

Категориальные грамматики

Лекция 6 (21.03.2018)

Грамматики Ламбека и контекстно-свободные грамматики

Степан Кузнецов, Мати Пентус, Алексей Сорокин

МГУ им. М. В. Ломоносова, межфакультетский курс,
весенний семестр 2017/2018 учебного года

Теорема

Если формальный язык можно задать грамматикой Ламбека, то его также можно задать контекстно-свободной грамматикой.

Пример

Грамматика Ламбека.

синт. тип	простейшие выражения
$np \setminus s$	works, sleeps
np	John, this
n	idea
np/n	the, this
n/n	green, colourless

Грамматически корректное предложение.

This colourless green idea sleeps.
 $(np/n), (n/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s$

Определение

Длиной типа называется число вхождений примитивных типов.

Пример

$$\|np\| = 1$$

$$\|n\| = 1$$

$$\|np \setminus s\| = 2$$

$$\|np / n\| = 2$$

$$\|n / n\| = 2$$

$$\|(np \setminus s) / np\| = 3$$

$$\|s / (np \setminus s)\| = 3$$

Соответствующая контекстно-свободная грамматика.

$$\Sigma = \{\text{works, sleeps, John, idea, the, this, green, colourless}\}$$

$$N = \{s, n, np, (s \setminus s), (s \setminus n), (s \setminus np), (n \setminus s), (n \setminus n), (n \setminus np), (np \setminus s), (np \setminus n), (np \setminus np), (s/s), (s/n), (s/np), (n/s), (n/n), (n/np), (np/s), (np/n), (np/np), (s \cdot s), (s \cdot n), (s \cdot np), (n \cdot s), (n \cdot n), (n \cdot np), (np \cdot s), (np \cdot n), (np \cdot np)\}$$

$s \mapsto s (s \setminus s)$	$(np \setminus s) \mapsto \text{works}$
$s \mapsto n (n \setminus s)$	$(np \setminus s) \mapsto \text{sleeps}$
$s \mapsto np (np \setminus s)$	$np \mapsto \text{John}$
$s \mapsto (s/s) s$	$n \mapsto \text{idea}$
$s \mapsto (s/n) n$	$(np/n) \mapsto \text{the}$
$s \mapsto (s/np) np$	$(np/n) \mapsto \text{this}$
\vdots	$np \mapsto \text{this}$
$n \mapsto (n/n) n$	$(n/n) \mapsto \text{green}$
$np \mapsto (np/n) n$	$(n/n) \mapsto \text{colourless}$
$(n/n) \mapsto (n/n) (n/n)$	
\vdots	
$(np \cdot np) \mapsto np np$	
$(np \cdot np) \mapsto (np/np) (np \cdot np)$	

(Всего 144 правила.)

$s \mapsto s (s \setminus s)$	$(np \setminus s) \mapsto \text{works}$
$s \mapsto n (n \setminus s)$	$(np \setminus s) \mapsto \text{sleeps}$
$s \mapsto np (np \setminus s)$	$np \mapsto \text{John}$
$s \mapsto (s/s) s$	$n \mapsto \text{idea}$
$s \mapsto (s/n) n$	$(np/n) \mapsto \text{the}$
$s \mapsto (s/np) np$	$(np/n) \mapsto \text{this}$
\vdots	$np \mapsto \text{this}$
$n \mapsto (n/n) n$	$(n/n) \mapsto \text{green}$
$np \mapsto (np/n) n$	$(n/n) \mapsto \text{colourless}$
$(n/n) \mapsto (n/n) (n/n)$	
\vdots	
$(np \cdot np) \mapsto np np$	
$(np \cdot np) \mapsto (np/np) (np \cdot np)$	

$s \mapsto np (np \setminus s) \mapsto (np/n) n (np \setminus s) \mapsto (np/n) (n/n) n (np \setminus s) \mapsto$
 $\mapsto (np/n) (n/n) (n/n) n (np \setminus s) \mapsto \dots \mapsto \text{this colourless green idea sleeps}$

Аксиомы и правила исчисления Ламбека.

$$A \rightarrow A$$

$$\frac{\Phi \rightarrow B \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow A}{\Gamma, \Phi, \Delta \rightarrow A} \text{ (cut)}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow (A \setminus B)} \text{ } (\rightarrow \setminus) \text{ (если } \Pi \text{ непуста)}$$

$$\frac{\Phi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Phi, (A \setminus B), \Delta \rightarrow C} (\setminus \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow (B/A)} \text{ } (\rightarrow /) \text{ (если } \Pi \text{ непуста)}$$

$$\frac{\Phi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, (B/A), \Phi, \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow)$$

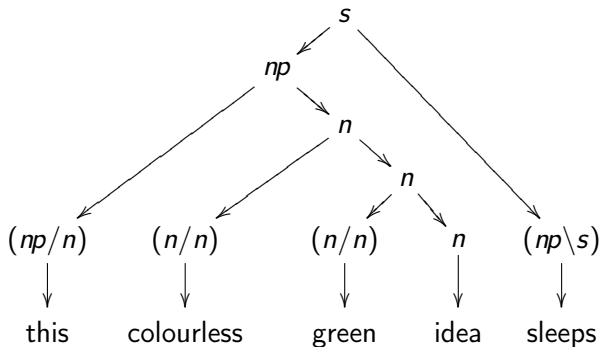
$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Delta \rightarrow B}{\Gamma, \Delta \rightarrow (A \cdot B)} \text{ } (\rightarrow \cdot)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, (A \cdot B), \Delta \rightarrow C} (\cdot \rightarrow)$$

Если секвенция $\Gamma \rightarrow A$ выводится в исчислении Ламбека, то пишут $\mathbb{L} \vdash \Gamma \rightarrow A$.

Пример

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 (n/n), n \rightarrow n \\
 \hline
 (np/n), n \rightarrow np \\
 \hline
 \vdots \\
 \hline
 (np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s \\
 \hline
 (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s \\
 \hline
 (np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s \quad (\text{cut}) \\
 \hline
 (np/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s \\
 \hline
 (np/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s \quad (\text{cut}) \\
 \hline
 (np/n), (n/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s \\
 \hline
 \text{This colourless green idea sleeps.}
 \end{array}$$



Теорема (Ламбек, 1958)

Любую секвенцию, выводимую в исчислении Ламбека, можно вывести без использования правила (cut).

Пример

$$\frac{\frac{\dots}{(n/n), n \rightarrow n} \quad np \rightarrow np}{(np/n), (n/n), n \rightarrow np} (/ \rightarrow) \quad \frac{\dots}{np, ((np \setminus s)/np), np \rightarrow s} \text{ (cut)}$$

$$np, ((np \setminus s)/np), (np/n), (n/n), n \rightarrow s$$

John visits a strange city.

$$\frac{\dots \quad \frac{np \rightarrow np \quad \frac{\dots}{np, ((np \setminus s)/np), np \rightarrow s} \text{ (cut)}}{np, ((np \setminus s)/np), np \rightarrow s} (/ \rightarrow)}{np, ((np \setminus s)/np), (np/n), (n/n), n \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{\frac{\dots}{(n/n), n \rightarrow n} \quad \frac{\dots}{np, ((np \setminus s)/np), np \rightarrow s}}{np, ((np \setminus s)/np), (np/n), (n/n), n \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$

Вывод с сечением.

$$\begin{array}{c}
 \frac{n \rightarrow n \quad n \rightarrow n}{(n/n), n \rightarrow n} \quad \frac{n \rightarrow n \quad n \rightarrow n}{(n/n), n \rightarrow n} \quad \frac{\frac{n \rightarrow n \quad np \rightarrow np}{(np/n), n \rightarrow np} \quad \frac{np \rightarrow np \quad s \rightarrow s}{np, (np \setminus s) \rightarrow s}}{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} \text{ (cut)} \\
 \frac{\frac{n \rightarrow n \quad n \rightarrow n}{(n/n), n \rightarrow n} \quad \frac{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s}{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} \text{ (cut)}}{(np/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} \text{ (cut)} \\
 \frac{\frac{(n/n), n \rightarrow n \quad (np/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s}{(np/n), (n/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} \text{ (cut)}}{(np/n), (n/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} \text{ (cut)}
 \end{array}$$

Результат устранения сечения.

$$\begin{array}{c}
 \frac{n \rightarrow n \quad \frac{\frac{np \rightarrow np \quad s \rightarrow s}{np, (np \setminus s) \rightarrow s} (\setminus \rightarrow)}}{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow) \\
 \frac{n \rightarrow n \quad \frac{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s}{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)}{(np/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow) \\
 \frac{n \rightarrow n \quad \frac{(np/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s}{(np/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)}{(np/n), (n/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)
 \end{array}$$

Определение

Секвенция называется *тонкой*, если каждый встречающийся в ней примитивный тип встречается там ровно два раза.

Теорема

Если секвенция выводима, то она получается из некоторой тонкой выводимой секвенции путём переименования примитивных типов.

Пример

Секвенцию

$$(np/n), (n/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s$$

можно получить из тонкой секвенции

$$(np/n), (n/r), (r/q), q, (np \setminus s) \rightarrow s.$$

$$\begin{array}{c}
 n \rightarrow n \quad \frac{\frac{\frac{n \rightarrow n}{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)}{n \rightarrow n} (/ \rightarrow)}{(np/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)}{(np/n), (n/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 q \rightarrow q \quad \frac{\frac{\frac{r \rightarrow r}{(np/n), (n/r), r, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)}{q \rightarrow q} (/ \rightarrow)}{(np/n), (n/r), (r/q), q, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)
 \end{array}$$

Пример

John visits him or gives Mary a book.

visits him	$((np \backslash s) / np), ((s / np) \backslash s)$
gives Mary a book	$((((np \backslash s) / np) / np), np, (np / n), n)$

Существует ли такой тип C , что

$L \vdash ((np \backslash s) / np), ((s / np) \backslash s) \rightarrow C$ и

$L \vdash (((np \backslash s) / np) / np), np, (np / n), n \rightarrow C?$

Определение

Умножение в свободной группе.

$$(up_i) \cdot (p_i^{-1}v) = u \cdot v,$$

$$(up_i^{-1}) \cdot (p_iv) = u \cdot v,$$

в остальных случаях $x \cdot y = xy$.

Пример

$$(sn^{-1}n^{-1}) \cdot (ns^{-1}) = sn^{-1}s^{-1}.$$

Определение

Нахождение обратного элемента в свободной группе.

$$(\varepsilon)^{-1} = \varepsilon,$$

$$(up_i)^{-1} = p_i^{-1}(u)^{-1},$$

$$(up_i^{-1})^{-1} = p_i(u)^{-1}.$$

Пример

np	John, that, petrol
np/n	the, that
n	saw, petrol, canister, can
n/n	saw, petrol, canister, can
$np \setminus s$	leaked
$(np \setminus s) / np$	saw
t	that
$((np \setminus s) / s) / t$	saw
i	leak
i / np	see, saw
$(np \setminus s) / i$	can
$((np \setminus s) / i) / np$	saw

John saw the canister.

$np, ((np \setminus s) / np), (np / n), n \rightarrow s$

Petrol can leak.

$np, ((np \setminus s) / i), i \rightarrow s$

Пример

np	John, that, petrol
np/n	the, that
n	saw, petrol, canister, can
n/n	saw, petrol, canister, can
$np \setminus s$	leaked
$(np \setminus s) / np$	saw
t	that
$((np \setminus s) / s) / t$	saw
i	leak
i / np	see, saw
$(np \setminus s) / i$	can
$((np \setminus s) / i) / np$	saw

John saw that petrol leaked.
 $np, (((np \setminus s) / s) / t), t, np, (np \setminus s) \rightarrow s$

John saw the canister leak.
 $np, (((np \setminus s) / i) / np), (np / n), n, i \rightarrow s$

Задача

np	John, that, petrol
np/n	the, that
n	saw, petrol, canister, can
n/n	saw, petrol, canister, can
$np \setminus s$	leaked
$(np \setminus s) / np$	saw
t	that
$((np \setminus s) / s) / t$	saw
i	leak
i / np	see, saw
$(np \setminus s) / i$	can
$((np \setminus s) / i) / np$	saw

Какая выводимая секвенция позволяет установить корректность следующего предложения?

John saw that petrol can leak.