Задачи по теоремам Гёделя о неполноте

к курсу «Математическая логика», составитель С. Л. Кузнецов

Задачи

1. Пусть u и v — замкнутые (т.е. не содержащие переменных) арифметические термы. Докажите, что формула $u = v$ доказуема в PA (арифметика Пеано) тогда и только тогда, когда u и v задают одно и то же натуральное число.

2. Существуют ли замкнутые арифметические формулы φ и ψ, такие что $\varphi \vee \psi$ доказуема в PA, но при этом ни φ, ни ψ в PA не доказуемы?

3. Существует ли такая арифметическая формула $\varphi(x)$ с одной свободной переменной x, что формула $\exists x\, \varphi(x)$ доказуема в PA, а для любого конкретного натурального числа n формула $\varphi(\underline{n})$ недоказуема?

4. Существует ли такая арифметическая формула $\psi(x)$ с одной свободной переменной x, что формула $\forall x\, \psi(x)$ не доказуема в PA, а для любого конкретного натурального числа n формула $\psi(\underline{n})$ доказуема?

5. Пусть $\widetilde{\mathrm{Pr}}$ — россеровский предикат доказуемости для теории $T = \mathsf{PA}$:

   $$\widetilde{\mathrm{Pr}}(x) = \exists y \left(\mathrm{Prf}_{\mathsf{PA}}(y, x) \wedge \forall z < y\, (\neg \mathrm{Prf}_{\mathsf{PA}}(z, \hat{\neg}(x)))\right).$$

   Определим «россеровское утверждение о непротиворечивости» $\widetilde{\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}}} = \neg \widetilde{\mathrm{Pr}}(\ulcorner \bot \urcorner)$. Доказуемо ли в PA утверждение $\widetilde{\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}}}$? Выполняются ли для $\widetilde{\mathrm{Pr}}$ условия доказуемости Гёделя – Лёба?

6. Докажите, что если для некоторой Σ_1-формулы $\varphi(x, y)$ в стандартной модели $\mathbb{N}$ истинна формула $\forall x\, \exists! y\, \varphi(x, y)$, то функция f, сопоставляющая каждому n то единственное значение m, для которого $\mathbb{N} \vDash \varphi(\underline{n}, \underline{m})$, алгоритмически вычислимо. Верно ли это утверждение для произвольной арифметической формулы $\varphi(x, y)$?

Упражнения

1. Докажите в PA:

$x = 0 \vee \exists y\, (x = Sy)$	$\neg (x < x)$
$x + y = y + x$	$(x < y \wedge y < z) \to x < z$
$(x + y) + z = x + (y + z)$	$x < y \vee y < x \vee x = y$
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	$x < y \to x + z < y + z$
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	$(0 < z \wedge x < y) \to x \cdot z < y \cdot z$
$x \cdot y = y \cdot x$	

   Неравенство $u < v$ — это сокращение от $\exists z\, (v = u + Sz)$.

2. Пусть n — фиксированное натуральное число. Докажите в PA:

   $$(x < \underline{n}) \leftrightarrow (x = 0 \vee x = \underline{1} \vee \ldots \vee x = \underline{n-1}).$$

3. Докажите в PA свойства НОК (определённого как псевдотерм): (а) НОК делится на каждое из набора чисел и делит любое их общее кратное; (б) если p простое и p делит НОК, то p делит одно из чисел данного набора.

4. Чему равен (как число) гёделев номер терма $\underline{2} + \underline{2}$?

5. Гёделева неподвижная точка γ для PA удовлетворяет соотношению $\mathsf{PA} \vdash \gamma \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner \gamma \urcorner)$. Доказуема ли γ в PA?