Категориальные грамматики

Лекция 9 (11.04.2018)

Сложность категориальных грамматик

Степан Кузнецов, Мати Пентус, Алексей Сорокин

МГУ им. М. В. Ломоносова, межфакультетский курс,
весенний семестр 2017/2018 учебного года

Сложностной класс P

- http://en.wikipedia.org/wiki/P_(complexity)
- Крупский, В. Н. Введение в сложность вычислений. М.: Факториал Пресс, 2006.
  http://lpcs.math.msu.su/~krupski/Complexity/krupski/part2.pdf

Сложностной класс NP

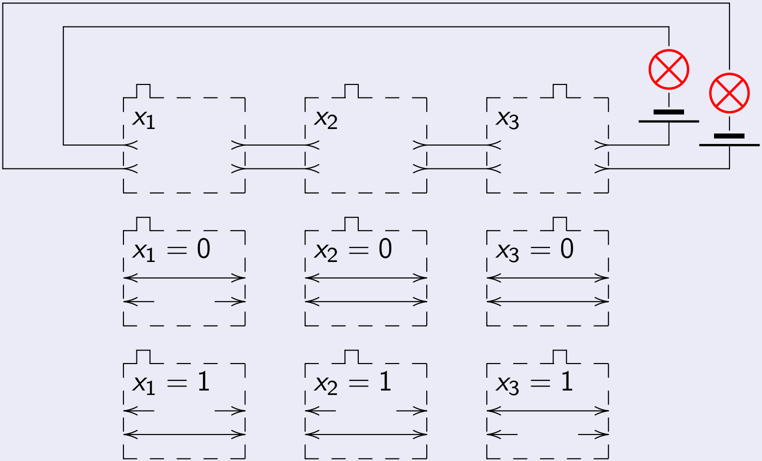
- http://en.wikipedia.org/wiki/NP_(complexity)
- http://lpcs.math.msu.su/~krupski/Complexity/krupski/part3.pdf

Переформулируем NP-полную алгоритмическую проблему *SAT* в терминах электрических цепей.

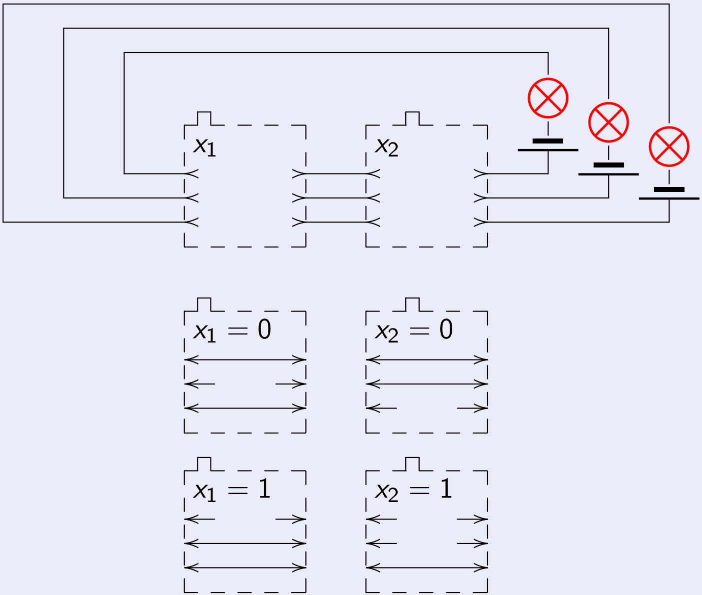
Игра состоит из набора блоков и одной электрической схемы с гнёздами.

Игрок должен вставить в каждое гнездо один из двух подходящих блоков. Если хотя бы одна красная лампочка загорается, то игрок проигрывает.

Пример



Пример

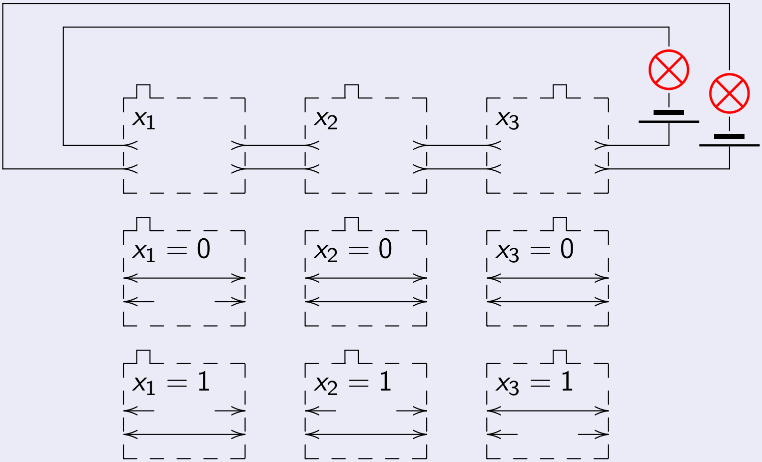


Набор для игры:

- электрическая схема с m красными лампочками и n гнёздами
- $2n$ блоков, каждый из которых подходит только к одному гнезду.

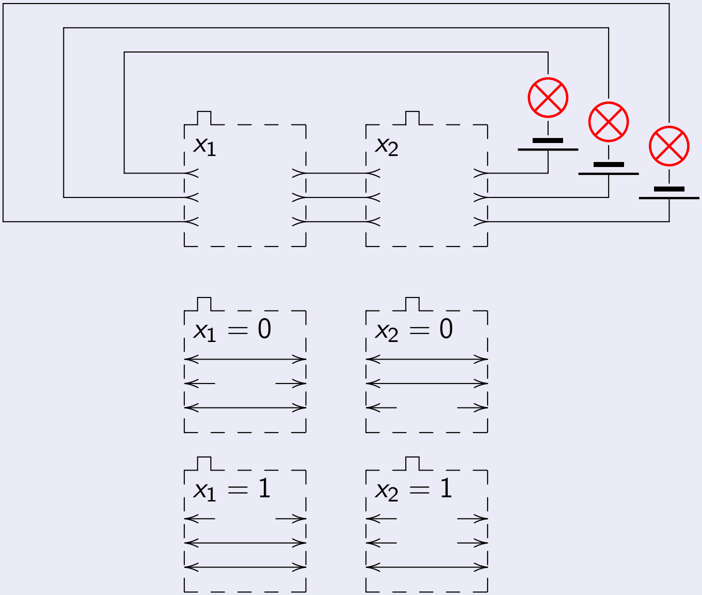
В логике высказываний такая игра соответствует формуле логики высказываний $c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m$ ($\wedge$ означает "и"), где каждая из формул c_i составлена из переменных и отрицаний переменных с помощью операции $\vee$ ("или"). При этом в формуле могут участвовать только переменные $x_1, \ldots, x_n$.

Пример $(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$ Здесь $m = 2$, $n = 3$.



Формула $(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$ выполнима тогда и только тогда, когда существует способ подключить к гнёздам n блоков так, чтобы ни одна лампочка не загорелась.

Пример $(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2)$ Здесь $m = 3$, $n = 2$.



Аксиомы и правила исчисления L.

$$A \to A$$

$$\frac{\Phi \to B \qquad \Gamma, B, \Delta \to A}{\Gamma, \Phi, \Delta \to A}\ (\mathrm{cut})$$

$$\frac{A, \Pi \to B}{\Pi \to (A \backslash B)}\ (\to\backslash)\ \text{(если } \Pi \text{ непуста)}$$

$$\frac{\Phi \to A \qquad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, \Phi, (A \backslash B), \Delta \to C}\ (\backslash\to)$$

$$\frac{\Pi, A \to B}{\Pi \to (B / A)}\ (\to/)\ \text{(если } \Pi \text{ непуста)}$$

$$\frac{\Phi \to A \qquad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, (B / A), \Phi, \Delta \to C}\ (/\to)$$

$$\frac{\Gamma \to A \qquad \Delta \to B}{\Gamma, \Delta \to (A \cdot B)}\ (\to\cdot)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to C}{\Gamma, (A \cdot B), \Delta \to C}\ (\cdot\to)$$

Теорема (Ламбек, 1958)

Если секвенцию можно вывести в исчислении L, то её также можно вывести без использования правила (cut).

Аксиомы и правила исчисления L^*.

$$A \to A$$

$$\frac{\Phi \to B \qquad \Gamma, B, \Delta \to A}{\Gamma, \Phi, \Delta \to A}\ (\mathrm{cut})$$

$$\frac{A, \Pi \to B}{\Pi \to (A \backslash B)}\ (\to\backslash)$$

$$\frac{\Phi \to A \qquad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, \Phi, (A \backslash B), \Delta \to C}\ (\backslash\to)$$

$$\frac{\Pi, A \to B}{\Pi \to (B / A)}\ (\to/)$$

$$\frac{\Phi \to A \qquad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, (B / A), \Phi, \Delta \to C}\ (/\to)$$

$$\frac{\Gamma \to A \qquad \Delta \to B}{\Gamma, \Delta \to (A \cdot B)}\ (\to\cdot)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to C}{\Gamma, (A \cdot B), \Delta \to C}\ (\cdot\to)$$

Теорема

Если секвенцию можно вывести в исчислении L^*, то её также можно вывести без использования правила (cut).

Теорема (про $\mathrm{L}(\backslash, /, \cdot)$, 2003)

Проблема распознавания выводимости в исчислении Ламбека является NP-полной.

Теорема (про $\mathrm{L}(\backslash, /)$, Ю. В. Саватеев, 2008)

Проблема распознавания выводимости в исчислении Ламбека без умножения является NP-полной.

Рассмотрим исчисление L^*. Типы в левой части секвенции можно превратить в формулы линейной логики следующим образом.

$$A \backslash B \rightsquigarrow \overline{A} \otimes B,$$
$$A / B \rightsquigarrow A \otimes \overline{B},$$
$$A \cdot B \rightsquigarrow A \oplus B.$$

Инверсия $(\overline{C})$ определяется так:

$$\overline{A \otimes B} = \overline{B} \oplus \overline{A},$$
$$\overline{A \oplus B} = \overline{B} \otimes \overline{A},$$
$$\overline{\overline{A}} = A.$$

В правой части секвенции надо дополнительно применить инверсию.

Чтобы моделировать электрическую схему в сетях доказательства, построим типы исчисления Ламбека G, $E_i(0)$, $E_i(1)$, F_i (где $1 \leqslant i \leqslant n$) со следующими свойствами:

- игрок выигрывает тогда и только тогда, когда $E_1(t_1), \dots, E_n(t_n) \to G$ выводима для некоторых $t_1, \dots, t_n \in \{0, 1\}$,
- $F_1, \dots, F_n \to G$ выводима тогда и только тогда, когда $E_1(t_1), \dots, E_n(t_n) \to G$ выводима для некоторых $t_1, \dots, t_n \in \{0, 1\}$.

Теорема (про $\mathrm{L}(\backslash)$ и $\mathrm{L}(/)$, Ю. В. Сафатеев, 2006)

Проблема распознавания выводимости в исчислении Ламбека с левым делением, но без правого деления и умножения разрешается за полиномиалное время.
Проблема распознавания выводимости в исчислении Ламбека с правым делением, но без левого деления и умножения разрешается за полиномиалное время.

Теорема (про $\mathrm{L}(\backslash, \cdot)$ и $\mathrm{L}(/, \cdot)$, Ю. В. Саватеев, 2009)

Проблема распознавания выводимости в исчислении Ламбека с левым делением и умножением, но без правого деления является NP-полной.
Проблема распознавания выводимости в исчислении Ламбека с правым делением и умножением, но без левого деления является NP-полной.

Теорема (про $\mathrm{L}^*(\backslash, !)$ и $\mathrm{L}^*(\backslash, /, \cdot, !)$, М. И. Канович, С. Л. Кузнецов, А. Щедров, 2016)

Проблема распознавания выводимости в исчислении L^* *со связкой* $!$ *неразрешима.*