

Категориальные грамматики

Лекция 2 (21.02.2018)

Степан Кузнецов, Мати Пентус, Алексей Сорокин

МГУ им. М. В. Ломоносова, межфакультетский курс,
весенний семестр 2017–2018 учебного года

Базовая категориальная грамматика

Иван	любит	Марью.
John	loves	Mary.

Базовая категориальная грамматика

Иван любит Марью.

John loves Mary.

np $(np \setminus s) / np$ np $\rightarrow s$

Базовая категориальная грамматика

Иван любит Марью.
John loves Mary.
 np $(np \setminus s) / np$ np $\rightarrow s$

Mary smiles charmingly.
 np $np \setminus s$ $(np \setminus s) \setminus (np \setminus s)$ $\rightarrow s$

The city never sleeps.
 np / n n $(np \setminus s) / (np \setminus s)$ $np \setminus s$ $\rightarrow s$

John saw Bill yesterday.
 np $(np \setminus s) / np$ np $(np \setminus s) \setminus (np \setminus s)$ $\rightarrow s$

Mary gave the book to Ann.
 np $((np \setminus s) / pp) / np$ np / n n pp / np np $\rightarrow s$

Базовая категориальная грамматика

Правила сокращения: $A, A \setminus B \rightarrow B$ $B / A, A \rightarrow B$.

Базовая категориальная грамматика

Правила сокращения: $A, A \setminus B \rightarrow B$ $B / A, A \rightarrow B$.

Modus ponens:

- ▶ Если доказано A и доказано, что из A следует B , то доказано B .

Базовая категориальная грамматика

Правила сокращения: $A, A \setminus B \rightarrow B$ $B / A, A \rightarrow B$.

Modus ponens:

- ▶ Если доказано A и доказано, что из A следует B , то доказано B .
- ▶ Если построен объект типа A и функция из A в B , то можно построить объект типа B .

Базовая категориальная грамматика

Правила сокращения: $A, A \setminus B \rightarrow B$ $B / A, A \rightarrow B$.

Modus ponens:

- ▶ Если доказано A и доказано, что из A следует B , то доказано B .
- ▶ Если построен объект u типа A и функция f из A в B , то можно построить объект $f(u)$ типа B .

Базовая категориальная грамматика

Правила сокращения: $A, A \setminus B \rightarrow B$ $B / A, A \rightarrow B$.

Modus ponens:

- ▶ Если доказано A и доказано, что из A следует B , то доказано B .
- ▶ Если построен объект u типа A и функция f из A в B , то можно построить объект $f(u)$ типа B .
- ▶ В исчислении *синтаксических* типов важен также порядок.

Базовая категориальная грамматика

Правила сокращения: $A, A \setminus B \rightarrow B$ $B / A, A \rightarrow B$.

Modus ponens:

- ▶ Если доказано A и доказано, что из A следует B , то доказано B .
- ▶ Если построен объект u типа A и функция f из A в B , то можно построить объект $f(u)$ типа B .
- ▶ В исчислении *синтаксических* типов важен также порядок.

Правило сечения:

- ▶ Если $\Pi \rightarrow A$ и $\Phi_1, A, \Phi_2 \rightarrow B$, то $\Phi_1, \Pi, \Phi_2 \rightarrow B$.

Базовая категориальная грамматика

Правила сокращения: $A, A \setminus B \rightarrow B$ $B / A, A \rightarrow B$.

Modus ponens:

- ▶ Если доказано A и доказано, что из A следует B , то доказано B .
- ▶ Если построен объект u типа A и функция f из A в B , то можно построить объект $f(u)$ типа B .
- ▶ В исчислении *синтаксических* типов важен также порядок.

Правило сечения:

- ▶ Если $\Pi \rightarrow A$ и $\Phi_1, A, \Phi_2 \rightarrow B$, то $\Phi_1, \Pi, \Phi_2 \rightarrow B$.
- ▶ Как только мы установили, что некоторая (сложная) синтаксическая конструкция имеет тип A , её можно использовать в любом месте, где допустим объект типа A .

Более сложные конструкции: союзы

The girl who likes Pete hates John.

Более сложные конструкции: союзы

The girl who likes Pete hates John.

np/n n $(n \setminus n) / (np \setminus s)$ $(np \setminus s) / np$ np $(np \setminus s) / np$ $np \rightarrow s$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow np \setminus s}$

Более сложные конструкции: союзы

The girl who likes Pete hates John.
 $np/n \quad n \quad (n \setminus n) / (np \setminus s) \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad np \quad (np \setminus s) / np}_{\rightarrow np \setminus s} \quad np \rightarrow s$

John loves Mary and Pete loves Kate.
 $np \quad (np \setminus s) / np \quad np \quad (s \setminus s) / s \quad np \quad (np \setminus s) / np \quad np \rightarrow s$

Более сложные конструкции: союзы

The girl who likes Pete hates John.
 $np/n \quad n \quad (n \setminus n)/(np \setminus s) \quad \underbrace{(np \setminus s)/np \quad np \quad (np \setminus s)/np}_{\rightarrow np \setminus s} \quad np \rightarrow s$

John loves Mary and Pete loves Kate.
 $np \quad (np \setminus s)/np \quad np \quad (s \setminus s)/s \quad np \quad (np \setminus s)/np \quad np \rightarrow s$

Mary loves Pete and hates John.
 $np \quad \underbrace{(np \setminus s)/np \quad np}_{\rightarrow np \setminus s} \quad ((np \setminus s) \setminus (np \setminus s))/(np \setminus s) \quad \underbrace{(np \setminus s)/np \quad np}_{\rightarrow np \setminus s} \rightarrow s$

Более сложные конструкции: союзы

The girl who likes Pete hates John.
 $np/n \quad n \quad (n \setminus n) / (np \setminus s) \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad np \quad (np \setminus s) / np}_{\rightarrow np \setminus s} \quad np \rightarrow s$

John loves Mary and Pete loves Kate.
 $np \quad (np \setminus s) / np \quad np \quad (s \setminus s) / s \quad np \quad (np \setminus s) / np \quad np \rightarrow s$

Mary loves Pete and hates John.
 $np \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad np}_{\rightarrow np \setminus s} \quad ((np \setminus s) \setminus (np \setminus s)) / (np \setminus s) \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad np}_{\rightarrow np \setminus s} \rightarrow s$

The girl whom John likes hates John.

Более сложные конструкции: союзы

The girl who likes Pete hates John.
 np/n n $(n \setminus n) / (np \setminus s)$ $(np \setminus s) / np$ np $(np \setminus s) / np$ $np \rightarrow s$
 $\underbrace{\hspace{15em}}_{\rightarrow np \setminus s}$

John loves Mary and Pete loves Kate.
 np $(np \setminus s) / np$ np $(s \setminus s) / s$ np $(np \setminus s) / np$ $np \rightarrow s$

Mary loves Pete and hates John.
 np $(np \setminus s) / np$ np $((np \setminus s) \setminus (np \setminus s)) / (np \setminus s)$ $(np \setminus s) / np$ $np \rightarrow s$
 $\underbrace{\hspace{15em}}_{\rightarrow np \setminus s}$ $\underbrace{\hspace{15em}}_{\rightarrow np \setminus s}$

The girl whom John likes hates John.
 np/n n $?$ np $(np \setminus s) / np$ $(np \setminus s) / np$ $np \rightarrow s$

Более сложные конструкции: союзы

The girl who likes Pete hates John.
 $np/n \quad n \quad (n \setminus n) / (np \setminus s) \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad np \quad (np \setminus s) / np}_{\rightarrow np \setminus s} \quad np \rightarrow s$

John loves Mary and Pete loves Kate.
 $np \quad (np \setminus s) / np \quad np \quad (s \setminus s) / s \quad np \quad (np \setminus s) / np \quad np \rightarrow s$

Mary loves Pete and hates John.
 $np \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad np}_{\rightarrow np \setminus s} \quad ((np \setminus s) \setminus (np \setminus s)) / (np \setminus s) \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad np}_{\rightarrow np \setminus s} \rightarrow s$

The girl whom John likes hates John.
 $np/n \quad n \quad (n \setminus n) / (s / np) \quad np \quad (np \setminus s) / np \quad (np \setminus s) / np \quad np \rightarrow s$

Более сложные конструкции: транзитивность

(пример на итальянском языке)

Guarda	passare	il	treno.	
он/она наблюдает	проходить		поезд	
s / inf	inf / np	np / n	n	$\rightarrow s$

Более сложные конструкции: транзитивность

(пример на итальянском языке)

Guarda	passare	il	treno.	
он/она наблюдает	проходить		поезд	
s / inf	inf / np	np / n	n	$\rightarrow s$

Cosa	guarda	passare?	
что	он/она наблюдает	проходить	
$q / (s / np)$	s / inf	inf / np	$\nrightarrow q$

Более сложные конструкции: транзитивность

(пример на итальянском языке)

Guarda	passare	il	treno.	
он/она наблюдает	проходить		поезд	
s / inf	inf / np	np / n	n	$\rightarrow s$

Cosa	guarda	passare?	
что	он/она наблюдает	проходить	
$q / (s / np)$	s / inf	inf / np	$\nrightarrow q$
	$\underbrace{\hspace{10em}}$		
	$\nrightarrow s / np$		

Более сложные конструкции: транзитивность

(пример на итальянском языке)

Guarda	passare	il	treno.	
он/она наблюдает	проходить		поезд	
s / inf	inf / np	np / n	n	$\rightarrow s$

Cosa	guarda	passare?	
что	он/она наблюдает	проходить	
$q / (s / np)$	s / inf	inf / np	$\nrightarrow q$
	$\underbrace{\hspace{10em}}$		
	$\nrightarrow s / np$		

Нужно: $A / B, B / C \rightarrow A / C$.

Комбинаторные категориальные грамматики (CCG)

Добавим необходимые принципы как дополнительные аксиомы:

Комбинаторные категориальные грамматики (CCG)

Добавим необходимые принципы как дополнительные аксиомы:

- ▶ $(A \setminus B) / C \equiv A \setminus (B / C)$
(ассоциативность, или перестановка аргументов);

Комбинаторные категориальные грамматики (CCG)

Добавим необходимые принципы как дополнительные аксиомы:

- ▶ $(A \setminus B) / C \equiv A \setminus (B / C)$
(ассоциативность, или перестановка аргументов);
- ▶ $A / B, B / C \rightarrow A / C$
(транзитивность, или композиция функций);

Комбинаторные категориальные грамматики (CCG)

Добавим необходимые принципы как дополнительные аксиомы:

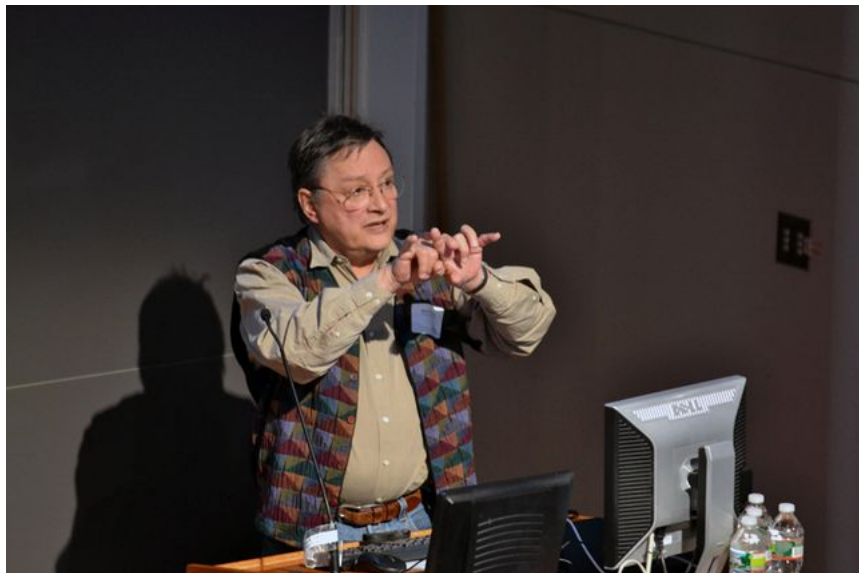
- ▶ $(A \setminus B) / C \equiv A \setminus (B / C)$
(ассоциативность, или перестановка аргументов);
- ▶ $A / B, B / C \rightarrow A / C$
(транзитивность, или композиция функций);
- ▶ $A \rightarrow (B / A) \setminus B; \quad A \rightarrow B / (A \setminus B)$
(поднятие типа);

Комбинаторные категориальные грамматики (CCG)

Добавим необходимые принципы как дополнительные аксиомы:

- ▶ $(A \setminus B) / C \equiv A \setminus (B / C)$
(ассоциативность, или перестановка аргументов);
- ▶ $A / B, B / C \rightarrow A / C$
(транзитивность, или композиция функций);
- ▶ $A \rightarrow (B / A) \setminus B; \quad A \rightarrow B / (A \setminus B)$
(поднятие типа);
- ▶ ...

Mark Steedman



Другой подход — построить исчисление, в котором все необходимые нам принципы будут *доказуемы*.

One calculus to derive them all!



$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \setminus B}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \setminus B}$$

$$\overline{np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \setminus B}$$

$$\frac{np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s}{np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np}$$

Секвенция — выражение вида $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$,
где A_i и B — формулы (синтаксические типы), построенные из
примитивных (s, np, n, \dots) с помощью операций / и \.

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \setminus B}$$

Секвенция — выражение вида $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$,
 где A_i и B — формулы (синтаксические типы), построенные из
 примитивных (s, pr, n, \dots) с помощью операций / и \.

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \setminus B}$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \rightarrow C}$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \setminus B, \Delta \rightarrow C}$$

Исчисление Ламбека

Секвенция — выражение вида $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$,

где A_i и B — формулы (синтаксические типы), построенные из примитивных (s, pr, n, \dots) с помощью операций $/$ и \backslash .

$$\overline{A \rightarrow A}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \backslash B}$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \rightarrow C}$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \backslash B, \Delta \rightarrow C}$$

Исчисление Ламбека

Секвенция — выражение вида $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$,

где A_i и B — формулы (синтаксические типы), построенные из примитивных (s, pr, n, \dots) с помощью операций / и \.

$$\overline{A \rightarrow A}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A} (\rightarrow /)$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \backslash B} (\rightarrow \backslash)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \backslash B, \Delta \rightarrow C} (\backslash \rightarrow)$$

Исчисление Ламбека

Секвенция — выражение вида $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$,
где A_i и B — формулы (синтаксические типы), построенные из
примитивных (s, pr, n, \dots) с помощью операций / и \.

$$\overline{A \rightarrow A}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A} (\rightarrow /)$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \setminus B} (\rightarrow \setminus)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \setminus B, \Delta \rightarrow C} (\setminus \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, A, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, \Delta \rightarrow C} (\text{cut}) \text{ — правило сечения}$$

Исчисление Ламбека

Секвенция — выражение вида $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$,
где A_i и B — формулы (синтаксические типы), построенные из
примитивных (s, pr, n, \dots) с помощью операций / и \.

$$\overline{A \rightarrow A}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A} (\rightarrow /)$$

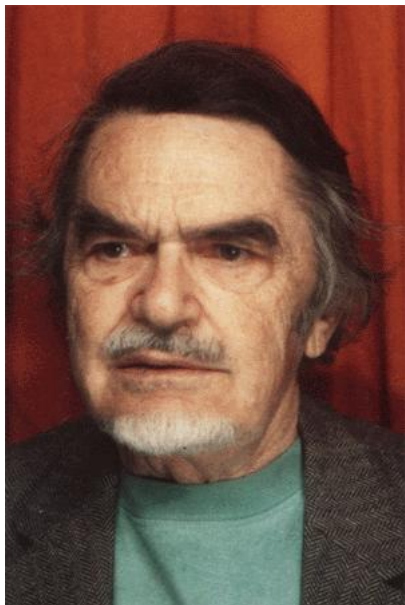
$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \setminus B} (\rightarrow \setminus)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \setminus B, \Delta \rightarrow C} (\setminus \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, A, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, \Delta \rightarrow C} (\text{cut}) \text{ — правило сечения, устранимо}$$

Joachim Lambek



Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$np/n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s$$

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$\frac{\frac{np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} \quad \frac{np / n, n, n \setminus n, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s}}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$\frac{\frac{np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s}{np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np} (\rightarrow /)}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$\frac{\frac{\frac{np \rightarrow np \quad s \rightarrow s}{np, np \setminus s \rightarrow s} (\setminus \rightarrow)}{np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (/ \rightarrow)}{np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np} (\rightarrow /)}{\frac{np / n, n, n \setminus n, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (/ \rightarrow)}$$

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$\frac{
 \frac{
 \frac{
 np \rightarrow np \quad s \rightarrow s}{np, np \setminus s \rightarrow s} (\setminus \rightarrow)
 }{np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (/ \rightarrow)
 }{np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np} (\rightarrow /)
 \quad
 \frac{
 n \rightarrow n \quad \frac{np / n, n, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s}{np / n, n, n \setminus n, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (\setminus \rightarrow)
 }{np / n, n, n \setminus n, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (/ \rightarrow)
 }{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$\frac{
 \frac{
 \frac{
 np \rightarrow np \quad s \rightarrow s}{np, np \setminus s \rightarrow s} (\setminus \rightarrow)
 }{np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (/ \rightarrow)
 }{np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np} (\rightarrow /)
 }{
 \frac{
 n \rightarrow n \quad np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s}{np / n, n, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (/ \rightarrow)
 }{
 np / n, n, n \setminus n, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (\setminus \rightarrow)
 }{
 np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$

Вывод закона транзитивности

$$\frac{C \rightarrow C \quad \frac{B \rightarrow B \quad A \rightarrow A}{A/B, B \rightarrow A} (/ \rightarrow)}{A/B, B/C, C \rightarrow A} (/ \rightarrow)$$
$$\frac{A/B, B/C, C \rightarrow A}{A/B, B/C \rightarrow A/C} (\rightarrow /)$$

Упражнения

1. Постройте выводы в исчислении Ламбека для следующих секвенций:

- ▶ $q / (s / np), s / inf, inf / np \rightarrow q$
(из примера “Cosa guarda passare?”)
- ▶ $A \setminus (B / C) \rightarrow (A \setminus B) / C$
- ▶ $B \setminus C \rightarrow (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$ и $C / B \rightarrow (C / A) / (B / A)$
(Geach rules)
- ▶ $A \rightarrow (B / A) \setminus B$ и $A \rightarrow B / (A \setminus B)$
- ▶ $(B / A) \setminus B \rightarrow ((A \setminus B) / A) \setminus (A \setminus B)$

Упражнения

1. Постройте выводы в исчислении Ламбека для следующих секвенций:
 - ▶ $q / (s / np), s / inf, inf / np \rightarrow q$
(из примера “Cosa guarda passare?”)
 - ▶ $A \setminus (B / C) \rightarrow (A \setminus B) / C$
 - ▶ $B \setminus C \rightarrow (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$ и $C / B \rightarrow (C / A) / (B / A)$
(Geach rules)
 - ▶ $A \rightarrow (B / A) \setminus B$ и $A \rightarrow B / (A \setminus B)$
 - ▶ $(B / A) \setminus B \rightarrow ((A \setminus B) / A) \setminus (A \setminus B)$
2. Подберите подходящие синтаксические типы и выведите в категориальной грамматике Ламбека следующие английские предложения:
 - ▶ John gave Mary the flower.
 - ▶ John believes that Mary loves Pete.
 - ▶ The girl whom John loves loves the boy who loves Kate.

Пустое слово

$$\frac{n \rightarrow n}{\rightarrow n / n}$$

Пустое слово

$$\frac{n \rightarrow n}{\rightarrow n / n}$$

Значит, пустое слово подходит под синтаксический тип n / n

Пустое слово

$$\frac{n \rightarrow n}{\rightarrow n / n}$$

Значит, пустое слово подходит под синтаксический тип n / n (имя прилагательное).

Пустое слово

$$\frac{n \rightarrow n}{\rightarrow n / n}$$

Значит, пустое слово подходит под синтаксический тип n / n (имя прилагательное).

Плохо: помимо “very interesting book” получаем также “very book”.

Пустое слово

$$\frac{n \rightarrow n}{\rightarrow n / n}$$

Значит, пустое слово подходит под синтаксический тип n / n (имя прилагательное).

Плохо: помимо “very interesting book” получаем также “very book”.

$$\frac{\frac{n \rightarrow n}{\rightarrow n / n} (\rightarrow /)}{\frac{n \rightarrow n \quad n \rightarrow n}{n / n, n \rightarrow n} (/ \rightarrow)} (/ \rightarrow)$$

Исчисление Ламбека

$$\overline{A \rightarrow A}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A} (\rightarrow /), \text{ где } \Pi \text{ не пусто}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \setminus B} (\rightarrow \setminus), \text{ где } \Pi \text{ не пусто}$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \setminus B, \Delta \rightarrow C} (\setminus \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, A, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, \Delta \rightarrow C} (\text{cut}), \text{ устранимо}$$

Свойства исчисления Ламбека

- ▶ Правило подстановки

Свойства исчисления Ламбека

- ▶ Правило подстановки
- ▶ Правило эквивалентной замены

Свойства исчисления Ламбека

- ▶ Правило подстановки
- ▶ Правило эквивалентной замены
- ▶ Устранимость сечения \Rightarrow алгоритмическая разрешимость

Свойства исчисления Ламбека

- ▶ Правило подстановки
- ▶ Правило эквивалентной замены
- ▶ Устранимость сечения \Rightarrow алгоритмическая разрешимость
- ▶ Свойство подформульности

Интерпретация исчисления Ламбека на формальных языках

Σ — множество лексем.

Σ^+ — множество непустых цепочек, составленных из элементов Σ .

Всякое подмножество Σ^+ — *формальный язык*.

Если A и B — формальные языки, то B / A состоит в точности из таких непустых цепочек u , что при добавлении к u справа *любой* цепочки v из A получается цепочка из B .

$$B / A = \{u \mid (\forall v \in A) uv \in B\}$$

$$A \setminus B = \{u \mid (\forall v \in A) vu \in B\}$$

Интерпретация исчисления Ламбека на формальных языках

Примитивные типы (s, pr, n, \dots) — *переменные* по формальным языкам.

Интерпретация исчисления Ламбека на формальных языках

Примитивные типы (s, pr, n, \dots) — *переменные* по формальным языкам.

Значения сложных типов однозначно определяются значениями переменных.

Интерпретация исчисления Ламбека на формальных языках

Примитивные типы (s, pr, n, \dots) — *переменные* по формальным языкам.

Значения сложных типов однозначно определяются значениями переменных.

Секвенция $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$ *общезначима* (всегда истинна), если при любых значениях переменных для любых цепочек u_i из A_i цепочка $u_1 \dots u_n$ лежит в B .

Интерпретация исчисления Ламбека на формальных языках

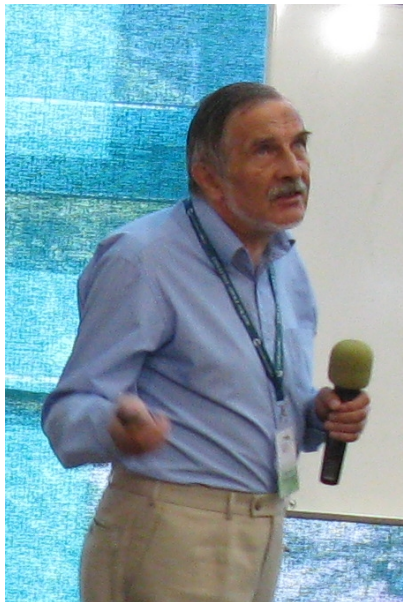
Примитивные типы (s, pr, n, \dots) — *переменные* по формальным языкам.

Значения сложных типов однозначно определяются значениями переменных.

Секвенция $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$ *общезначима* (всегда истинна), если при любых значениях переменных для любых цепочек u_i из A_i цепочка $u_1 \dots u_n$ лежит в B .

Теорема о полноте. Секвенция общезначима тогда и только тогда, когда её можно вывести в исчислении Ламбека.

Wojciech Buszkowski



Доказательство теоремы о полноте

Теорема о полноте. Секвенция общезначима тогда и только тогда, когда её можно вывести в исчислении Ламбека.

Доказательство теоремы о полноте

Теорема о полноте. Секвенция общезначима тогда и только тогда, когда её можно вывести в исчислении Ламбека.

\Leftarrow Аксиомы общезначимы; правила вывода не портят общезначимость.

Доказательство теоремы о полноте

Теорема о полноте. Секвенция общезначима тогда и только тогда, когда её можно вывести в исчислении Ламбека.

⊆ Аксиомы общезначимы; правила вывода не портят общезначимость.

⊇ Построим специальную интерпретацию. В качестве Σ возьмём множество всех синтаксических типов.

Доказательство теоремы о полноте

Теорема о полноте. Секвенция общезначима тогда и только тогда, когда её можно вывести в исчислении Ламбека.

⊆ Аксиомы общезначимы; правила вывода не портят общезначимость.

⊇ Построим специальную интерпретацию. В качестве Σ возьмём множество всех синтаксических типов.

Переменная p интерпретируется множеством таких цепочек $A_1 \dots A_n$, что секвенция $A_1, \dots, A_n \rightarrow p$ выводима.

Доказательство теоремы о полноте

Теорема о полноте. Секвенция общезначима тогда и только тогда, когда её можно вывести в исчислении Ламбека.

⊆ Аксиомы общезначимы; правила вывода не портят общезначимость.

⊇ Построим специальную интерпретацию. В качестве Σ возьмём множество всех синтаксических типов.

Переменная p интерпретируется множеством таких цепочек $A_1 \dots A_n$, что секвенция $A_1, \dots, A_n \rightarrow p$ выводима.

Лемма. Секвенция $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$ выводима тогда и только тогда, когда цепочка $A_1 \dots A_n$ лежит в языке, соответствующем типу B .

Доказательство теоремы о полноте

Теорема о полноте. Секвенция общезначима тогда и только тогда, когда её можно вывести в исчислении Ламбека.

\Leftarrow Аксиомы общезначимы; правила вывода не портят общезначимость.

\Rightarrow Построим специальную интерпретацию. В качестве Σ возьмём множество всех синтаксических типов.

Переменная p интерпретируется множеством таких цепочек $A_1 \dots A_n$, что секвенция $A_1, \dots, A_n \rightarrow p$ выводима.

Лемма. Секвенция $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$ выводима тогда и только тогда, когда цепочка $A_1 \dots A_n$ лежит в языке, соответствующем типу B .

Секвенция общезначима \Rightarrow истинна при специальной интерпретации \Rightarrow выводима.

Сочинительный союз

John runs and Pete walks.

Сочинительный союз

John runs and Pete walks.
np np \ s np np \ s

Сочинительный союз

John runs and Pete walks.
 $np \quad np \setminus s \quad (s \setminus s) / s \quad np \quad np \setminus s \quad \rightarrow s.$

Сочинительный союз

John runs and Pete walks.
 $np \quad np \setminus s \quad (s \setminus s) / s \quad np \quad np \setminus s \quad \rightarrow s.$

John walks or runs.
 $np \quad np \setminus s \quad ((np \setminus s) \setminus (np \setminus s)) / (np \setminus s) \quad np \setminus s \quad \rightarrow s.$

Сочинительный союз

John runs and Pete walks.
 $np \quad np \setminus s \quad (s \setminus s) / s \quad np \quad np \setminus s \quad \rightarrow s.$

John walks or runs.
 $np \quad np \setminus s \quad ((np \setminus s) \setminus (np \setminus s)) / (np \setminus s) \quad np \setminus s \quad \rightarrow s.$

Mary loves and Ann hates Pete.
 $np \quad (np \setminus s) / np \quad ((s / np) \setminus (s / np)) / (s / np) \quad np \quad (np \setminus s) / np \quad np \quad \rightarrow s.$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{s / np} \qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{s / np}$

Сочинительный союз

John runs and Pete walks.
 $np \quad np \setminus s \quad (s \setminus s) / s \quad np \quad np \setminus s \quad \rightarrow s.$

John walks or runs.
 $np \quad np \setminus s \quad ((np \setminus s) \setminus (np \setminus s)) / (np \setminus s) \quad np \setminus s \quad \rightarrow s.$

Mary loves and Ann hates Pete.
 $np \quad (np \setminus s) / np \quad ((s / np) \setminus (s / np)) / (s / np) \quad np \quad (np \setminus s) / np \quad np \quad \rightarrow s.$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{s / np} \qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{s / np}$

В первом приближении, “and” и “or” имеют тип $(A \setminus A) / A$ для любого A (полиморфизм).

Сочинительный союз: упражнения

Подберите подходящие синтаксические типы и выведите в категориальной грамматике Ламбека следующие английские предложения (словосочетания):

- ▶ Mary loves Pete and hates John.
- ▶ John didn't run and jump.
- ▶ the girl whom John loves and who loves Pete ($\rightarrow np$)
- ▶ John saw Bill yesterday and Mary today.
- ▶ John gave the book or sent the file to Ann.
- ▶ John gave the book to Ann and the record to Suzy.

Сочинительный союз

Иван	или	Пётр	поёт.
John	or	Pete	sings.

Сочинительный союз

Иван	или	Пётр	поёт.
John	or	Pete	sings.

np $(np \setminus np) / np$ np $np \setminus s \rightarrow s$

Сочинительный союз

Иван	или	Пётр	поёт.
John	or	Pete	sings.

np $(np \setminus np) / np$ np $np \setminus s \rightarrow s$

Синтаксически хорошо...

Сочинительный союз

Иван	или	Пётр	поёт.
John	or	Pete	sings.

np $(np \setminus np) / np$ np $np \setminus s \rightarrow s$

Синтаксически хорошо... семантически плохо!

Сочинительный союз

Иван	или	Пётр	поёт.
John	or	Pete	sings.

np $(np \setminus np) / np$ np $np \setminus s \rightarrow s$

Синтаксически хорошо... семантически плохо!

$\widetilde{\text{OR}}: D \rightarrow (D \rightarrow D)$

Сочинительный союз

Иван	или	Пётр	поёт.
John	or	Pete	sings.
np	$(np \setminus np) / np$	np	$np \setminus s \rightarrow s$
$\underbrace{\hspace{15em}}$			
$\rightarrow np$			

Синтаксически хорошо... семантически плохо!

$\widetilde{\text{OR}}: D \rightarrow (D \rightarrow D)$

Сочинительный союз

Иван	или	Пётр	поёт.
John	or	Pete	sings.
np	$(np \setminus np) / np$	np	$np \setminus s \rightarrow s$
$\underbrace{\hspace{15em}}$			
$\rightarrow np$			

Синтаксически хорошо... семантически плохо!

$\widetilde{\text{OR}}: D \rightarrow (D \rightarrow D)$

$\widetilde{\text{OR}}(\text{PETE})(\text{JOHN}): D$

Сочинительный союз

Иван	или	Пётр	поёт.
John	or	Pete	sings.
np	$(np \setminus np) / np$	np	$np \setminus s \rightarrow s$
$\underbrace{\hspace{15em}}_{\rightarrow np}$			

Синтаксически хорошо... семантически плохо!

$\widetilde{OR}: D \rightarrow (D \rightarrow D)$

$\widetilde{OR}(\text{PETE})(\text{JOHN}): D$

Однако в D нет объекта «Иван или Пётр».

Сочинительный союз

Иван	или	Пётр	поёт.
John	or	Pete	sings.
np	$(np \setminus np) / np$	np	$np \setminus s \rightarrow s$
$\underbrace{\hspace{15em}}_{\rightarrow np}$			

Синтаксически хорошо... семантически плохо!

$\widetilde{OR}: D \rightarrow (D \rightarrow D)$

$\widetilde{OR}(PETE)(JOHN): D$

Однако в D нет объекта «Иван или Пётр».

Неправильная семантика: $SING(\widetilde{OR}(PETE)(JOHN))$.

Сочинительный союз

Иван	или	Пётр	поёт.
John	or	Pete	sings.
np	$(np \setminus np) / np$	np	$np \setminus s \rightarrow s$
$\underbrace{\hspace{15em}}_{\rightarrow np}$			

Синтаксически хорошо... семантически плохо!

$\widetilde{OR}: D \rightarrow (D \rightarrow D)$

$\widetilde{OR}(PETE)(JOHN): D$

Однако в D нет объекта «Иван или Пётр».

Неправильная семантика: $SING(\widetilde{OR}(PETE)(JOHN))$.

Правильная семантика: $OR(SING(PETE))(SING(JOHN))$.

Сочинительный союз

Иван	или	Пётр	поёт.
John	or	Pete	sings.
np	$(np \setminus np) / np$	np	$np \setminus s \rightarrow s$
$\underbrace{\hspace{15em}}$			
$\rightarrow np$			

Синтаксически хорошо... семантически плохо!

$\widetilde{OR}: D \rightarrow (D \rightarrow D)$

$\widetilde{OR}(PETE)(JOHN): D$

Однако в D нет объекта «Иван или Пётр».

Неправильная семантика: $SING(\widetilde{OR}(PETE)(JOHN))$.

Правильная семантика: $SING(JOHN) \vee SING(PETE)$.