$ или $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}\rangle$ непротиворечива?
  - Иначе $\vdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta' \vee \varphi_k$ и $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge \varphi_k \longrightarrow \bigvee \Delta'$, откуда $\vdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta'$.
- Почему можем выбрать «свежую» константу a?

Лемма о насыщении

- Почему $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1}\rangle$ или $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}\rangle$ непротиворечива?
  - Иначе $\vdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta' \vee \varphi_k$ и $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge \varphi_k \longrightarrow \bigvee \Delta'$, откуда $\vdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta'$.
- Почему можем выбрать «свежую» константу a?
  - $S - S_0$ бесконечно, а Γ_{k-1} и Δ_{k-1} отличаются от Γ_0 и Δ_0 добавлением конечного числа формул.

Лемма о насыщении

- Почему $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1}\rangle$ или $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}\rangle$ непротиворечива?
  - Иначе $\vdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta' \vee \varphi_k$ и $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge \varphi_k \longrightarrow \bigvee \Delta'$, откуда $\vdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta'$.
- Почему можем выбрать «свежую» константу a?
  - $S - S_0$ бесконечно, а Γ_{k-1} и Δ_{k-1} отличаются от Γ_0 и Δ_0 добавлением конечного числа формул.
- Если $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ непротиворечива, то $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x), \psi(a)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ тоже непротиворечива.

Лемма о насыщении

- Почему $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1}\rangle$ или $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}\rangle$ непротиворечива?
  - Иначе $\vdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta' \vee \varphi_k$ и $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge \varphi_k \longrightarrow \bigvee \Delta'$, откуда $\vdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta'$.
- Почему можем выбрать «свежую» константу a?
  - $S - S_0$ бесконечно, а Γ_{k-1} и Δ_{k-1} отличаются от Γ_0 и Δ_0 добавлением конечного числа формул.
- Если $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ непротиворечива, то $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x), \psi(a)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ тоже непротиворечива.
  - Свойство свежей константы: если $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge \psi(a) \longrightarrow \bigvee \Delta'$, то $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge \psi(y) \longrightarrow \bigvee \Delta'$ (y — новая переменная).

Лемма о насыщении

- Почему $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1}\rangle$ или $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}\rangle$ непротиворечива?
  - Иначе $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee \varphi_k$ и $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge \varphi_k \to \bigvee \Delta'$, откуда $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta'$.
- Почему можем выбрать «свежую» константу a?
  - $S - S_0$ бесконечно, а Γ_{k-1} и Δ_{k-1} отличаются от Γ_0 и Δ_0 добавлением конечного числа формул.
- Если $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ непротиворечива, то $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x), \psi(a)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ тоже непротиворечива.
  - Свойство свежей константы: если $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge \psi(a) \to \bigvee \Delta'$, то $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge \psi(y) \to \bigvee \Delta'$ (y — новая переменная).
  - $\vdash \forall y \left(\bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge \psi(y) \to \bigvee \Delta'\right)$

Лемма о насыщении

- Почему $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1}\rangle$ или $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}\rangle$ непротиворечива?
  - Иначе $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee \varphi_k$ и $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge \varphi_k \to \bigvee \Delta'$, откуда $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta'$.
- Почему можем выбрать «свежую» константу a?
  - $S - S_0$ бесконечно, а Γ_{k-1} и Δ_{k-1} отличаются от Γ_0 и Δ_0 добавлением конечного числа формул.
- Если $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ непротиворечива, то $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x), \psi(a)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ тоже непротиворечива.
  - Свойство свежей константы: если $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge \psi(a) \to \bigvee \Delta'$, то $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge \psi(y) \to \bigvee \Delta'$ (y — новая переменная).
  - $\vdash \forall y \left(\bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge \psi(y) \to \bigvee \Delta'\right)$
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge (\exists y\, \psi(y)) \to \bigvee \Delta'$

Лемма о насыщении

- Почему $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1}\rangle$ или $\langle S, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}\rangle$ непротиворечива?
  - Иначе $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee \varphi_k$ и $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge \varphi_k \to \bigvee \Delta'$, откуда $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta'$.
- Почему можем выбрать «свежую» константу a?
  - $S - S_0$ бесконечно, а Γ_{k-1} и Δ_{k-1} отличаются от Γ_0 и Δ_0 добавлением конечного числа формул.
- Если $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ непротиворечива, то $\langle S, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x), \psi(a)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ тоже непротиворечива.
  - Свойство свежей константы: если $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge \psi(a) \to \bigvee \Delta'$, то $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge \psi(y) \to \bigvee \Delta'$ (y — новая переменная).
  - $\vdash \forall y \left(\bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge \psi(y) \to \bigvee \Delta'\right)$
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge (\exists y\, \psi(y)) \to \bigvee \Delta'$
- Искомая $\langle S, \Gamma, \Delta\rangle$ есть $\left\langle S, \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i, \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i \right\rangle$.

Основная семантическая лемма

Лемма

$\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma \qquad \langle S, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi \iff \varphi \in \Delta$

Основная семантическая лемма

Лемма

$\langle S, \Gamma, \Delta\rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma \qquad\qquad \langle S, \Gamma, \Delta\rangle \nVdash \varphi \iff \varphi \in \Delta$

Доказательство: индукция по построению φ.

Основная семантическая лемма

Лемма

$\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma \qquad\qquad \langle S, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi \iff \varphi \in \Delta$

Доказательство: индукция по построению φ.

- Для атомарных формул — по определению $\mathscr{M}_0$.

Основная семантическая лемма

Лемма

$\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma \qquad \langle S, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi \iff \varphi \in \Delta$

Доказательство: индукция по построению φ.

- Для атомарных формул — по определению $\mathscr{M}_0$.
- $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \bot$ и $\bot \notin \Gamma$ (иначе противоречие по *ex falso*).

Основная семантическая лемма

Лемма

$\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma \qquad\qquad \langle S, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi \iff \varphi \in \Delta$

Доказательство: индукция по построению φ.

- Для атомарных формул — по определению $\mathscr{M}_0$.
- $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \bot$ и $\bot \notin \Gamma$ (иначе противоречие по *ex falso*).
- Для $\vee$ и $\wedge$ — по определению истинности в модели и свойствам полных непротиворечивых би-теорий.

Основная семантическая лемма

Лемма

$\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma$ $\qquad$ $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi \iff \varphi \in \Delta$

Доказательство: индукция по построению φ.

- Для атомарных формул — по определению $\mathscr{M}_0$.
- $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \bot$ и $\bot \notin \Gamma$ (иначе противоречие по *ex falso*).
- Для $\vee$ и $\wedge$ — по определению истинности в модели и свойствам полных непротиворечивых би-теорий.
- Для $\exists$ — за счёт $\exists$-полноты и аксиомы $\psi(a) \to \exists x\, \psi(x)$.

Основная семантическая лемма

Лемма

$\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma \qquad \langle S, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi \iff \varphi \in \Delta$

Доказательство: индукция по построению φ.

- Для атомарных формул — по определению $\mathscr{M}_0$.
- $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \bot$ и $\bot \notin \Gamma$ (иначе противоречие по *ex falso*).
- Для $\vee$ и $\wedge$ — по определению истинности в модели и свойствам полных непротиворечивых би-теорий.
- Для $\exists$ — за счёт $\exists$-полноты и аксиомы $\psi(a) \to \exists x\, \psi(x)$.
- Интересные случаи: $\to$ и $\forall$.

Основная семантическая лемма: $\longrightarrow$

- Пусть $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash (\varphi \to \psi)$.

Основная семантическая лемма: $\longrightarrow$

- Пусть $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash (\varphi \to \psi)$.

$$\begin{array}{c} w \\ \bullet \\ \langle S, \Gamma, \Delta \rangle \end{array}$$

Основная семантическая лемма: $\longrightarrow$

- Пусть $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash (\varphi \to \psi)$.

$$
\begin{tikzcd}
\overset{w}{\bullet} \arrow[r] & \overset{u}{\bullet} \\
\langle S, \Gamma, \Delta \rangle & \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle \Vdash \varphi
\end{tikzcd}
$$

Основная семантическая лемма: $\rightarrow$

- Пусть $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash (\varphi \rightarrow \psi)$.

$$
\begin{tikzcd}
\overset{w}{\bullet} \arrow[rr] & & \overset{u}{\bullet} \\
\langle S, \Gamma, \Delta \rangle & & \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle \Vdash \varphi \Longrightarrow \varphi \in \tilde{\Gamma}
\end{tikzcd}
$$

Основная семантическая лемма: $\longrightarrow$

- Пусть $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash (\varphi \to \psi)$.

$$\begin{array}{ccc} w & & u \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \langle S, \Gamma, \Delta \rangle & & \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle \Vdash \varphi \Longrightarrow \varphi \in \tilde{\Gamma} \\ & & (\varphi \to \psi) \in \Gamma \subseteq \tilde{\Gamma} \end{array}$$

Основная семантическая лемма: $\longrightarrow$

- Пусть $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash (\varphi \to \psi)$.

$$\begin{array}{ccc} w & & u \\ \bullet & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad} & \bullet \\ \langle S, \Gamma, \Delta \rangle & & \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle \Vdash \varphi \Longrightarrow \varphi \in \tilde{\Gamma} \end{array}$$

$$(\varphi \to \psi) \in \Gamma \subseteq \tilde{\Gamma}$$

$$\psi \in \tilde{\Gamma}$$

Основная семантическая лемма: $\longrightarrow$

- Пусть $(\varphi \longrightarrow \psi) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash (\varphi \longrightarrow \psi)$.

$$\begin{array}{ccc} w & & u \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \langle S, \Gamma, \Delta \rangle & & \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle \Vdash \varphi \Longrightarrow \varphi \in \tilde{\Gamma} \end{array}$$

$$(\varphi \longrightarrow \psi) \in \Gamma \subseteq \tilde{\Gamma}$$

$$\psi \in \tilde{\Gamma} \Longrightarrow \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle \Vdash \psi$$

Основная семантическая лемма: $\longrightarrow$

- Пусть $(\varphi \longrightarrow \psi) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash (\varphi \longrightarrow \psi)$.

$$\begin{tikzcd} \underset{\langle S, \Gamma, \Delta \rangle}{\overset{w}{\bullet}} \arrow[r] & \underset{\langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle \Vdash \varphi \Longrightarrow \varphi \in \tilde{\Gamma}}{\overset{u}{\bullet}} \end{tikzcd}$$

$$(\varphi \longrightarrow \psi) \in \Gamma \subseteq \tilde{\Gamma}$$

$$\psi \in \tilde{\Gamma} \Longrightarrow \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle \Vdash \psi$$

- Пусть $(\varphi \longrightarrow \psi) \in \Delta$. Построим $\langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$, где $\Vdash \varphi$ и $\nVdash \psi$.

Основная семантическая лемма: $\longrightarrow$

- Пусть $(\varphi \longrightarrow \psi) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta\rangle \Vdash (\varphi \longrightarrow \psi)$.

$$\begin{tikzcd} \overset{w}{\bullet} \arrow[r] & \overset{u}{\bullet} \\ \langle S, \Gamma, \Delta\rangle & \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}\rangle \Vdash \varphi \Longrightarrow \varphi \in \tilde{\Gamma} \end{tikzcd}$$

$$(\varphi \longrightarrow \psi) \in \Gamma \subseteq \tilde{\Gamma}$$

$$\psi \in \tilde{\Gamma} \Longrightarrow \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}\rangle \Vdash \psi$$

- Пусть $(\varphi \longrightarrow \psi) \in \Delta$. Построим $\langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}\rangle$, где $\Vdash \varphi$ и $\nVdash \psi$.
  - Этот мир получается насыщением из $\langle S, \Gamma \cup \{\varphi\}, \{\psi\}\rangle$ (непротиворечива по теореме о дедукции).

Основная семантическая лемма: $\longrightarrow$

- Пусть $(\varphi \longrightarrow \psi) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash (\varphi \longrightarrow \psi)$.

$$
\begin{tikzcd}
\overset{w}{\bullet} \arrow[r] & \overset{u}{\bullet}
\end{tikzcd}
$$

$$\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \qquad\qquad \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle \Vdash \varphi \implies \varphi \in \tilde{\Gamma}$$

$$(\varphi \longrightarrow \psi) \in \Gamma \subseteq \tilde{\Gamma}$$

$$\psi \in \tilde{\Gamma} \implies \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle \Vdash \psi$$

- Пусть $(\varphi \longrightarrow \psi) \in \Delta$. Построим $\langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$, где $\Vdash \varphi$ и $\nVdash \psi$.
  - Этот мир получается насыщением из $\langle S, \Gamma \cup \{\varphi\}, \{\psi\} \rangle$ (непротиворечива по теореме о дедукции).
  - $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \tilde{\Gamma}$ и $S \subseteq \tilde{S} \quad \implies \quad \langle S, \Gamma, \Delta \rangle \, R_C \, \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$.

Основная семантическая лемма: $\forall$

- Пусть $(\forall x\, \psi(x)) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \forall x\, \psi(x)$.

Основная семантическая лемма: $\forall$

- Пусть $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta\rangle \Vdash \forall x\, \psi(x)$.

$$w$$

$$\bullet$$

$$\langle S, \Gamma, \Delta\rangle$$

Основная семантическая лемма: ∀

- Пусть $(\forall x\,\psi(x)) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta\rangle \Vdash \forall x\,\psi(x)$.

$$\begin{tikzcd}
\overset{w}{\bullet} \arrow[rrr] & & & \overset{u}{\bullet} \\
\langle S, \Gamma, \Delta\rangle & & & \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}\rangle
\end{tikzcd}$$

Основная семантическая лемма: $\forall$

- Пусть $\big(\forall x\,\psi(x)\big) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta\rangle \Vdash \forall x\,\psi(x)$.

$$\begin{tikzcd}
\overset{w}{\bullet} \arrow[r] & \overset{u}{\bullet} \\
\langle S, \Gamma, \Delta\rangle & \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}\rangle \\
& \big(\forall x\,\psi(x)\big) \in \Gamma \subseteq \tilde{\Gamma}
\end{tikzcd}$$

Основная семантическая лемма: $\forall$

- Пусть $(\forall x\, \psi(x)) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \forall x\, \psi(x)$.

$$
\begin{array}{ccc}
w & & u \\
\bullet & \longrightarrow & \bullet \\
\langle S, \Gamma, \Delta \rangle & & \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle
\end{array}
$$

$$(\forall x\, \psi(x)) \in \Gamma \subseteq \tilde{\Gamma}$$

$$\psi(a) \in \tilde{\Gamma} \text{ для любого } a \in \tilde{S}$$

Основная семантическая лемма: ∀

- Пусть $(\forall x\, \psi(x)) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta\rangle \Vdash \forall x\, \psi(x)$.

$$
\begin{array}{ccc}
w & & u \\
\bullet & \longrightarrow & \bullet \\
\langle S, \Gamma, \Delta\rangle & & \langle \tilde S, \tilde\Gamma, \tilde\Delta\rangle
\end{array}
$$

$$(\forall x\, \psi(x)) \in \Gamma \subseteq \tilde\Gamma$$

$$\psi(a) \in \tilde\Gamma \text{ для любого } a \in \tilde S = D_u$$

Основная семантическая лемма: ∀

- Пусть $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta\rangle \Vdash \forall x\, \psi(x)$.

$$\begin{array}{ccc} w & & u \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \langle S, \Gamma, \Delta\rangle & & \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}\rangle \end{array}$$

$$\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Gamma \subseteq \tilde{\Gamma}$$

$$\psi(a) \in \tilde{\Gamma} \text{ для любого } a \in \tilde{S} = D_u$$

$$\Vdash \psi(a) \text{ для любого } a \in D_u$$

Основная семантическая лемма: $\forall$

- Пусть $(\forall x\, \psi(x)) \in \Gamma$. Докажем, что $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \forall x\, \psi(x)$.

$$
\begin{array}{ccc}
w & & u \\
\bullet & \longrightarrow & \bullet \\
\langle S, \Gamma, \Delta \rangle & & \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle \\
 & & (\forall x\, \psi(x)) \in \Gamma \subseteq \tilde{\Gamma} \\
 & & \psi(a) \in \tilde{\Gamma} \text{ для любого } a \in \tilde{S} = D_u \\
\Vdash \forall x\, \psi(x) & & \Vdash \psi(a) \text{ для любого } a \in D_u
\end{array}
$$

Основная семантическая лемма: ∀

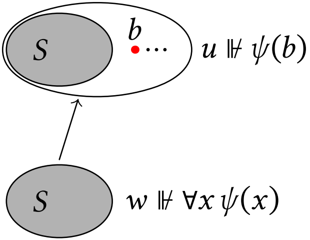
- Пусть $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$ в мире $w = \langle S, \Gamma, \Delta \rangle$.

Основная семантическая лемма: $\forall$

- Пусть $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$ в мире $w = \langle S, \Gamma, \Delta \rangle$.
- Построим достижимый мир, в котором есть свидетель b неистинности $\forall x\, \psi(x)$.

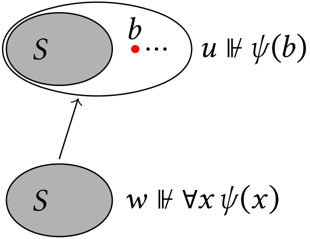
Основная семантическая лемма: $\forall$

- Пусть $(\forall x\, \psi(x)) \in \Delta$ в мире $w = \langle S, \Gamma, \Delta \rangle$.
- Построим достижимый мир, в котором есть свидетель b неистинности $\forall x\, \psi(x)$.



Основная семантическая лемма: ∀

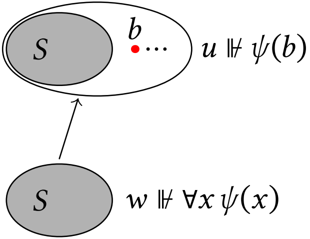
- Пусть $(\forall x\, \psi(x)) \in \Delta$ в мире $w = \langle S, \Gamma, \Delta \rangle$.
- Построим достижимый мир, в котором есть свидетель b неистинности $\forall x\, \psi(x)$.



- Мир $u = \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$ получается насыщением из би-теории $\langle S \cup \{b\}, \Gamma, \{\psi(b)\} \rangle$.

Основная семантическая лемма: ∀

- Пусть $(\forall x\, \psi(x)) \in \Delta$ в мире $w = \langle S, \Gamma, \Delta \rangle$.
- Построим достижимый мир, в котором есть свидетель b неистинности $\forall x\, \psi(x)$.



- Мир $u = \langle \tilde{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$ получается насыщением из би-теории $\langle S \cup \{b\}, \Gamma, \{\psi(b)\} \rangle$.
- Эта би-теория непротиворечива по свойству свежей константы: если $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \psi(b)$, то $\vdash \bigwedge \Gamma' \to (\forall x\, \psi(x))$.

Доказательство теоремы о полноте

- Пусть FO-Int $\nvdash \varphi$, где φ — замкнутая формула.

Доказательство теоремы о полноте

- Пусть FO-Int $\nvdash \varphi$, где φ — замкнутая формула.
- Нужно построить модель $\mathscr{M}$ и найти в ней мир w, так чтобы $\mathscr{M}, w \nVdash \varphi$.

Доказательство теоремы о полноте

- Пусть FO-Int $\nvdash \varphi$, где φ — замкнутая формула.
- Нужно построить модель $\mathscr{M}$ и найти в ней мир w, так чтобы $\mathscr{M}, w \nVdash \varphi$.
- Возьмём каноническую модель ($\mathscr{M} = \mathscr{M}_C$) и построим мир $w = \langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ насыщением из би-теории $\langle \mathrm{Cnst}_\Omega, \varnothing, \{\varphi\} \rangle$.

Доказательство теоремы о полноте

- Пусть FO-Int $\nvdash \varphi$, где φ — замкнутая формула.
- Нужно построить модель $\mathscr{M}$ и найти в ней мир w, так чтобы $\mathscr{M}, w \nVdash \varphi$.
- Возьмём каноническую модель ($\mathscr{M} = \mathscr{M}_C$) и построим мир $w = \langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ насыщением из би-теории $\langle \mathrm{Cnst}_\Omega, \varnothing, \{\varphi\} \rangle$.
- Эта би-теория непротиворечива: иначе FO-Int $\vdash \varphi$.

Доказательство теоремы о полноте

- Пусть FO-Int $\nvdash \varphi$, где φ — замкнутая формула.
- Нужно построить модель $\mathscr{M}$ и найти в ней мир w, так чтобы $\mathscr{M}, w \nVdash \varphi$.
- Возьмём каноническую модель ($\mathscr{M} = \mathscr{M}_C$) и построим мир $w = \langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ насыщением из би-теории $\langle \mathrm{Cnst}_\Omega, \varnothing, \{\varphi\} \rangle$.
- Эта би-теория непротиворечива: иначе FO-Int $\vdash \varphi$.
- По основной семантической лемме $w \nVdash \varphi$, т.к. $\varphi \in \Delta$.

Следствия теоремы о полноте

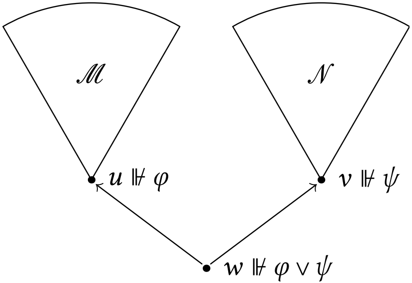
- **Дизъюнктивное свойство:** если FO-Int $\vdash \varphi \vee \psi$ (φ и ψ — замкнутые формулы), то FO-Int $\vdash \varphi$ или FO-Int $\vdash \psi$.

Следствия теоремы о полноте

- **Дизъюнктивное свойство:** если FO-Int $\vdash \varphi \vee \psi$ (φ и ψ — замкнутые формулы), то FO-Int $\vdash \varphi$ или FO-Int $\vdash \psi$.
- Пусть ни φ, ни ψ не доказуемы. Тогда у каждого есть контрмодель.

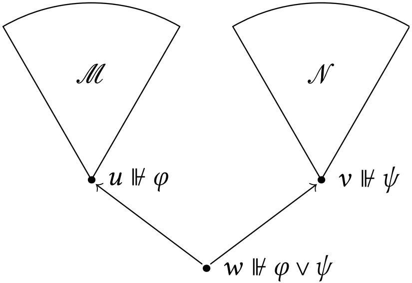
Следствия теоремы о полноте

- **Дизъюнктивное свойство:** если FO-Int $\vdash \varphi \vee \psi$ (φ и ψ — замкнутые формулы), то FO-Int $\vdash \varphi$ или FO-Int $\vdash \psi$.
- Пусть ни φ, ни ψ не доказуемы. Тогда у каждого есть контрмодель.
- Соберём из них контрмодель для $\varphi \vee \psi$.



Следствия теоремы о полноте

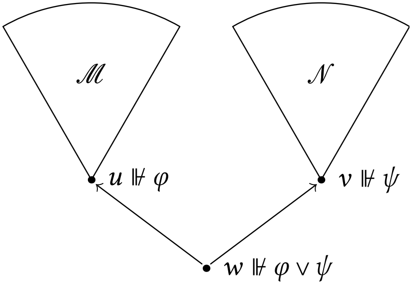
- **Дизъюнктивное свойство:** если FO-Int $\vdash \varphi \vee \psi$ (φ и ψ — замкнутые формулы), то FO-Int $\vdash \varphi$ или FO-Int $\vdash \psi$.
- Пусть ни φ, ни ψ не доказуемы. Тогда у каждого есть контрмодель.
- Соберём из них контрмодель для $\varphi \vee \psi$.



  - Для любой атомарной ξ, $w \nVdash \xi$.

Следствия теоремы о полноте

- **Дизъюнктивное свойство:** если FO-Int $\vdash \varphi \vee \psi$ (φ и ψ — замкнутые формулы), то FO-Int $\vdash \varphi$ или FO-Int $\vdash \psi$.
- Пусть ни φ, ни ψ не доказуемы. Тогда у каждого есть контрмодель.
- Соберём из них контрмодель для $\varphi \vee \psi$.



  - Для любой атомарной ξ, $w \not\Vdash \xi$.
- **Вопрос.** Верно ли дизъюнктивное свойство для формул $\varphi(\vec{x})$ и $\psi(\vec{x})$ со свободными переменными?

Следствия теоремы о полноте

- **Экзистенциальное свойство:** если FO-Int $\vdash \exists x\, \psi(x)$ (других свободных переменных у ψ нет), то FO-Int $\vdash \psi(t)$ для некоторого терма t, причём подстановка свободна.

Следствия теоремы о полноте

- **Экзистенциальное свойство:** если FO-Int $\vdash \exists x\, \psi(x)$ (других свободных переменных у ψ нет), то FO-Int $\vdash \psi(t)$ для некоторого терма t, причём подстановка свободна.
- У нас нет развитого языка термов, так что t — либо константа c_i ($i \geq 1$), либо новая переменная z.

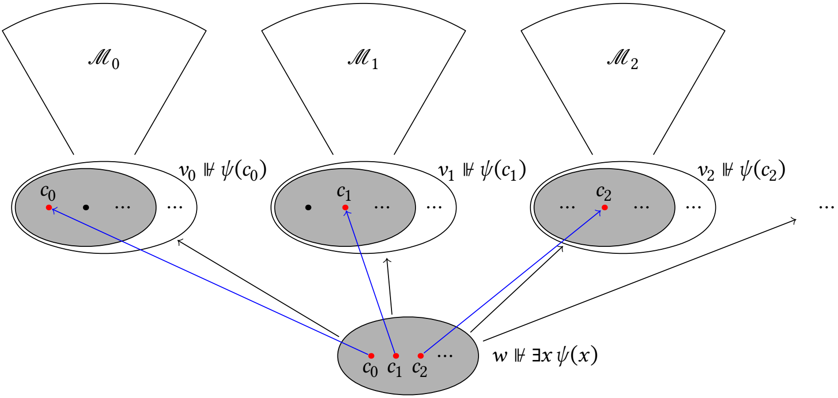
Следствия теоремы о полноте

- **Экзистенциальное свойство:** если FO-Int $\vdash \exists x\, \psi(x)$ (других свободных переменных у ψ нет), то FO-Int $\vdash \psi(t)$ для некоторого терма t, причём подстановка свободна.
- У нас нет развитого языка термов, так что t — либо константа c_i ($i \geq 1$), либо новая переменная z.
- Добавим свежую константу c_0, тогда $\vdash \psi(z) \iff \vdash \psi(c_0)$.

Следствия теоремы о полноте

- **Экзистенциальное свойство:** если FO-Int $\vdash \exists x\, \psi(x)$ (других свободных переменных у ψ нет), то FO-Int $\vdash \psi(t)$ для некоторого терма t, причём подстановка свободна.
- У нас нет развитого языка термов, так что t — либо константа c_i $(i \geq 1)$, либо новая переменная z.
- Добавим свежую константу c_0, тогда $\vdash \psi(z) \iff \vdash \psi(c_0)$.
- Если $\nvdash \psi(c_0)$, $\nvdash \psi(c_1)$, ..., $\nvdash \psi(c_k)$, ..., то есть контрмодели. Склеим из них контрмодель для $\exists \psi(x)$.

Контрмодель для $(\exists x\, \psi(x))$



$(D_w = \mathrm{Cnst}_\Omega$ и $w \nVdash \xi$ для атомарных $\xi)$

Следствия теоремы о полноте

- **«Кабацкая формула»** (“Drinkers’ formula”):
  $\mu = \exists x \left(D(x) \longrightarrow \forall y\, D(y)\right)$.

Следствия теоремы о полноте

- **«Кабацкая формула»** (“Drinkers’ formula”): $\mu = \exists x \left(D(x) \longrightarrow \forall y\, D(y)\right)$.
  - *В непустом кабаке найдётся такой человек, что если он пьёт, то пьют все.*

Следствия теоремы о полноте

- **«Кабацкая формула»** (“Drinkers’ formula”):
  $\mu = \exists x \left(D(x) \longrightarrow \forall y\, D(y)\right)$.
  - *В непустом кабаке найдётся такой человек, что если он пьёт, то пьют все.*
- В классической логике μ доказуема: разбираем случаи $\forall y\, D(y)$ и $\exists x\, \neg D(x)$.

Следствия теоремы о полноте

- **«Кабацкая формула»** (“Drinkers’ formula”): $\mu = \exists x \left(D(x) \longrightarrow \forall y\, D(y)\right)$.
  - *В непустом кабаке найдётся такой человек, что если он пьёт, то пьют все.*
- В классической логике μ доказуема: разбираем случаи $\forall y\, D(y)$ и $\exists x\, \neg D(x)$.
- В интуиционистской логике μ недоказуема по экзистенциальному свойству, т.к. $\nvdash D(z) \longrightarrow \forall y\, D(y)$ со свободной z.

Следствия теоремы о полноте

- Интереснее рассматривать выводимость не в «чистой» FO-Int, а из теорий ($T \vdash \varphi$).

Следствия теоремы о полноте

- Интереснее рассматривать выводимость не в «чистой» FO-Int, а из теорий ($T \vdash \varphi$).
- В общем случае, для выводимости из теорий дизъюнктивное и экзистенциальное свойства неверны: например, $P \vee Q \vdash P \vee Q$, но $P \vee Q \nvdash P$ и $P \vee Q \nvdash Q$.

Следствия теоремы о полноте

- Интереснее рассматривать выводимость не в «чистой» FO-Int, а из теорий ($T \vdash \varphi$).
- В общем случае, для выводимости из теорий дизъюнктивное и экзистенциальное свойства неверны: например, $P \vee Q \vdash P \vee Q$, но $P \vee Q \nvdash P$ и $P \vee Q \nvdash Q$.
- При определённых синтаксических условиях на формулы из T, однако, эти свойства восстанавливаются **(теоремы Харропа).**

Полнота для постоянных областей

- Модель Крипке с постоянными областями: D_w одна и та же для всех $w \in W$.

Полнота для постоянных областей

- Модель Крипке с постоянными областями: D_w одна и та же для всех $w \in W$.
- $\mathrm{CD} \;=\; \big(\forall x\,(\psi \vee \varphi(x)) \to (\psi \vee \forall x\,\varphi(x))\big)$, где x не входит свободно в ψ.

Полнота для постоянных областей

- Модель Крипке с постоянными областями: D_w одна и та же для всех $w \in W$.
- $\mathrm{CD} = \big(\forall x\,(\psi \vee \varphi(x)) \to (\psi \vee \forall x\,\varphi(x))\big)$, где x не входит свободно в ψ.

Теорема

Формула φ общезначима в моделях Крипке с постоянными областями тогда и только тогда, когда она доказуема в FO-Int + CD.

Полнота для постоянных областей

- Модель Крипке с постоянными областями: D_w одна и та же для всех $w \in W$.
- $\mathrm{CD} \;=\; \big(\forall x\,(\psi \vee \varphi(x)) \to (\psi \vee \forall x\,\varphi(x))\big)$, где x не входит свободно в ψ.

Теорема

Формула φ общезначима в моделях Крипке с постоянными областями тогда и только тогда, когда она доказуема в FO-Int + CD.

- Часть «тогда» (корректность) доказана на прошлой лекции, будем доказывать часть «только тогда».

Полнота для постоянных областей

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке с постоянными областями, то она доказуема в FO-Int + CD.

Полнота для постоянных областей

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке с постоянными областями, то она доказуема в FO-Int + CD.

- Как и в доказательстве обычной теоремы о полноте, мы строим каноническую модель, но теперь уже с постоянными областями.

Полнота для постоянных областей

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке с постоянными областями, то она доказуема в FO-Int + CD.

- Как и в доказательстве обычной теоремы о полноте, мы строим каноническую модель, но теперь уже с постоянными областями.
- Значит, множество констант S во всех наших би-теориях — мирах $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ должно быть одним и тем же.

Полнота для постоянных областей

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке с постоянными областями, то она доказуема в FO-Int + CD.

- Как и в доказательстве обычной теоремы о полноте, мы строим каноническую модель, но теперь уже с постоянными областями.
- Значит, множество констант S во всех наших би-теориях — мирах $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ должно быть одним и тем же. Пусть это будет весь «запас констант» $\hat{S}$.

Полнота для постоянных областей

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке с постоянными областями, то она доказуема в FO-Int + CD.

- Как и в доказательстве обычной теоремы о полноте, мы строим каноническую модель, но теперь уже с постоянными областями.
- Значит, множество констант S во всех наших би-теориях — мирах $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ должно быть одним и тем же. Пусть это будет весь «запас констант» $\hat{S}$.
- В доказательстве основной семантической леммы мы применяли лемму о насыщении (случаи $\forall$ и $\to$ в Δ).

Полнота для постоянных областей

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке с постоянными областями, то она доказуема в FO-Int + CD.

- Как и в доказательстве обычной теоремы о полноте, мы строим каноническую модель, но теперь уже с постоянными областями.
- Значит, множество констант S во всех наших би-теориях — мирах $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ должно быть одним и тем же. Пусть это будет весь «запас констант» $\hat{S}$.
- В доказательстве основной семантической леммы мы применяли лемму о насыщении (случаи $\forall$ и $\to$ в Δ).
- В случае $\forall$ мы явно расширяли S новым элементом b.

Полнота для постоянных областей

Теорема

Если формула φ общезначима в моделях Крипке с постоянными областями, то она доказуема в FO-Int + CD.

- Как и в доказательстве обычной теоремы о полноте, мы строим каноническую модель, но теперь уже с постоянными областями.
- Значит, множество констант S во всех наших би-теориях — мирах $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ должно быть одним и тем же. Пусть это будет весь «запас констант» $\hat{S}$.
- В доказательстве основной семантической леммы мы применяли лемму о насыщении (случаи $\forall$ и $\to$ в Δ).
- В случае $\forall$ мы явно расширяли S новым элементом b.
- В случае $\varphi \to \psi$ расширение S могло произойти внутри леммы о насыщении (если $\varphi = \exists y\, \xi(y)$).

Постоянство областей и квантор ∀

- Если $\mathscr{M}$ — модель с постоянными областями, то $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\, \psi(x) \iff \mathscr{M}, w \Vdash \psi(a)$ для всех $a \in D_w$

Постоянство областей и квантор $\forall$

- Если $\mathscr{M}$ — модель с постоянными областями, то $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\, \psi(x) \iff \mathscr{M}, w \Vdash \psi(a)$ для всех $a \in D_w$ (т.е. истинность для $\forall$ в таких моделях можно определить локально).

Постоянство областей и квантор ∀

- Если $\mathscr{M}$ — модель с постоянными областями, то $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\, \psi(x) \iff \mathscr{M}, w \Vdash \psi(a)$ для всех $a \in D_w$ (т.е. истинность для ∀ в таких моделях можно определить локально).
  - $\Longrightarrow$: в силу рефлексивности ($w\, R\, w$);

Постоянство областей и квантор $\forall$

- Если $\mathscr{M}$ — модель с постоянными областями, то $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\, \psi(x) \iff \mathscr{M}, w \Vdash \psi(a)$ для всех $a \in D_w$ (т.е. истинность для $\forall$ в таких моделях можно определить локально).
  - $\Longrightarrow$: в силу рефлексивности ($w\, R\, w$);
  - $\Longleftarrow$: если $w\, R\, u$, имеем $u \Vdash \psi(a)$ по монотонности для любого $a \in D_w$ — а значит и для любого $a \in D_u = D_w$.

Постоянство областей и квантор $\forall$

- Если $\mathscr{M}$ — модель с постоянными областями, то $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\, \psi(x) \iff \mathscr{M}, w \Vdash \psi(a)$ для всех $a \in D_w$ (т.е. истинность для $\forall$ в таких моделях можно определить локально).
  - $\Longrightarrow$: в силу рефлексивности ($w\,R\,w$);
  - $\Longleftarrow$: если $w\,R\,u$, имеем $u \Vdash \psi(a)$ по монотонности для любого $a \in D_w$ — а значит и для любого $a \in D_u = D_w$.
- В новой канонической модели: если $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$, то нужно обеспечить b, $\psi(b) \in \Delta$, *в том же мире* $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$.

Постоянство областей и квантор $\forall$

- Если $\mathscr{M}$ — модель с постоянными областями, то $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\, \psi(x) \iff \mathscr{M}, w \Vdash \psi(a)$ для всех $a \in D_w$ (т.е. истинность для $\forall$ в таких моделях можно определить локально).
  - $\Longrightarrow$: в силу рефлексивности ($w\, R\, w$);
  - $\Longleftarrow$: если $w\, R\, u$, имеем $u \Vdash \psi(a)$ по монотонности для любого $a \in D_w$ — а значит и для любого $a \in D_u = D_w$.
- В новой канонической модели: если $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$, то нужно обеспечить b, $\psi(b) \in \Delta$, *в том же мире* $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$.
- Би-теория $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$, называется $\exists\forall$-*полной*, если:
  - если $\big(\exists x\, \psi(x)\big) \in \Gamma$, то $\psi(a) \in \Gamma$ для некоторого $a \in S$;
  - если $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$, то $\psi(b) \in \Delta$ для некоторого $b \in S$.

Постоянство областей и квантор $\forall$

- Если $\mathscr{M}$ — модель с постоянными областями, то $\mathscr{M}, w \Vdash \forall x\, \psi(x) \iff \mathscr{M}, w \Vdash \psi(a)$ для всех $a \in D_w$ (т.е. истинность для $\forall$ в таких моделях можно определить локально).
  - $\Longrightarrow$: в силу рефлексивности ($w\,R\,w$);
  - $\Longleftarrow$: если $w\,R\,u$, имеем $u \Vdash \psi(a)$ по монотонности для любого $a \in D_w$ — а значит и для любого $a \in D_u = D_w$.
- В новой канонической модели: если $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$, то нужно обеспечить b, $\psi(b) \in \Delta$, *в том же мире* $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$.
- Би-теория $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$, называется $\exists\forall$-*полной*, если:
  - если $\big(\exists x\, \psi(x)\big) \in \Gamma$, то $\psi(a) \in \Gamma$ для некоторого $a \in S$;
  - если $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$, то $\psi(b) \in \Delta$ для некоторого $b \in S$.
- Это упрощённое определение $\exists\forall$-полноты для случая постоянных областей / присутствия CD в логике.

Новая лемма о насыщении

- Би-теория $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$, называется $\exists\forall$-*полной*, если:
  - если $\big(\exists x\, \psi(x)\big) \in \Gamma$, то $\psi(a) \in \Gamma$ для некоторого $a \in S$;
  - если $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$, то $\psi(b) \in \Delta$ для некоторого $b \in S$.

Новая лемма о насыщении

- Би-теория $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$, называется $\exists\forall$-*полной*, если:
  - если $\big(\exists x\, \psi(x)\big) \in \Gamma$, то $\psi(a) \in \Gamma$ для некоторого $a \in S$;
  - если $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$, то $\psi(b) \in \Delta$ для некоторого $b \in S$.
- Напомним старые определения (уже в присутствии CD):
  - $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ непротиворечива (точнее, CD-*непротиворечива*), если FO-Int + CD $\nvdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta'$ для конечных $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$;
  - $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ полна, если $\Gamma \cup \Delta = \mathrm{CFm}_{\Omega+S}$;
  - $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ малая, если $\hat{S} - S$ бесконечно.

Новая лемма о насыщении

- Би-теория $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$, называется $\exists\forall$-*полной*, если:
  - если $\bigl(\exists x\, \psi(x)\bigr) \in \Gamma$, то $\psi(a) \in \Gamma$ для некоторого $a \in S$;
  - если $\bigl(\forall x\, \psi(x)\bigr) \in \Delta$, то $\psi(b) \in \Delta$ для некоторого $b \in S$.
- Напомним старые определения (уже в присутствии CD):
  - $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ непротиворечива (точнее, CD-*непротиворечива*), если FO-Int + CD $\nvdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta'$ для конечных $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$;
  - $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ полна, если $\Gamma \cup \Delta = \mathrm{CFm}_{\Omega+S}$;
  - $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ малая, если $\hat{S} - S$ бесконечно.
  - Свойство CD-непротиворечивости сильнее свойства обычной непротиворечивости.

Новая лемма о насыщении

- Би-теория $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$, называется $\exists\forall$-*полной*, если:
  - если $\big(\exists x\, \psi(x)\big) \in \Gamma$, то $\psi(a) \in \Gamma$ для некоторого $a \in S$;
  - если $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$, то $\psi(b) \in \Delta$ для некоторого $b \in S$.
- Напомним старые определения (уже в присутствии CD):
  - $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ непротиворечива (точнее, CD-*непротиворечива*), если FO-Int + CD $\nvdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta'$ для конечных $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$;
  - $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ полна, если $\Gamma \cup \Delta = \mathrm{CFm}_{\Omega+S}$;
  - $\langle S, \Gamma, \Delta \rangle$ малая, если $\hat{S} - S$ бесконечно.
  - Свойство CD-непротиворечивости сильнее свойства обычной непротиворечивости.

Лемма

Если $\langle S_0, \Gamma_0, \Delta_0 \rangle$ — малая CD-*непротиворечивая би-теория, то существует такая* CD-*непротиворечивая полная* $\exists\forall$-*полная би-теория $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$, что $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ и $\Delta_0 \subseteq \Delta$.*

Новая лемма о насыщении

Лемма

Если $\langle S_0, \Gamma_0, \Delta_0 \rangle$ *— малая* CD*-непротиворечивая би-теория, то существует такая* CD*-непротиворечивая полная* ∃∀*-полная би-теория* $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$*, что* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *и* $\Delta_0 \subseteq \Delta$.

- Схема доказательства та же, что и у обычной леммы о насыщении — обрабатываем формулы из $\mathrm{CFm}_{\Omega+\hat{S}} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.

Новая лемма о насыщении

Лемма

Если $\langle S_0, \Gamma_0, \Delta_0 \rangle$ *— малая* CD*-непротиворечивая би-теория, то существует такая* CD*-непротиворечивая полная* $\exists\forall$*-полная би-теория* $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$*, что* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *и* $\Delta_0 \subseteq \Delta$.

- Схема доказательства та же, что и у обычной леммы о насыщении — обрабатываем формулы из $\mathrm{CFm}_{\Omega+\hat{S}} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$.
- Если $\varphi_k = \big(\exists x\, \psi(x)\big)$, то берём $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x)\} \rangle$ (если она CD-непротиворечива) или $\langle S_{k-1} \cup \{a\}, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x), \psi(a)\}, \Delta_{k-1} \rangle$ (a — свежая константа).

Новая лемма о насыщении

Лемма

Если $\langle S_0, \Gamma_0, \Delta_0 \rangle$ — *малая* CD-*непротиворечивая би-теория, то существует такая* CD-*непротиворечивая полная* $\exists\forall$-*полная би-теория* $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$, *что* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *и* $\Delta_0 \subseteq \Delta$.

- Схема доказательства та же, что и у обычной леммы о насыщении — обрабатываем формулы из $\mathrm{CFm}_{\Omega+\hat{S}} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.
- Если $\varphi_k = \big(\exists x\, \psi(x)\big)$, то берём $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x)\} \rangle$ (если она CD-непротиворечива) или $\langle S_{k-1} \cup \{a\}, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x), \psi(a)\}, \Delta_{k-1} \rangle$ (a — свежая константа).
- Если $\varphi_k = \big(\forall x\, \psi(x)\big)$, то берём $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x)\}, \Delta_{k-1} \rangle$ (если CD-непротиворечива) или $\langle S_{k-1} \cup \{b\}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x), \psi(b)\} \rangle$ (b свежая).

Новая лемма о насыщении

Лемма

Если $\langle S_0, \Gamma_0, \Delta_0 \rangle$ *— малая* CD*-непротиворечивая би-теория, то существует такая* CD*-непротиворечивая полная* $\exists\forall$*-полная би-теория* $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$*, что* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *и* $\Delta_0 \subseteq \Delta$.

- Схема доказательства та же, что и у обычной леммы о насыщении — обрабатываем формулы из $\mathrm{CFm}_{\Omega + \hat{S}} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.
- Если $\varphi_k = \big(\exists x\, \psi(x)\big)$, то берём $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x)\} \rangle$ (если она CD-непротиворечива) или $\langle S_{k-1} \cup \{a\}, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x), \psi(a)\}, \Delta_{k-1} \rangle$ (a — свежая константа).
- Если $\varphi_k = \big(\forall x\, \psi(x)\big)$, то берём $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x)\}, \Delta_{k-1} \rangle$ (если CD-непротиворечива) или $\langle S_{k-1} \cup \{b\}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x), \psi(b)\} \rangle$ (b свежая).
- Иначе выбираем из $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1} \rangle$ и $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\} \rangle$.

Новая лемма о насыщении

- Одна из теорий $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1} \rangle$ и $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\} \rangle$ всегда CD-непротиворечива.

Новая лемма о насыщении

- Одна из теорий $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1} \rangle$ и $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\} \rangle$ всегда CD-непротиворечива.
  - Доказательство такое же, как и для обычной непротиворечивости.

Новая лемма о насыщении

- Одна из теорий $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1}\rangle$ и $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}\rangle$ всегда CD-непротиворечива.
    - Доказательство такое же, как и для обычной непротиворечивости.
- Если $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ CD-непротиворечива, то $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x), \psi(a)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ CD-непротиворечива.

Новая лемма о насыщении

- Одна из теорий $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1}\rangle$ и $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}\rangle$ всегда CD-непротиворечива.
  - Доказательство такое же, как и для обычной непротиворечивости.
- Если $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ CD-непротиворечива, то $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x), \psi(a)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ CD-непротиворечива.
  - Доказательство опять такое же, как и в случае без CD.

Новая лемма о насыщении

- Одна из теорий $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1}\rangle$ и $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\}\rangle$ всегда CD-непротиворечива.
  - Доказательство такое же, как и для обычной непротиворечивости.
- Если $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ CD-непротиворечива, то $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x), \psi(a)\}, \Delta_{k-1}\rangle$ CD-непротиворечива.
  - Доказательство опять такое же, как и в случае без CD.
  - По свойству свежей константы получаем $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge \psi(y) \to \bigvee \Delta'$, применяем правило обобщения и вносим квантор по y.

Новая лемма о насыщении

- Одна из теорий $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\varphi_k\}, \Delta_{k-1} \rangle$ и $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\varphi_k\} \rangle$ всегда CD-непротиворечива.
  - Доказательство такое же, как и для обычной непротиворечивости.
- Если $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x)\}, \Delta_{k-1} \rangle$ CD-непротиворечива, то $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1} \cup \{\exists x\, \psi(x), \psi(a)\}, \Delta_{k-1} \rangle$ CD-непротиворечива.
  - Доказательство опять такое же, как и в случае без CD.
  - По свойству свежей константы получаем $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge \psi(y) \to \bigvee \Delta'$, применяем правило обобщения и вносим квантор по y.
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \wedge (\exists x\, \psi(x)) \wedge (\exists y\, \psi(y)) \to \bigvee \Delta'$.

Новая лемма о насыщении

- Если $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива, то $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x), \psi(b)\}\rangle$ CD-непротиворечива.

Новая лемма о насыщении

- Если $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива, то $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x), \psi(b)\}\rangle$ CD-непротиворечива.
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(b)$

Новая лемма о насыщении

- Если $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива, то $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x), \psi(b)\}\rangle$ CD-непротиворечива.
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(b)$
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(z)$

Новая лемма о насыщении

- Если $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива, то $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x), \psi(b)\}\rangle$ CD-непротиворечива.
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(b)$
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(z)$
  - $\vdash \forall z \left(\bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(z)\right)$

Новая лемма о насыщении

- Если $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива, то $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x), \psi(b)\}\rangle$ CD-непротиворечива.
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(b)$
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(z)$
  - $\vdash \forall z \left(\bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(z)\right)$
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \forall z \left(\underbrace{\bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x))} \vee \psi(z)\right)$

Новая лемма о насыщении

- Если $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива, то $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x), \psi(b)\}\rangle$ CD-непротиворечива.
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(b)$
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(z)$
  - $\vdash \forall z \left(\bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(z)\right)$
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \forall z \left(\underbrace{\bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x))} \vee \psi(z)\right)$
  - по CD, $\vdash \bigwedge \Gamma' \to \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee (\forall z\, \psi(z))$

Новая лемма о насыщении

- Если $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива, то $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta_{k-1} \cup \{\forall x\, \psi(x), \psi(b)\}\rangle$ CD-непротиворечива.
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(b)$
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(z)$
  - $\vdash \forall z \left(\bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee \psi(z)\right)$
  - $\vdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \forall z \left(\underbrace{\bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x))} \vee \psi(z)\right)$
  - по CD, $\vdash \bigwedge \Gamma' \longrightarrow \bigvee \Delta' \vee (\forall x\, \psi(x)) \vee (\forall z\, \psi(z))$
  - Последнее невозможно в силу CD-непротиворечивости $\langle S_{k-1}, \Gamma_{k-1}, \Delta \cup \{\forall x\, \psi(x)\}\rangle$.

Каноническая модель с постоянными областями

$$\widehat{\mathscr{M}_C} = \left\langle \widehat{W}_C, R_C, \left(D_w = \hat{S}\right)_{w \in \widehat{W}_C}, \alpha_C \right\rangle$$

Каноническая модель с постоянными областями

$$\widehat{\mathscr{M}_C} = \left\langle \widehat{W}_C, R_C, \left(D_w = \hat{S}\right)_{w \in \widehat{W}_C}, \alpha_C \right\rangle$$

- $\widehat{W}_C$ состоит из CD-непротиворечивых полных $\exists\forall$-полных би-теорий вида $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$.

Каноническая модель с постоянными областями

$\widehat{\mathscr{M}_C} = \left\langle \widehat{W}_C, R_C, \left(D_w = \hat{S}\right)_{w \in \widehat{W}_C}, \alpha_C \right\rangle$

- $\widehat{W}_C$ состоит из CD-непротиворечивых полных $\exists\forall$-полных би-теорий вида $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$.
- Как и в $\mathscr{M}_C$, имеем $\langle \hat{S}, \Gamma_1, \Delta_1 \rangle \, R_C \, \langle \hat{S}, \Gamma_2, \Delta_2 \rangle \iff \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.

Каноническая модель с постоянными областями

$$\widehat{\mathscr{M}_C} = \left\langle \widehat{W}_C, R_C, \left(D_w = \hat{S}\right)_{w \in \widehat{W}_C}, \alpha_C \right\rangle$$

- $\widehat{W}_C$ состоит из CD-непротиворечивых полных ∃∀-полных би-теорий вида $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$.
- Как и в $\mathscr{M}_C$, имеем $\langle \hat{S}, \Gamma_1, \Delta_1 \rangle \, R_C \, \langle \hat{S}, \Gamma_2, \Delta_2 \rangle \iff \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.
  - И вот теперь это равносильно $\Delta_1 \supseteq \Delta_2$.

Каноническая модель с постоянными областями

$\widehat{\mathscr{M}_C} = \left\langle \widehat{W}_C, R_C, \left(D_w = \hat{S}\right)_{w \in \widehat{W}_C}, \alpha_C \right\rangle$

- $\widehat{W}_C$ состоит из CD-непротиворечивых полных $\exists\forall$-полных би-теорий вида $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$.
- Как и в $\mathscr{M}_C$, имеем $\langle \hat{S}, \Gamma_1, \Delta_1 \rangle \, R_C \, \langle \hat{S}, \Gamma_2, \Delta_2 \rangle \iff \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.
  - И вот теперь это равносильно $\Delta_1 \supseteq \Delta_2$.
- Предметная область одна и та же для всех w — $D_w = \hat{S}$.

Каноническая модель с постоянными областями

$$\widehat{\mathscr{M}_C} = \left\langle \widehat{W}_C, R_C, \left(D_w = \hat{S}\right)_{w \in \widehat{W}_C}, \alpha_C \right\rangle$$

- $\widehat{W}_C$ состоит из CD-непротиворечивых полных ∃∀-полных би-теорий вида $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$.
- Как и в $\mathscr{M}_C$, имеем $\langle \hat{S}, \Gamma_1, \Delta_1 \rangle \, R_C \, \langle \hat{S}, \Gamma_2, \Delta_2 \rangle \iff \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.
    - И вот теперь это равносильно $\Delta_1 \supseteq \Delta_2$.
- Предметная область одна и та же для всех w — $D_w = \hat{S}$.
- $\alpha_C(c) = c$
- $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi(\vec{c}) \iff \varphi(\vec{c}) \in \Gamma$ для атомарных $\varphi(\vec{x})$.

Основная семантическая лемма для $\widehat{\mathscr{M}_C}$

Лемма

$\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma \qquad \langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi \iff \varphi \in \Delta$

Основная семантическая лемма для $\widehat{\mathscr{M}}_C$

Лемма

$\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma \qquad \langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi \iff \varphi \in \Delta$

- Новое в доказательстве будет только в случаях, где используется лемма о насыщении (строится новый мир): $(\varphi \to \psi) \in \Delta$ и $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$.

Основная семантическая лемма для $\widehat{\mathscr{M}}_C$

Лемма

$\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma$ $\qquad$ $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi \iff \varphi \in \Delta$

- Новое в доказательстве будет только в случаях, где используется лемма о насыщении (строится новый мир): $(\varphi \to \psi) \in \Delta$ и $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$.
- При $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$ не будем строить новый мир: по $\exists\forall$-полноте существует $b \in \hat{S}$ и $\psi(b) \in \Delta$.

Основная семантическая лемма для $\widehat{\mathscr{M}_C}$

Лемма

$\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma$ $\qquad$ $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi \iff \varphi \in \Delta$

- Новое в доказательстве будет только в случаях, где используется лемма о насыщении (строится новый мир): $(\varphi \to \psi) \in \Delta$ и $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$.
- При $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$ не будем строить новый мир: по $\exists\forall$-полноте существует $b \in \hat{S}$ и $\psi(b) \in \Delta$. Поэтому $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \psi(b)$, откуда $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \forall x\, \psi(x)$.

Основная семантическая лемма для $\widehat{\mathscr{M}}_C$

Лемма

$\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma$ $\qquad$ $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi \iff \varphi \in \Delta$

- Новое в доказательстве будет только в случаях, где используется лемма о насыщении (строится новый мир): $(\varphi \to \psi) \in \Delta$ и $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$.
- При $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$ не будем строить новый мир: по $\exists\forall$-полноте существует $b \in \hat{S}$ и $\psi(b) \in \Delta$. Поэтому $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \psi(b)$, откуда $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \forall x\, \psi(x)$.
- При $(\varphi \to \psi) \in \Delta$ новый мир построить придётся, но нужно действовать осторожнее: $\hat{S}$ расширять нельзя.

Основная семантическая лемма для $\widehat{\mathscr{M}}_C$

Лемма

$\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma \qquad \langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi \iff \varphi \in \Delta$

- Новое в доказательстве будет только в случаях, где используется лемма о насыщении (строится новый мир): $(\varphi \to \psi) \in \Delta$ и $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$.
- При $\big(\forall x\, \psi(x)\big) \in \Delta$ не будем строить новый мир: по $\exists\forall$-полноте существует $b \in \hat{S}$ и $\psi(b) \in \Delta$. Поэтому $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \psi(b)$, откуда $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \forall x\, \psi(x)$.
- При $(\varphi \to \psi) \in \Delta$ новый мир построить придётся, но нужно действовать осторожнее: $\hat{S}$ расширять нельзя.
- Нужно построить такую $\langle \hat{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle \in \widehat{W}_0$ (полную $\exists\forall$-полную CD-непротиворечивую), что $\tilde{\Gamma} \supseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$ и $\tilde{\Delta} \ni \psi$.

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

Докажем нужный нам вариант леммы о насыщении:

Лемма

Если $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$ *CD-непротиворечива, полна и* $\exists\forall$*-полна, то существует* $\langle \hat{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$ *с теми же свойствами, такая что* $\tilde{\Gamma} \supseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$ *и* $\tilde{\Delta} \ni \psi$*.*

- Строим последовательно Γ_k и Δ_k, причём $\Delta_k = \Delta'_k$ всегда конечно, а $\Gamma_k = \Gamma \cup \Gamma'_k$, Γ'_k конечно.

Мир для опровержения $(\varphi \longrightarrow \psi)$

Докажем нужный нам вариант леммы о насыщении:

Лемма

Если $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$ CD-непротиворечива, полна и $\exists\forall$-полна, то существует $\langle \hat{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$ с теми же свойствами, такая что $\tilde{\Gamma} \supseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$ и $\tilde{\Delta} \ni \psi$.

- Строим последовательно Γ_k и Δ_k, причём $\Delta_k = \Delta'_k$ всегда конечно, а $\Gamma_k = \Gamma \cup \Gamma'_k$, Γ'_k конечно.
- $\Gamma'_0 = \{\varphi\}$, $\Delta_0 = \Delta'_0 = \{\psi\}$.

Мир для опровержения $(\varphi \longrightarrow \psi)$

Докажем нужный нам вариант леммы о насыщении:

Лемма

Если $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$ *CD-непротиворечива, полна и* $\exists\forall$*-полна, то существует* $\langle \hat{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$ *с теми же свойствами, такая что* $\tilde{\Gamma} \supseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$ *и* $\tilde{\Delta} \ni \psi$.

- Строим последовательно Γ_k и Δ_k, причём $\Delta_k = \Delta'_k$ всегда конечно, а $\Gamma_k = \Gamma \cup \Gamma'_k$, Γ'_k конечно.
- $\Gamma'_0 = \{\varphi\}$, $\Delta_0 = \Delta'_0 = \{\psi\}$.
- $\mathrm{CFm}_{\Omega+\hat{S}} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

Докажем нужный нам вариант леммы о насыщении:

Лемма

Если $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$ *CD-непротиворечива, полна и* $\exists\forall$*-полна, то существует* $\langle \hat{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$ *с теми же свойствами, такая что* $\tilde{\Gamma} \supseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$ *и* $\tilde{\Delta} \ni \psi$*.*

- Строим последовательно Γ_k и Δ_k, причём $\Delta_k = \Delta'_k$ всегда конечно, а $\Gamma_k = \Gamma \cup \Gamma'_k$, Γ'_k конечно.
- $\Gamma'_0 = \{\varphi\}$, $\Delta_0 = \Delta'_0 = \{\psi\}$.
- $\mathrm{CFm}_{\Omega + \hat{S}} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$
- Если ξ_k не имеет вида $\forall x\, \zeta(x)$ или $\exists x\, \zeta(x)$, то добавляем его либо к Γ'_{k-1}, либо к Δ'_{k-1}, в зависимости от CD-непротиворечивости.

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

Докажем нужный нам вариант леммы о насыщении:

Лемма

Если $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$ *CD-непротиворечива, полна и* $\exists\forall$*-полна, то существует* $\langle \hat{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$ *с теми же свойствами, такая что* $\tilde{\Gamma} \supseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$ *и* $\tilde{\Delta} \ni \psi$*.*

- Строим последовательно Γ_k и Δ_k, причём $\Delta_k = \Delta'_k$ всегда конечно, а $\Gamma_k = \Gamma \cup \Gamma'_k$, Γ'_k конечно.
- $\Gamma'_0 = \{\varphi\}$, $\Delta_0 = \Delta'_0 = \{\psi\}$.
- $\mathrm{CFm}_{\Omega + \hat{S}} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$
- Если ξ_k не имеет вида $\forall x\, \zeta(x)$ или $\exists x\, \zeta(x)$, то добавляем его либо к Γ'_{k-1}, либо к Δ'_{k-1}, в зависимости от CD-непротиворечивости.
- То же, если $\forall$-формула добавляется к Γ'_{k-1} или $\exists$-формула добавляется к Δ'_{k-1}.

Мир для опровержения $(\varphi \rightarrow \psi)$

- В интересных случаях оказывается, что в присутствии CD и $\exists\forall$-полноты нужные свидетели уже запасены!

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

- В интересных случаях оказывается, что в присутствии CD и $\exists\forall$-полноты нужные свидетели уже запасены!
- Пусть $\xi_k = \exists x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x)\}, \Delta'_{k-1} \rangle$ CD-непротиворечива.

Мир для опровержения $(\varphi \longrightarrow \psi)$

- В интересных случаях оказывается, что в присутствии CD и ∃∀-полноты нужные свидетели уже запасены!
- Пусть $\xi_k = \exists x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x)\}, \Delta'_{k-1} \rangle$ CD-непротиворечива.
- Докажем, что найдётся $a \in \hat{S}$, для которой $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x), \zeta(a)\}, \Delta'_{k-1} \rangle$ CD-непротиворечива.

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

- В интересных случаях оказывается, что в присутствии CD и $\exists\forall$-полноты нужные свидетели уже запасены!
- Пусть $\xi_k = \exists x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x)\}, \Delta'_{k-1} \rangle$ CD-непротиворечива.
- Докажем, что найдётся $a \in \hat{S}$, для которой $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x), \zeta(a)\}, \Delta'_{k-1} \rangle$ CD-непротиворечива.
- Для любой конечной $\Gamma' \subseteq \Gamma$ имеем $\nvdash \bigwedge \Gamma' \wedge \bigwedge \Gamma'_{k-1} \wedge \big(\exists x\, \zeta(x)\big) \to \bigvee \Delta'_{k-1}$.

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

- В интересных случаях оказывается, что в присутствии CD и ∃∀-полноты нужные свидетели уже запасены!
- Пусть $\xi_k = \exists x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x)\}, \Delta'_{k-1}\rangle$ CD-непротиворечива.
- Докажем, что найдётся $a \in \hat{S}$, для которой $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x), \zeta(a)\}, \Delta'_{k-1}\rangle$ CD-непротиворечива.
- Для любой конечной $\Gamma' \subseteq \Gamma$ имеем $\nvdash \bigwedge \Gamma' \wedge \bigwedge \Gamma'_{k-1} \wedge \big(\exists x\, \zeta(x)\big) \to \bigvee \Delta'_{k-1}$.
- $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \wedge \big(\exists x\, \zeta(x)\big) \to \bigvee \Delta'_{k-1}$

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

- В интересных случаях оказывается, что в присутствии CD и $\exists\forall$-полноты нужные свидетели уже запасены!
- Пусть $\xi_k = \exists x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x)\}, \Delta'_{k-1} \rangle$ CD-непротиворечива.
- Докажем, что найдётся $a \in \hat{S}$, для которой $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x), \zeta(a)\}, \Delta'_{k-1} \rangle$ CD-непротиворечива.
- Для любой конечной $\Gamma' \subseteq \Gamma$ имеем $\nvdash \bigwedge \Gamma' \wedge \bigwedge \Gamma'_{k-1} \wedge \big(\exists x\, \zeta(x)\big) \to \bigvee \Delta'_{k-1}$.
- $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \wedge \big(\exists x\, \zeta(x)\big) \to \bigvee \Delta'_{k-1}$
- $\Gamma \nvdash \forall x \left(\bigwedge \Gamma' \wedge \zeta(x) \to \bigvee \Delta'_{k-1}\right)$ (по аксиоме)

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

- В интересных случаях оказывается, что в присутствии CD и ∃∀-полноты нужные свидетели уже запасены!
- Пусть $\xi_k = \exists x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x)\}, \Delta'_{k-1} \rangle$ CD-непротиворечива.
- Докажем, что найдётся $a \in \hat{S}$, для которой $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x), \zeta(a)\}, \Delta'_{k-1} \rangle$ CD-непротиворечива.
- Для любой конечной $\Gamma' \subseteq \Gamma$ имеем $\nvdash \bigwedge \Gamma' \wedge \bigwedge \Gamma'_{k-1} \wedge \big(\exists x\, \zeta(x)\big) \to \bigvee \Delta'_{k-1}$.
- $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \wedge \big(\exists x\, \zeta(x)\big) \to \bigvee \Delta'_{k-1}$
- $\Gamma \nvdash \forall x \left(\bigwedge \Gamma' \wedge \zeta(x) \to \bigvee \Delta'_{k-1}\right)$ (по аксиоме)
- $\left(\forall x \left(\bigwedge \Gamma' \wedge \zeta(x) \to \bigvee \Delta'_{k-1}\right)\right) \in \Delta$ (полнота)

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

- В интересных случаях оказывается, что в присутствии CD и $\exists\forall$-полноты нужные свидетели уже запасены!
- Пусть $\xi_k = \exists x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x)\}, \Delta'_{k-1} \rangle$ CD-непротиворечива.
- Докажем, что найдётся $a \in \hat{S}$, для которой $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x), \zeta(a)\}, \Delta'_{k-1} \rangle$ CD-непротиворечива.
- Для любой конечной $\Gamma' \subseteq \Gamma$ имеем $\nvdash \bigwedge \Gamma' \wedge \bigwedge \Gamma'_{k-1} \wedge \big(\exists x\, \zeta(x)\big) \to \bigvee \Delta'_{k-1}$.
- $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \wedge \big(\exists x\, \zeta(x)\big) \to \bigvee \Delta'_{k-1}$
- $\Gamma \nvdash \forall x \left(\bigwedge \Gamma' \wedge \zeta(x) \to \bigvee \Delta'_{k-1}\right)$ (по аксиоме)
- $\left(\forall x \left(\bigwedge \Gamma' \wedge \zeta(x) \to \bigvee \Delta'_{k-1}\right)\right) \in \Delta$ (полнота)
- $\left(\bigwedge \Gamma' \wedge \zeta(a) \to \bigvee \Delta'_{k-1}\right) \in \Delta$ для некоторой $a \in \hat{S}$ ($\exists\forall$-полнота)

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

- В интересных случаях оказывается, что в присутствии CD и $\exists\forall$-полноты нужные свидетели уже запасены!
- Пусть $\xi_k = \exists x\,\zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\,\zeta(x)\}, \Delta'_{k-1}\rangle$ CD-непротиворечива.
- Докажем, что найдётся $a \in \hat{S}$, для которой $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\,\zeta(x), \zeta(a)\}, \Delta'_{k-1}\rangle$ CD-непротиворечива.
- Для любой конечной $\Gamma' \subseteq \Gamma$ имеем $\nvdash \bigwedge \Gamma' \wedge \bigwedge \Gamma'_{k-1} \wedge \big(\exists x\,\zeta(x)\big) \to \bigvee \Delta'_{k-1}$.
- $\Gamma \nVdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \wedge \big(\exists x\,\zeta(x)\big) \to \bigvee \Delta'_{k-1}$
- $\Gamma \nVdash \forall x \,\big(\bigwedge \Gamma' \wedge \zeta(x) \to \bigvee \Delta'_{k-1}\big)$ (по аксиоме)
- $\big(\forall x \,\big(\bigwedge \Gamma' \wedge \zeta(x) \to \bigvee \Delta'_{k-1}\big)\big) \in \Delta$ (полнота)
- $\big(\bigwedge \Gamma' \wedge \zeta(a) \to \bigvee \Delta'_{k-1}\big) \in \Delta$ для некоторой $a \in \hat{S}$ ($\exists\forall$-полнота)
- $\Gamma \nVdash \bigwedge \Gamma' \wedge \zeta(a) \to \bigvee \Delta'_{k-1}$

Мир для опровержения $(\varphi \longrightarrow \psi)$

- В интересных случаях оказывается, что в присутствии CD и ∃∀-полноты нужные свидетели уже запасены!
- Пусть $\xi_k = \exists x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x)\}, \Delta'_{k-1}\rangle$ CD-непротиворечива.
- Докажем, что найдётся $a \in \hat{S}$, для которой $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1} \cup \{\exists x\, \zeta(x), \zeta(a)\}, \Delta'_{k-1}\rangle$ CD-непротиворечива.
- Для любой конечной $\Gamma' \subseteq \Gamma$ имеем $\nvdash \bigwedge \Gamma' \wedge \bigwedge \Gamma'_{k-1} \wedge \big(\exists x\, \zeta(x)\big) \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1}$.
- $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \wedge \big(\exists x\, \zeta(x)\big) \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1}$
- $\Gamma \nvdash \forall x \big(\bigwedge \Gamma' \wedge \zeta(x) \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1}\big)$ (по аксиоме)
- $\big(\forall x \big(\bigwedge \Gamma' \wedge \zeta(x) \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1}\big)\big) \in \Delta$ (полнота)
- $\big(\bigwedge \Gamma' \wedge \zeta(a) \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1}\big) \in \Delta$ для некоторой $a \in \hat{S}$ (∃∀-полнота)
- $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma' \wedge \zeta(a) \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1}$
- $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma' \wedge \big(\exists x\, \zeta(x)\big) \wedge \zeta(a) \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1}$ (т.к. $\zeta(a) \longrightarrow \exists x\, \zeta(x)$)

Мир для опровержения $(\varphi \longrightarrow \psi)$

- Пусть теперь $\xi_k = \forall x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1}, \Delta'_{k-1} \cup \{\forall x\, \zeta(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива.

Мир для опровержения $(\varphi \longrightarrow \psi)$

- Пусть теперь $\xi_k = \forall x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1}, \Delta'_{k-1} \cup \{\forall x\, \zeta(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива.
- Из CD-непротиворечивости получаем $\Gamma \nVdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \forall x\, \zeta(x)$.

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

- Пусть теперь $\xi_k = \forall x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1}, \Delta'_{k-1} \cup \{\forall x\, \zeta(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива.
- Из CD-непротиворечивости получаем $\Gamma \nVdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \forall x\, \zeta(x)$.
- $\Gamma \nVdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \to \forall x \left(\bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)$ (используя CD)

Мир для опровержения $(\varphi \longrightarrow \psi)$

- Пусть теперь $\xi_k = \forall x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1}, \Delta'_{k-1} \cup \{\forall x\, \zeta(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива.
- Из CD-непротиворечивости получаем $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \forall x\, \zeta(x)$.
- $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \longrightarrow \forall x \left(\bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)$ (используя CD)
- $\Gamma \nvdash \forall x \left(\Gamma'_{k-1} \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)$ (по аксиоме)

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

- Пусть теперь $\xi_k = \forall x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1}, \Delta'_{k-1} \cup \{\forall x\, \zeta(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива.
- Из CD-непротиворечивости получаем $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \forall x\, \zeta(x)$.
- $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \to \forall x \left(\bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)$ (используя CD)
- $\Gamma \nvdash \forall x \left(\Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)$ (по аксиоме)
- $\left(\forall x \left(\Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)\right) \in \Delta$ (полнота)

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

- Пусть теперь $\xi_k = \forall x\,\zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1}, \Delta'_{k-1} \cup \{\forall x\,\zeta(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива.
- Из CD-непротиворечивости получаем $\Gamma \nVdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \forall x\,\zeta(x)$.
- $\Gamma \nVdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \to \forall x \left(\bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)$ (используя CD)
- $\Gamma \nVdash \forall x \left(\Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)$ (по аксиоме)
- $\left(\forall x \left(\Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)\right) \in \Delta$ (полнота)
- $\left(\Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(b)\right) \in \Delta$ для некоторой $b \in \hat{S}$ ($\exists\forall$-полнота)

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

- Пусть теперь $\xi_k = \forall x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1}, \Delta'_{k-1} \cup \{\forall x\, \zeta(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива.
- Из CD-непротиворечивости получаем $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \forall x\, \zeta(x)$.
- $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \to \forall x \left(\bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)$ (используя CD)
- $\Gamma \nvdash \forall x \left(\Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)$ (по аксиоме)
- $\left(\forall x \left(\Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)\right) \in \Delta$ (полнота)
- $\left(\Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(b)\right) \in \Delta$ для некоторой $b \in \hat{S}$ ($\exists\forall$-полнота)
- $\Gamma \nvdash \Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(b)$

Мир для опровержения $(\varphi \to \psi)$

- Пусть теперь $\xi_k = \forall x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1}, \Delta'_{k-1} \cup \{\forall x\, \zeta(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива.
- Из CD-непротиворечивости получаем $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \forall x\, \zeta(x)$.
- $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \to \forall x \left(\bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)$ (используя CD)
- $\Gamma \nvdash \forall x \left(\Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)$ (по аксиоме)
- $\left(\forall x \left(\Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)\right) \in \Delta$ (полнота)
- $\left(\Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(b)\right) \in \Delta$ для некоторой $b \in \hat{S}$ ($\exists\forall$-полнота)
- $\Gamma \nvdash \Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(b)$
- $\Gamma \nvdash \Gamma'_{k-1} \to \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \left(\forall x\, \zeta(x)\right) \vee \zeta(b)$ (т.к. $\left(\forall x\, \zeta(x)\right) \to \zeta(b)$)

Мир для опровержения $(\varphi \longrightarrow \psi)$

- Пусть теперь $\xi_k = \forall x\, \zeta(x)$ и $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1}, \Delta'_{k-1} \cup \{\forall x\, \zeta(x)\}\rangle$ CD-непротиворечива.
- Из CD-непротиворечивости получаем $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \forall x\, \zeta(x)$.
- $\Gamma \nvdash \bigwedge \Gamma'_{k-1} \longrightarrow \forall x \left(\bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)$ (используя CD)
- $\Gamma \nvdash \forall x \left(\Gamma'_{k-1} \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)$ (по аксиоме)
- $\left(\forall x \left(\Gamma'_{k-1} \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(x)\right)\right) \in \Delta$ (полнота)
- $\left(\Gamma'_{k-1} \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(b)\right) \in \Delta$ для некоторой $b \in \hat{S}$ ($\exists\forall$-полнота)
- $\Gamma \nvdash \Gamma'_{k-1} \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \zeta(b)$
- $\Gamma \nvdash \Gamma'_{k-1} \longrightarrow \bigvee \Delta'_{k-1} \vee \left(\forall x\, \zeta(x)\right) \vee \zeta(b)$ (т.к. $\left(\forall x\, \zeta(x)\right) \longrightarrow \zeta(b)$)
- Отсюда $\langle \hat{S}, \Gamma \cup \Gamma'_{k-1}, \Delta'_{k-1} \cup \{\forall x\, \zeta(x), \zeta(b)\}\rangle$ CD-непротиворечива.

Мир для опровержения $(\varphi \longrightarrow \psi)$

- Наконец, положим $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma'_k$ и $\tilde{\Delta} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Delta'_k$.

Мир для опровержения $(\varphi \longrightarrow \psi)$

- Наконец, положим $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma'_k$ и $\tilde{\Delta} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Delta'_k$.
- Би-теория $\langle \hat{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$ CD-непротиворечива, полна и $\exists\forall$-полна.

Мир для опровержения $(\varphi \longrightarrow \psi)$

- Наконец, положим $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma'_k$ и $\tilde{\Delta} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Delta'_k$.
- Би-теория $\langle \hat{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$ CD-непротиворечива, полна и $\exists\forall$-полна.
- При этом мы сохранили старое множество констант $\hat{S}$.

Мир для опровержения $(\varphi \longrightarrow \psi)$

- Наконец, положим $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma'_k$ и $\tilde{\Delta} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Delta'_k$.
- Би-теория $\langle \hat{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$ CD-непротиворечива, полна и $\exists\forall$-полна.
- При этом мы сохранили старое множество констант $\hat{S}$.
- $\varphi \in \Gamma'_0 \subseteq \tilde{\Gamma}$ и $\psi \in \Delta'_0 \subseteq \tilde{\Delta}$; $\Gamma \subseteq \tilde{\Gamma}$.

Мир для опровержения $(\varphi \longrightarrow \psi)$

- Наконец, положим $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \Gamma'_k$ и $\tilde{\Delta} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Delta'_k$.
- Би-теория $\langle \hat{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$ CD-непротиворечива, полна и $\exists\forall$-полна.
- При этом мы сохранили старое множество констант $\hat{S}$.
- $\varphi \in \Gamma'_0 \subseteq \tilde{\Gamma}$ и $\psi \in \Delta'_0 \subseteq \tilde{\Delta}$; $\Gamma \subseteq \tilde{\Gamma}$.
- Значит, для $u = \langle \hat{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$ и $w = \langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$ имеем $w\, R_C\, u$, $u \Vdash \varphi$ и $u \nVdash \psi$.

Мир для опровержения $(\varphi \longrightarrow \psi)$

- Наконец, положим $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \Gamma'_k$ и $\tilde{\Delta} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Delta'_k$.
- Би-теория $\langle \hat{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$ CD-непротиворечива, полна и $\exists\forall$-полна.
- При этом мы сохранили старое множество констант $\hat{S}$.
- $\varphi \in \Gamma'_0 \subseteq \tilde{\Gamma}$ и $\psi \in \Delta'_0 \subseteq \tilde{\Delta}$; $\Gamma \subseteq \tilde{\Gamma}$.
- Значит, для $u = \langle \hat{S}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \rangle$ и $w = \langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$ имеем $w\, R_C\, u$, $u \Vdash \varphi$ и $u \nVdash \psi$.
- Отсюда $w \nVdash \varphi \longrightarrow \psi$.

Завершение доказательства полноты FO-Int + CD

- Пусть FO-Int + CD $\nvdash \varphi$.

Завершение доказательства полноты FO-Int + CD

- Пусть FO-Int + CD $\nvdash \varphi$.
- Тогда би-теория $\langle \mathrm{Cnst}_\Omega, \varnothing, \{\varphi\} \rangle$ CD-непротиворечива.

Завершение доказательства полноты FO-Int + CD

- Пусть FO-Int + CD $\nvdash \varphi$.
- Тогда би-теория $\langle \mathrm{Cnst}_\Omega, \varnothing, \{\varphi\} \rangle$ CD-непротиворечива.
- По лемме о насыщении она вкладывается в мир $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$ канонической модели $\widehat{\mathscr{M}_C}$ (т.е. CD-непротиворечивую полную $\exists\forall$-полную би-теорию).

Завершение доказательства полноты FO-Int + CD

- Пусть FO-Int + CD $\nvdash \varphi$.
- Тогда би-теория $\langle \mathrm{Cnst}_\Omega, \varnothing, \{\varphi\} \rangle$ CD-непротиворечива.
- По лемме о насыщении она вкладывается в мир $\langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle$ канонической модели $\widehat{\mathscr{M}}_C$ (т.е. CD-непротиворечивую полную $\exists\forall$-полную би-теорию).
- Поскольку $\varphi \in \Delta$, по основной семантической лемме $\widehat{\mathscr{M}}_C, \langle \hat{S}, \Gamma, \Delta \rangle \nVdash \varphi$.

Постоянство области: задачи

- Выполняется ли для FO-Int + CD дистрибутивное свойство?
- ... экзистенциальное свойство?
- Выводима ли в FO-Int + CD «кабацкая формула»?