

# Категориальные грамматики

Лекция 7 (28.03.2018)

Грамматики Ламбека и контекстно-свободные грамматики

Степан Кузнецов, Мати Пентус, Алексей Сорокин

МГУ им. М. В. Ломоносова, межфакультетский курс,  
весенний семестр 2017/2018 учебного года

## Определение

Интерпретация типов исчисления Ламбека в свободной группе.

$$\begin{aligned} \llbracket p_i \rrbracket &= p_i, \\ \llbracket A \cdot B \rrbracket &= \llbracket A \rrbracket \cdot \llbracket B \rrbracket, \\ \llbracket A \setminus B \rrbracket &= \llbracket A \rrbracket^{-1} \cdot \llbracket B \rrbracket, \\ \llbracket B / A \rrbracket &= \llbracket B \rrbracket \cdot \llbracket A \rrbracket^{-1}. \end{aligned}$$

## Пример

$$\llbracket (s/np) \rrbracket = s(np)^{-1}. \quad \llbracket ((s/np) \setminus s) \rrbracket = (s(np)^{-1})^{-1} \cdot s = np.$$

## Лемма

Пусть  $L \vdash A_1, \dots, A_n \rightarrow B$ . Тогда  $\llbracket A_1 \rrbracket \cdot \dots \cdot \llbracket A_n \rrbracket = \llbracket B \rrbracket$ .

## Пример

$L \vdash ((np \setminus s) / np) \rightarrow (np \setminus (s / np))$ .

$$\llbracket ((np \setminus s) / np) \rrbracket = (np)^{-1} s (np)^{-1} \quad \text{и} \quad \llbracket (np \setminus (s / np)) \rrbracket = (np)^{-1} s (np)^{-1}.$$

## Теорема

Следующие условия равносильны:

- $L \vdash A \rightarrow C$  и  $L \vdash B \rightarrow C$  для некоторого типа  $C$ ,
- $L \vdash D \rightarrow A$  и  $L \vdash D \rightarrow B$  для некоторого типа  $D$ ,
- $\llbracket A \rrbracket = \llbracket B \rrbracket$ .

## Пример

John (visits him) or (gives Mary a book).

$$\llbracket ((np \setminus s) / np) \rrbracket \cdot \llbracket ((s / np) \setminus s) \rrbracket = (np)^{-1} s.$$

$$\llbracket (((np \setminus s) / np) / np) \rrbracket \cdot \llbracket np \rrbracket \cdot \llbracket (np / n) \rrbracket \cdot \llbracket n \rrbracket = (np)^{-1} s.$$

## Теорема

Если формальный язык можно задать грамматикой Ламбека, то его также можно задать контекстно-свободной грамматикой.

Аксиомы и правила исчисления Ламбека.

$$A \rightarrow A$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow (A \setminus B)} (\rightarrow \setminus) \text{ (если } \Pi \text{ непуста)}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow (B/A)} (\rightarrow /) \text{ (если } \Pi \text{ непуста)}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Delta \rightarrow B}{\Gamma, \Delta \rightarrow (A \cdot B)} (\rightarrow \cdot)$$

$$\frac{\Phi \rightarrow B \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow A}{\Gamma, \Phi, \Delta \rightarrow A} (\text{cut})$$

$$\frac{\Phi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Phi, (A \setminus B), \Delta \rightarrow C} (\setminus \rightarrow)$$

$$\frac{\Phi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, (B/A), \Phi, \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, (A \cdot B), \Delta \rightarrow C} (\cdot \rightarrow)$$

## Теорема

Пусть  $L \vdash A \rightarrow C$ . Тогда существует такой тип  $I$ , что

- (i)  $L \vdash A \rightarrow I$ ;
- (ii)  $L \vdash I \rightarrow C$ ;
- (iii)  $\mathbf{Var}(I) \subseteq \mathbf{Var}(A) \cap \mathbf{Var}(C)$ .

(Тип  $I$  называется интерполянтом секвенции  $A \rightarrow C$ .)

## Пример

Интерполянтом для секвенции  $((np/n) \cdot n) \rightarrow ((s/np) \setminus s)$  является  $np$ . Действительно,  $L \vdash ((np/n) \cdot n) \rightarrow np$  и  $L \vdash np \rightarrow ((s/np) \setminus s)$ .

## Определение

Секвенция называется *тонкой*, если каждый встречающийся в ней примитивный тип встречается там ровно два раза.

## Теорема

Пусть  $L \vdash \Phi, \Theta, \Psi \rightarrow C$ , где  $\Phi, \Theta, \Psi \rightarrow C$  является тонкой и  $\Theta$  не является пустой. Тогда существует такой тип  $I$ , что

- (i)  $L \vdash \Theta \rightarrow I$ ;
- (ii)  $L \vdash \Phi, I, \Psi \rightarrow C$ ;
- (iii) секвенция  $\Theta \rightarrow I$  является тонкой;
- (iv) секвенция  $\Phi, I, \Psi \rightarrow C$  является тонкой;
- (v)  $\|I\| = \|\Theta\|$ .

## Теорема

*Если формальный язык можно задать грамматикой Ламбека, то его также можно задать контекстно-свободной грамматикой.*

## Пример

$np_{PL}/n_{PL}$	the
$n_{PL}$	guests, actors, binoculars
$n_{PL}/n_{PL}$	guest, actor, binocular
$np_{PL} \setminus s$	smile
$(np_{PL} \setminus s)/np_{PL}$	see
$(n_{PL} \setminus n_{PL})/np_{PL}$	with
$((np_{PL} \setminus s) \setminus (np_{PL} \setminus s))/np_{PL}$	with

Какие выводимые секвенции позволяют установить корректность следующих предложений?

The guest actors smile.

The actors with the binoculars smile.

The guests see the actors with the binoculars.