Теория алгоритмов

Вычислимая функция — это функция, вычисляемая некоторым алгоритмом. Заметим, что вычислимая функция может быть определена не всюду: на некоторых входных данных алгоритм может «зависнуть».

Разрешимое множество — это множество, характеристическая функция которого вычислима.

Перечислимое множество — это множество значений некоторой вычислимой функции.

1. Докажите, что следующие свойства множества A равносильны:
(1) A перечислимо;
(2) A есть область определения некоторой вычислимой функции;
(3) A либо пусто, либо является множеством значений некоторой всюду определённой вычислимой функции.

2. Докажите, что функция f вычислима тогда и только тогда, когда её *график* (множество $\Gamma_f = \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in D(f)\}$) перечислим.

3. Докажите, что если множества A и B перечислимы, то множества $A \cup B$ и $A \cap B$ также перечислимы.

4. Докажите *теорему Поста:* множество $A \subseteq \mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда множества A и $\mathbb{N} - A$ перечислимы.

5. Всюду определённая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ неубывает (т. е. если $m > n$, то $f(m) \geqslant f(n)$) и вычислима. Докажите, что её множество значений разрешимо. Верно ли, что всякое непустое разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ можно задать таким образом?

6. Разрешимо ли множество **а)** $\{n \in \mathbb{N} \mid (\exists p \geqslant n)\ p$ и $p+2$ простые$\}$; **б)** $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < e\}$ разрешимо?

7. Множество $F \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ таково, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множества $F_n^{(1)} = \{m \mid \langle n, m\rangle \in F\}$ и $F_n^{(2)} = \{m \mid \langle m, n\rangle \in F\}$ разрешимы. Всегда ли разрешимо само множество F?

8. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ содержит бесконечное разрешимое подмножество.

Модальная логика

Модальные формулы строятся из счётного числа переменных ($\mathrm{Var} = \{p, q, r, \ldots\}$) при помощи классических связок ($\wedge, \vee, \to, \neg$) и дополнительной одноместной связки $\Box$. Связка $\Diamond$ определяется как сокращённая запись комбинации $\neg\Box\neg$. *Шкала Крипке* есть ориентированный граф $\langle W, R\rangle$, где W — непустое множество (его элементы называются *«мирами»*), а $R \subseteq W \times W$ — произвольное бинарное отношение на W, называемое *отношением достижимости*. Утверждение $\langle x, y\rangle \in R$ мы будем записывать как xRy и иногда произносить как «мир x видит мир y». *Интерпретацией (оценкой)* переменных в данной шкале Крипке называется функция $\theta\colon W \times \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ (в каждом мире истинность переменных определяется независимо). Истинность сложных формул в данном мире определяется индукцией по их построению. Случай классических связок разбирается по таблицам истинности. Формула $\Box A$ истинна в мире u тогда и только тогда, когда во всех видимых из мира u мирах истинна формула v ($u \Vdash \Box A \iff (\forall v)\,(uRv \Rightarrow v \Vdash A)$). Из определений сразу получается, что $u \Vdash \Diamond A \iff (\exists v)\,(uRv$ и $v \Vdash A)$. Формула A называется *общезначимой* в шкале $\langle W, R\rangle$, если она истинна во всех мирах при всех возможных оценках переменных.

9. Рассмотрим шкалу Крипке $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ («миры» — целые числа, мир n «видит» мир m в точности тогда, когда $n < m$). Определим интерпретацию переменных p и q следующим образом: в мире n истинна переменная p тогда и только тогда, когда n чётно; в мире n истинна переменная q тогда и только тогда, когда $n > 0$. В каких точках полученной модели верны формулы: **а)** $\Diamond\Box p$; **б)** $\Diamond\Box q \wedge \Box\Diamond p$; **в)** $\Diamond(q \to \neg p) \wedge \Box\Diamond(p \to q)$?

10. Общезначима ли формула $\Box(\Box p \to p) \to (\Diamond\Box p \to \Box p)$ в шкале Крипке **а)** $\langle \mathbb{N}, <\rangle$; **б)** $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$; **в)** $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$?

11. Какие из следующих формул общезначимы во всех шкалах Крипке: **а)** $\Box A \to B \to (\Box A \to \Box B)$; **б)** $\Box A \to \Diamond A$; **в)** $\Box(A \to \Box B) \to (\Box A \to \Diamond B)$; **г)** $\Box A \to (\Diamond B \to \Diamond(A \wedge B))$?

12. Для каждой из следующих формул опишите множества шкал Крипке, в которых эта формула общезначима: **а)** $\Box p$; **б)** $\Diamond(p \vee \neg p)$; **в)** $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$; **г)** $\Diamond\Box p \to p$; **д)** $\Box p \to \Diamond p$; **е)** $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

Теория алгоритмов II

Пусть все алгоритмы занумерованы натуральными числами и пусть соответствующие им вычислимые функции (из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$) суть g_0, g_1, g_2, $\ldots$. *Универсальная вычислимая функция* $F\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такова, что $F(n,m) = g_n(m)$. При подходящей нумерации алгоритмов сама функция F также вычислима. Кроме того, мы потребуем, чтобы наша универсальная функция была *главной,* т. е. для любой двуместной вычислимой функции G существует всюду определённая одноместная вычислимая функция s, для которой $G(n,m) = F(s(n),m)$.

13. Определим функцию

$$f_0(n) = \begin{cases} F(n,n)+1, & \text{если } F(n,n) \text{ определено;}\\ \text{не опр.} & \text{иначе.}\end{cases}$$

Докажите, что f_0 является вычислимой функцией, однако не имеет всюду определённого вычислимого продолжения (т. е. не существует такой всюду определённой вычислимой функции $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, такой что $f|_{\mathcal{D}(f_0)} = f_0$).

14. Пусть f_0 — вычислимая функция, не имеющая всюду определённого вычислимого продолжения. Докажите, что её область определения является перечислимым, но не разрешимым множеством.

15. а) Докажите, что существуют непересекающиеся перечислимые множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, которые не отделяются никаким разрешимым множеством (т. е. не существует такого разрешимого $Z \subseteq \mathbb{N}$, что $X \subseteq Z$ и $Y \cap Z = \varnothing$). **б)** Докажите, что существует счётное число непересекающихся перечислимых множеств, никакие два из которых нельзя отделить разрешимым множеством.

16. Докажите *теорему Успенского – Райса:* пусть $\mathcal{K}$ — нетривиальное множество вычислимых функций (т. е. непустое и не совпадающее с множеством всех вычислимых функций). Тогда множество $\{n \mid g_n \in \mathcal{K}\}$ неразрешимо.

17. Разрешимо ли множество $\{\langle n_1, n_2\rangle \mid g_{n_1} \equiv g_{n_2}\}$?

18. Может ли какая-нибудь вычислимая функция встретиться в последовательности g_0, g_1, g_2, $\ldots$ конечное число раз?

19. Напишите на любом языке программирования программу, выводящую на экран свой собственный исходный текст.

20. Некоторое множество S натуральных чисел разрешимо. Разложим все числа из S на простые множители и составим множество D из всех простых чисел, встречающихся в этих разложениях. Можно ли утверждать, что множество D разрешимо?

Логика 1-го порядка

Моделью теории (множества формул без свободных переменных) называется интерпретация, в которой истинны все формулы данной теории.

Теорема Гёделя – Мальцева о компактности. Теория T имеет модель тогда и только тогда, когда любая её конечная подтеория $T_0 \subset T$ имеет модель.

21. Рассмотрим сигнатуру, содержащую только двуместный предикатный символ равенства и двуместный предикатный символ R, интерпретации — множества с бинарными отношениями (ориентированные графы). Можно ли выразить формулами 1-го порядка следующие свойства отношения/графа: **а)** симметричность; **б)** рефлексивность; **в)** транзитивность; **г)** существование клики размера 6 (множества из 6 вершин, в котором каждая соединена с каждой стрелками в обе стороны); **д)** конечность множества вершин; **е)** «вершин либо чётное число, либо бесконечно много»; **ё)** ацикличность; **ж)** связность?

22. Рассмотрим сигнатуру, содержащую один двуместный предикат $=$ (равенство), два двуместных функциональных символа: $+$ и $\cdot$ и две константы: 0 и 1. Интерпретации — кольца. Можно ли выразить формулой 1-го порядка следующие свойства колец: **а)** коммутативность; **б)** отсутствие делителей нуля; **в)** «данное кольцо есть поле»; **г)** «данное кольцо есть поле характеристики p» (p — фиксированное простое число); **д)** «данное кольцо есть поле нулевой характеристики»; **е)** «данное кольцо является алгебраически замкнутым полем»?

23. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, <)$ на множестве $\mathbb{Z}$. Выразите формулой двуместное отношение «$y = x + 1$».

24. Рассмотрим интерпретацию сигнатуры $(=, +, P^2)$ на множестве $\mathbb{R}$: $P(a, b)$ истинно тогда и только тогда, когда $b = a^2$; $=$ и $+$ интерпретируются естественным образом. Выразите формулой трёхместное отношение «$x = yz$».

25. Рассмотрим интерпретацию сигнатуры $(=, f^1)$ на множестве $\mathbb{Z}$: функциональный символ f интерпретируется функцией $x \mapsto (x+2)$; предикатный символ $=$ интерпретируется естественным образом. Выразимо ли формулой двуместное отношение «$y = x + 1$»?

26. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, +, 0, 1)$ на множестве $\mathbb{R}$. При каких (фиксированных) значениях $\xi \in \mathbb{R}$ предикат «$x = \xi$» выразим формулой?

Две интерпретации называются *элементарно эквивалентными,* если в них истинны одни и те же формулы без свободных переменных.

27. Рассмотрим сигнатуру $(=, <)$. Будут ли элементарно эквивалентны её естественные интерпретации **а)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$? **б)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (во втором случае сначала сравниваются первые компоненты пар, в случае равенства — вторые)?

28. Рассмотрим сигнатуру $(+, =)$. Будут ли элементарно эквивалентны её естественные интерпретации **а)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$? **б)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$?

29. Рассмотрим сигнатуру $(+, \cdot, S, =)$ и её естественную интерпретацию на множестве $\mathbb{N}$ (функциональный символ S интерпретируется отображением $x \mapsto (x+1)$). Существует ли счётная интерпретация этой сигнатуры, элементарно эквивалентная, но не изоморфная естественной интерпретации на $\mathbb{N}$?

Модальная логика. Дополнительные задачи

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул. Рассмотрим множество W всех максимальных непротиворечивых множеств модальных формул, содержащих Γ (слово «максимальное» здесь означает, что любое дальнейшее расширение этого множества приводит к противоречивому множеству). Определим на W отношение R: для $u, v \in M$ положим uRv, если для любой модальной формулы A утверждение $\Box A \in u$ влечёт $A \in v$.

30. Проверьте, что $\langle W, R\rangle$ является шкалой Крипке.

Шкала $\langle W, R\rangle$ называется *канонической шкалой* для множества Γ. Зададим на шкале $\langle W, R\rangle$ интерпретацию переменных так: переменная p истинна в мире $u \in W$ тогда и только тогда, когда $p \in u$.

31. Проверьте, что это свойство распространяется на произвольные формулы: формула A истинна в мире u (в смысле индуктивного определения истинности) тогда и только тогда, когда $A \in u$.

Построенная модель Крипке называется *канонической моделью* для множества Γ. Множество формул Γ (в частности, отдельную формулу) назовём *каноническим,* если оно общезначимо в своей собственной канонической шкале.

32. Докажите, что формулы $\Box p \to \Box\Box p$, $\Box p \to p$, $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$, $p \to \Box\Diamond p$, $\Box p \to \Diamond p$ канонические.

33. Докажите, что формула Гёделя – Лёба $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ не является канонической.

Логика 1-го порядка. *Листок 2*

34. Существует ли теория (в некоторой сигнатуре без равенства), имеющая трёхэлементную модель, но не имеющая двухэлементной?

35. Постройте выполнимую формулу, не имеющую конечных моделей. (Выполнимой называется формула, имеющая модель, т. е. интерпретацию, в которой эта формула истинна.)

36. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $\langle <^2, =^2 \rangle$ на множестве $\mathbb{Q}$. Постройте бескванторную формулу, эквивалентную (в этой интерпретации) **а)** формуле $\exists x\, (x < y_1 \wedge x = y_2)$; **б)** формуле $\forall x\, (x < y_1 \vee y_2 < x \vee x = y_2)$; **в)** формуле $\exists x\, \forall y\, ((x < y \wedge z_1 < x) \to z_2 < x)$.

37. Докажите, что в условиях предыдущей задачи **а)** любая формула вида $\exists x\, \zeta$, где ζ — конъюнкция атомарных формул и их отрицаний; **б)** любая формула вида $\exists x\, \zeta$, где ζ бескванторная; **в)** произвольная формула эквивалентна некоторой бескванторной формуле.

38. Верно ли утверждение предыдущей задачи для $\mathbb{R}$?

39. Являются ли интерпретации $\langle \mathbb{Q}, =, < \rangle$ и $\langle \mathbb{R}, =, < \rangle$ элементарно эквивалентными? Изоморфны ли они?

40. Приведите к предварённой нормальной форме следующие формулы:
а) $\neg\forall x\, \forall y\, P(x, y) \vee \forall x\, \exists y\, Q(x, y)$; **б)** $\forall x\, \neg\exists y\, P(x, y) \wedge \exists x\, \forall y\, Q(x, y)$; **в)** $\forall x\, \exists y\, P(x, y) \to \forall x\, \exists y\, Q(x, y)$.