Листок № 1. Множества и соответствия

1. Даны множества A, B, C, из которых любые два пересекаются, но никакое из этих множеств не содержится в объединении двух других. Какое наименьшее число элементов может содержать множество $A \cup B \cup C$?

2. Существует ли такое множество X из трёх элементов, что $X \subset \mathcal{P}(X)$? (Через $\mathcal{P}(X)$ обозначается множество всех подмножеств множества X.)

3. Докажите, что если какое-то равенство (содержащее переменные для множеств и операции $\cap$, $\cup$ и $\setminus$) не является истинным для всех множеств, то найдётся контрпример к нему, все множества которого пусты или состоят из одного элемента.

4. Множество U содержит $2n$ элементов. В нём выделено k подмножеств, причём ни одно из них не является подмножеством другого. Каково максимально возможное значение числа k?

Определение. *Декартово произведение* множеств A и B — это $A \times B \leftrightharpoons \{\langle a, b\rangle \mid a \in A, b \in B\}$.

5. Докажите, что **а)** $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$; **б)** $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$; **в)** $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$ тогда и только тогда, когда $A \times C \subseteq B \times D$.

6. Пусть $A, B \neq \varnothing$ и $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$. Докажите, что $A = B = C = D$.

Определения. *Бинарным соответствием* между множествами A и B называется произвольное подмножество их декартова произведения: $R \subseteq A \times B$. Если $A = B$, то R также называется *бинарным отношением* на A.

Вместо $\langle a, b\rangle \in R$ иногда пишут $a\,R\,b$.

7. Даны конечные множества A и B из n и m элементов соответственно. Найдите количество всех бинарных соответствий между A и B.

Если $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ — два бинарных соответствия, то их *композицией* называется бинарное соответствие $R \circ T \leftrightharpoons \{\langle a, c\rangle \mid (\exists b \in B)\, \langle a, b\rangle \in R, \langle b, c\rangle \in T\}$.

Через $\mathbf{1}_A$ обозначим *отношение равенства* на A: $\mathbf{1}_A \leftrightharpoons \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$.

8. Вычислите все возможные композиции отношений $=, \neq, <, >, \leqslant, \geqslant$ на $\mathbf{R}$.

9. Пусть $R \subseteq A \times A$. Докажите, что $R = \mathbf{1}_A$ тогда и только тогда, когда для любого $R_1 \subseteq A \times A$ верно $R \circ R_1 = R_1 \circ R = R_1$.

Определение. *Обратным* к бинарному соответствию $R \subseteq A \times B$ называется соответствие $R^{-1} \leftrightharpoons \{\langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in B\} \subseteq B \times A$.

10. Докажите, что для любых бинарных соответствий R_1, R_2, R_3: **а)** $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$; **б)** $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

11. Образуют ли бинарные отношения на произвольном множестве группу (относительно операций $\circ$ и ${}^{-1}$)?

Определение. Бинарное отношение R на множестве A называется *симметричным,* если из aRb следует bRa; *рефлексивным,* если для любого $a \in A$ верно aRa; *транзитивным,* если из того, что aRb и bRc, следует, что aRc.

12. Пусть $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{1, 2\}$. Постройте **а)** рефлексивное, транзитивное, но не симметричное отношение на множестве M; **б)** нетранзитивное отношение на множестве N; **в)** транзитивное, симметричное, но не рефлексивное отношение на множестве N.

Определение. Бинарное соответствие $F \subseteq A \times B$ называется *(частичной) функцией,* если оно обладает *свойством функциональности:* если $\langle x, y_1\rangle \in F$ и $\langle x, y_2\rangle \in F$, то $y_1 = y_2$. Иначе говоря, для каждого x существует не более одного y такого, что $\langle x, y\rangle \in F$. Этот единственный y (если он существует) обозначается $F(x)$. Если для любого $x \in A$ существует $F(x)$, то функция F называется *всюду определённой,* или *тотальной.* Записывается это так: $F\colon A \to B$.

Композиция функций — частный случай композиции отношений. Заметим, что при наших определениях в композиции $F \circ G$ сначала применяется функция F, а потом — функция G (обычно в математике принято противоположное соглашение).

13. Пусть $F\colon A \to B$. Докажите, что **а)** F биективна тогда и только тогда F^{-1} — всюду определённая функция; **б)** F инъективна тогда и только тогда, когда F^{-1} — (частичная) функция; **в)** F биективна тогда и только тогда, когда $F \circ F^{-1} = \mathbf{1}_A$ и $F^{-1} \circ F = \mathbf{1}_B$. **г)** Что можно сказать об F, если выполнено только одно из этих условий?

14. Докажите, что всякую $F\colon A \to B$ можно представить в виде композиции $F = H \circ G$, где G — инъективная функция, а H — сюръективная.

15. Пусть $F\colon A \to B$, $G\colon B \to A$, причём $F \circ G = \mathbf{1}_A$. Докажите, что F инъективна, а G сюръективна.

Листок № 2. Логика высказываний

Определения. Зафиксируем счётное множество $\mathrm{Var} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots\}$, называемое множеством *пропозициональных переменных.* Иногда для удобства мы будем обозначать пропозициональные переменные разными буквами (например, $p = p_1$, $q = p_2$, $r = p_3$ и т. д.).

Множество Fm *пропозициональных формул* определяется следующим образом:
1) любая пропозициональная переменная является пропозициональной формулой;
2) константа $\perp$ («ложь») является пропозициональной формулой;
3) если A и B — пропозициональные формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $\neg A$ — тоже пропозициональные формулы;
4) других пропозициональных формул нет.

Подчеркнём, что формула — это всего лишь строчка символов, сугубо синтаксический объект.

Слово «пропозициональный» в этом листочке мы будем иногда опускать.

1. а) Докажите *лемму об однозначности синтаксического разбора:* любая формула единственным образом представляется в одном из видов 1)–3).

б) Предложите способ записи формул без скобок, удовлетворяющий условию однозначности разбора. (Если просто опустить все скобки в предложенном выше определении, это условие нарушится.)

Определения. Назовём *интерпретацией* произвольное отображение $\alpha\colon \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$. Отображение α распространяется на все пропозициональные формулы по таблицам истинности; обозначим это расширение через $\bar{\alpha}$. Значение $\bar{\alpha}(A)$ называется *истинностным значением* формулы A при интерпретации α. Если для данной формулы A верно $\bar{\alpha}(A) = 1$, то говорят, что формула A *истинна при интерпретации* α, и пишут $\alpha \vDash A$. В противном случае A *ложна при интерпретации* α; $\alpha \nvDash A$.

Формула A *общезначима,* если она истинна при всех интерпретациях.

Формулы A и B *эквивалентны,* если формула $A \leftrightarrow B$ общезначима.

2. а) Докажите, что формула $p \vee q$ не эквивалентна никакой формуле, в записи которой встречаются только знаки $\leftrightarrow$, $\neg$, скобки и пропозициональные переменные.

б) Докажите, что формула $p \to q$ не эквивалентна никакой формуле, в записи которой встречаются только знаки $\vee$, $\wedge$, скобки и пропозициональные переменные.

3. Постройте формулу от трёх переменных p, q и r, истинную в том и только в том случае, когда **а)** ровно одна; **б)** не менее двух из переменных принимают значение 1.

4. Постройте пропозициональную формулу A, для которой обе формулы $(r \to A) \leftrightarrow (r \to (p \wedge q))$ и $(A \to r) \leftrightarrow ((\neg(p \vee q)) \to r)$ общезначимы.

5. Можно ли построить такую формулу A, чтобы формула $((A \wedge q) \to \neg p) \to ((p \to \neg q) \to A)$ была общезначимой? Если да, то сколько неэквивалентных решений имеет задача?

6. а) Постройте пропозициональную формулу от переменных p, q и r, изменяющую своё значение при изменении значения ровно одной из этих переменных.

б) Придумайте электрическую схему, при которой свет в комнате включается и выключается любым из трёх переключателей, независимо от состояния остальных (переключатель имеет несколько контактов и 2 состояния, в одном из которых соединено одно множество контактов, а в другом — другое).

Определения. Если T — множество формул *(пропозициональная теория)*, и все они истинны при интерпретации α, то пишем $\alpha \vDash T$ и говорим, что теория T истинна при интерпретации α и, наоборот, интерпретация α является *моделью* теории T. Пропозициональная теория, имеющая хотя бы одну модель, называется *выполнимой.*

7. Пусть Θ — множество всех интерпретаций. Определим на нём структуру метрического пространства следующим образом: если $\alpha, \beta \in \Theta$, причём $\alpha(p_i) = \beta(p_i)$ для всех $i < n$, а $\alpha(p_n) \neq \beta(p_n)$, то $\rho(\alpha, \beta) = 2^{-n}$ (а если $\alpha(p_i) = \beta(p_i)$ для всех i, то $\alpha = \beta$ и $\rho(\alpha, \beta) = 0$).

а) Докажите, что $\boldsymbol{\Theta} = \langle \Theta, \rho \rangle$ — метрическое пространство.

б) Докажите, что пространство $\boldsymbol{\Theta}$ компактно.

в) Пусть $T \subset \mathrm{Fm}$ — конечное множество пропозициональных формул. Докажите, что множество $\{\alpha \mid \alpha \vDash T\}$ открыто и замкнуто в $\boldsymbol{\Theta}$.

г) *Теорема о компактности для логики высказываний.* Пусть теория T такова, что любое её конечное подмножество выполнимо. Докажите, что тогда вся теория T также выполнима.

8. *Интерполяционная лемма Крейга.* Пусть A и B — пропозициональные формулы, причём формула $A \to B$ общезначима. Докажите, что существует такая формула C, что формулы $A \to C$ и $C \to B$ общезначимы, и всякая переменная, входящая в C, входит одновременно и в A, и в B.

Листок № 3. Языки первого порядка

1. Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трёхместный предикат C. Рассмотрим её нормальную интерпретацию на множестве всех точек плоскости, при этом $C(x, y, z)$ означает, что точки x и y равноудалены от точки z. Запишите в этой сигнатуре следующие свойства: **а)** «три различные точки A, B и C лежат на одной прямой»; **б)** «прямые AB и CD параллельны»; **в)** «$\angle ABC = \angle A'B'C'$»; **г)** «$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$»; **д)** «из точки M все стороны $\triangle ABC$ видны под углом $120°$»; **е)** «I — центр вписанной окружности $\triangle ABC$»; **ё)** «M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$»; **ж)** пятый постулат Евклида.

2. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $\langle =, < \rangle$ на множестве $\mathbb{Z}$. Как выразить отношение $y = x + 1$?

3. Рассмотрим интерпретацию сигнатуры $(=, +, P^2)$ на множестве $\mathbb{R}$: $P(a, b)$ истинно тогда и только тогда, когда $b = a^2$; $=$ и $+$ интерпретируются естественным образом. Выразите формулой трёхместное отношение «$x = yz$».

4. Рассмотрим интерпретацию сигнатуры $(=, f^1)$ на множестве $\mathbb{Z}$: функциональный символ f интерпретируется функцией $x \mapsto (x + 2)$; предикатный символ $=$ интерпретируется естественным образом. Выразимо ли формулой двуместное отношение «$y = x + 1$»?

5. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, +, 0, 1)$ на множестве $\mathbb{R}$. При каких (фиксированных) значениях $\xi \in \mathbb{R}$ предикат «$x = \xi$» выразим формулой?

6. Выразим ли предикат «$x = 3$» в множестве $\mathbb{N}$ с предикатами равенства и «y кратно z»?

7. Постройте формулу в сигнатуре $(=, <)$, истинную во всех конечных интерпретациях, но не общезначимую.

8. Постройте формулу в языке первого порядка *без равенства,* имеющую 3-элементную модель и не имеющую 2-элементной.

9. Придумайте интерпретацию сигнатуры с тремя предикатами, в которой каждый предикат выражается через два других, но ни один не выражается через другой.

10. Рассмотрим сигнатуру арифметики: $(+, \cdot, =)$ и её естественную интерпретацию на множестве $\mathbb{N}$. Выразимые отношения в этом случае называются *арифметическими.* Докажите, что следующие отношения арифметические: **а)** «$x = 0$»; **б)** «$x = 1$»; **в)** «$x = N$» (N — фиксированное натуральное число); **г)** «$x \leqslant y$»; **д)** «x кратно y»; **е)** «x при делении на y даёт неполное частное q и остаток r»; **ё)** «$z = \text{НОД}(x, y)$»; **ж)** «x есть степень двойки»; **з)** «x — простое число».

11. Задайте отношение «$x = N$» формулой длины не большей, чем $C \log_2 N$ для некоторой константы C, не зависящей от N.

Элементарная эквивалентность

Две интерпретации называются *элементарно эквивалентными,* если в них истинны одни и те же формулы без свободных переменных.

12. Рассмотрим сигнатуру $(=, <)$. Будут ли элементарно эквивалентны её естественные интерпретации на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$?

13. Рассмотрим ту же сигнатуру и её естественную интерпретацию на $\mathbb{R}$. Существует ли интерпретация этой сигнатуры на некотором множестве мощности континуум, не изоморфная, но элементарно эквивалентная этой интерпретации?

14. Рассмотрим сигнатуру $(+, =)$. Будут ли элементарно эквивалентны её естественные интерпретации **а)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$? **б)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$? **в)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$?

Теорией называется произвольное множество формул (в данной сигнатуре) без свободных переменных. *Моделью* теории называется интерпретация, при которой все эти формулы истинны.

15. а) Докажите, что если сигнатура конечна или счётна, то любая теория в этой сигнатуре может иметь не больше, чем континуум попарно неизоморфных счётных моделей. **б)** Постройте теорию в сигнатуре с равенством и ещё одним двухместным предикатом, имеющую континуум попарно неизоморфных счётных моделей.

Теория называется *категоричной* в данной мощности, если все её модели данной мощности изоморфны.

16. Приведите пример теории, имеющей модели всех мощностей и при этом категоричной во всех мощностях.

Листок № 4. Языки первого порядка II

1. Рассмотрим сигнатуру без констант и функциональных символов, все предикатные символы которой одноместны. **а)** Существует ли в этой сигнатуре выполнимая замкнутая формула, не имеющая конечных моделей? **б)** Существует ли алгоритм, проверяющий выполнимость данной замкнутой формулы в этой сигнатуре? Если да, то оцените (хотя бы грубо) время работы этого алгоритма.

2. Назовём *спектром* данной замкнутой формулы A (в сигнатуре с равенством) множество таких натуральных чисел n, что существует модель формулы A мощности n. Существует ли формула, спектр которой — **а)** множество $\{2, 6, 100, 2013\}$; **б)** множество $\{1317, 1812, 1945\} \cup \{n \mid n \geqslant 2014\}$; **в)** множество всех чётных чисел; **г)** множество всех степеней двойки; **д)** множество всех простых чисел?

3. Постройте формулу в сигнатуре с одним трёхместным предикатным символов R (и равенством), которая имеет спектр $\mathbb{N}$, но не общезначима.

Устранение кванторов

Теорема Тарского – Зайденберга. Всякая формула в сигнатуре $(=, <, 0, 1, +, \cdot)$ при стандартной интерпретации на множестве $\mathbb{R}$ эквивалентна некоторой бескванторной формуле.

Доказательство этой теоремы довольно сложно технически, однако полезно помнить, что достаточно уметь устранить *один квантор существования,* т. е. привести формулу вида $\exists x\, A$, где A не содержит кванторов, к бескванторному виду. Дальнейшее делается индукцией по количеству кванторов.

4. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для $\mathbb{C}$ (в сигнатуре, разумеется, уже не будет символа «$<$»). Верно ли, что в качестве бескванторной формулы, эквивалентной данной, и в $\mathbb{R}$, и в $\mathbb{C}$ можно взять одну и ту же формулу?

5. а) Докажите теорему об устранении кванторов для структур $\langle \mathbb{Q}, <, = \rangle$ и $\langle \mathbb{R}, <, = \rangle$. **б)** Докажите, что эти структуры элементарно эквивалентны (при этом, очевидно, не являясь изоморфными).

6. а) Докажите, что свойство «$x = \alpha$» (α — фиксированное действительное число) выразимо в $(\mathbb{R}; =, <, 0, 1, +, \cdot)$ тогда и только тогда, когда α — алгебраическое число. **б)** Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для $\mathbb{C}$.

7. Рассмотрим интерпретацию сигнатуры $(=, S, 0)$ на множестве $\mathbb{Z}$. (S — это одноместный функциональный символ, интерпретируемый функцией $x \mapsto x + 1$.) **а)** Сформулируйте и докажите теорему об устранении кванторов. **б)** Докажите, что отношение «$x < y$» в этой интерпретации невыразимо. **в)** Можно ли это сделать методом автоморфизмов?

Компактность

Теорема Гёделя – Мальцева о компактности. Теория T имеет модель тогда и только тогда, когда любая её конечная подтеория $T_0 \subset T$ имеет модель.

Эту теорему можно использовать без доказательства.

8. Существует ли теория, имеющая конечные модели сколь угодно большой мощности, но не имеющая бесконечной модели?

9. Рассмотрим сигнатуру, содержащую только двуместный предикатный символ равенства и двуместный предикатный символ R, интерпретации — множества с бинарными отношениями (ориентированные графы). Можно ли выразить формулами 1-го порядка следующие свойства отношения/графа: **а)** симметричность; **б)** рефлексивность; **в)** транзитивность; **г)** существование клики размера 6 (множества из 6 вершин, в котором каждая соединена с каждой стрелками в обе стороны); **д)** конечность множества вершин; **е)** «вершин либо чётное число, либо бесконечно много»; **ё)** ацикличность; **ж)** связность?

10. Рассмотрим сигнатуру, содержащую один двуместный предикат $=$ (равенство), два двуместных функциональных символа: $+$ и $\cdot$ и две константы: 0 и 1. Интерпретации — кольца. Можно ли выразить формулой 1-го порядка следующие свойства колец: **а)** коммутативность; **б)** отсутствие делителей нуля; **в)** «данное кольцо есть поле»; **г)** «данное кольцо есть поле характеристики p» (p — фиксированное простое число); **д)** «данное кольцо есть поле нулевой характеристики»; **е)** «данное кольцо является алгебраически замкнутым полем»?

11. Рассмотрим сигнатуру $(+, \cdot, S, =)$ и её естественную интерпретацию на множестве $\mathbb{N}$ (функциональный символ S интерпретируется отображением $x \mapsto (x+1)$). Существует ли счётная интерпретация этой сигнатуры, элементарно эквивалентная, но не изоморфная естественной интерпретации на $\mathbb{N}$?

Формула A *семантически следует* из теории T (пишем: $T \vDash A$), если она верна в любой интерпретации, в которой верна теория T.

12. Пусть теории T_1 и T_2 таковы, что $T_1 \cup T_2$ не имеет моделей. Докажите, что существует такая формула A, что $T_1 \vDash A$ и $T_2 \vDash \neg A$.

Листок № 5. Языки первого порядка III

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов задаётся следующими аксиомами и правилами вывода:

Аксиомы:

A1. Формулы, получаемые подстановкой из тавтологий логики высказываний.

A2. Формулы вида $(\forall x\, A) \to A[x := t]$, причём переменные терма t не связаны кванторами внутри A.

A3. Формулы вида $A[x := t] \to (\exists x\, A)$, с тем же условием.

Правила вывода:

$$\textbf{R1.}\ \frac{A \quad A \to B}{B} \qquad \underbrace{\textbf{R2.}\frac{A \to B}{A \to (\forall x\, B)} \quad \textbf{R3.}\frac{B \to A}{(\exists x\, B) \to A}}_{\text{правила Бернайса}}$$

modus ponens (MP)

В правилах Бернайса требуется, чтобы переменная x не входила свободно в формулу A.

Пусть T — теория (множество замкнутых формул). Если некая формула A может быть выведена в исчислении предикатов, в которое формулы из T добавлены в качестве аксиом, то A *выводима в теории* T (пишем: $T \vdash A$).

1. Покажите, что ограничения в аксиомах **A2** и **A3** и правилах **R2** и **R3** существенны (без них в исчислении станут выводимыми необщезначимые формулы).

2. Докажите *теорему о дедукции:* если T — теория, A — замкнутая формула, а B — произвольная формула, то $T \cup \{A\} \vdash B \iff T \vdash (A \to B)$.

Теорема Гёделя о полноте (в слабой форме). Если замкнутая формула общезначима (т.е. истинна во всех интерпретациях), то она выводима в исчислении предикатов.

Теорема Гёделя о полноте (в сильной форме). Всякая непротиворечивая теория (т.е. теория, из которой средствами исчисления предикатов нельзя одновременно вывести некоторую формулу и её отрицание) имеет модель. Более того, в силу теоремы Лёвенгейма – Сколема в случае конечной или счётной сигнатуры можно построить не более чем счётную модель.

3. а) Выведите из теоремы Гёделя о полноте в сильной форме теорему Гёделя о полноте в слабой форме. **б)** Выведите теорему Гёделя о полноте в сильной форме из теоремы Гёделя о полноте в слабой форме и теоремы о компактности (см. предыдущий листок). **в)** Выведите из теоремы Гёделя о полноте (в сильной форме) следующее утверждение: если во всех моделях теории T истинна формула A, то она выводима из T. (коротко это записывают так: $T \vDash A \Rightarrow T \vdash A$). Верно ли обратное?

4. Выводимы ли в исчислении предикатов формулы: **а)** $(\forall x\,(A \to B) \wedge \exists x\, A) \to \exists x\, B$; **б)** $\exists x\, A \to \forall x\, A$; **в)** $\exists x\, \forall y\, A \to \forall y\, \exists x\, A$; **г)** $\forall y\, \exists x\, A \to \exists x\, \forall y\, A$?

5. Докажите, что если $T \vdash (A \to B)$, то $T \vdash (\exists x\, A \to \exists x\, B)$.

6. Пусть теории T_1 и T_2 в некоторой сигнатуре таковы, что теория $T_1 \cup T_2$ противоречива. Докажите, что найдётся такая формула A, что $T_1 \vdash A$ и $T_2 \vdash \neg A$.

Полные теории

Назовём непротиворечивую теорию T *полной,* если для любой формулы A либо $T \vdash A$, либо $T \vdash \neg A$.

7. а) Докажите, что полная теория обладает *дизъюнктивным свойством:* если $T \vdash B \vee C$, то $T \vdash B$ или $T \vdash C$. **б)** Существуют ли неполные теории, обладающие дизъюнктивным свойством?

8. а) Докажите, что все модели полной теории элементарно эквивалентны. **б)** Верно ли обратное?

9. Докажите, что для всякой непротиворечивой теории T существует полная теория T', включающая в себя T.

10. а) *Признак Лося – Воота.* Пусть теория T в конечной или счётной сигнатуре не имеет конечных моделей и категорична в счётной мощности (т.е. все её счётные модели изоморфны). Докажите, что T полна. **б)** Покажите, что условие отсутствия конечных моделей в этой теореме существенно.

Рассмотрим сигнатуру $\langle <, = \rangle$ и пусть теория DLO состоит из аксиом иррефлексивности, транзитивности, линейности, плотности $(\forall x \forall y\,(x < y \to \exists z\,(x < z \wedge z < y)))$ и неограниченности в обе стороны $(\forall x \exists y \exists z (y < x \wedge x < z))$.

Теорема Кантора. Теория DLO категорична в счётной мощности.

11. Являются ли интерпретации $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ и $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ элементарно эквивалентными?

12. Заменим аксиому неограниченности в обе стороны аксиомами неограниченности вправо и существования наименьшего элемента. Будет ли полученная теория полной?

Листок № 6. Модальная логика

Модальные формулы строятся из счётного числа переменных ($\mathrm{Var} = \{p, q, r, \dots\}$) при помощи классических связок ($\wedge, \vee, \to, \neg$) и дополнительной одноместной связки $\Box$. Связка $\Diamond$ определяется как сокращённая запись комбинации $\neg\Box\neg$. *Шкала Крипке* есть ориентированный граф $\langle W, R\rangle$, где W — непустое множество (его элементы называются *«мирами»*), а $R \subseteq W \times W$ — произвольное бинарное отношение на W, называемое *отношением достижимости.* Утверждение $\langle x, y\rangle \in R$ мы будем записывать как xRy и иногда произносить как «мир x видит мир y». *Интерпретацией (оценкой)* переменных в данной шкале Крипке называется функция $\theta\colon W \times \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ (в каждом мире истинность переменных определяется независимо). Истинность сложных формул в данном мире определяется индукцией по их построению. Случай классических связок разбирается по таблицам истинности. Формула $\Box A$ истинна в мире u тогда и только тогда, когда во всех видимых из мира u мирах истинна формула v ($u \Vdash \Box A \iff (\forall v)\,(uRv \Rightarrow v \Vdash A)$). Из определений сразу получается, что $u \Vdash \Diamond A \iff (\exists v)\,(uRv$ и $v \Vdash A)$. Формула A называется *общезначимой* в шкале $\langle W, R\rangle$, если она истинна во всех мирах при всех возможных оценках переменных.

1. Рассмотрим шкалу Крипке $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ («миры» — целые числа, мир n «видит» мир m в точности тогда, когда $n < m$). Определим интерпретацию переменных p и q следующим образом: в мире n истинна переменная p тогда и только тогда, когда n чётно; в мире n истинна переменная q тогда и только тогда, когда $n > 0$. В каких точках полученной модели верны формулы: **а)** $\Diamond\Box q \wedge \Box\Diamond p$; **б)** $\Diamond(p \wedge \neg q) \vee q$? **в)** Постройте модальную формулу, истинную во всех мирах, кроме мира -1.

2. Общезначима ли формула $\Box(\Box p \to p) \to (\Diamond\Box p \to \Box p)$ в шкале **а)** $\langle \mathbb{N}, <\rangle$; **б)** $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$; **в)** $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$?

3. Для каждой из следующих формул опишите класс шкал Крипке, в которых эта формула общезначима: **а)** $\Box p$; **б)** $\Diamond(p \vee \neg p)$; **в)** $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$; **г)** $\Diamond\Box p \to p$; **д)** $\Box p \to \Diamond p$; **е)** $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

4. Напишите модальную формулу, общезначимую в точности в тех шкалах Крипке, в которых **а)** из каждого мира достижимы не более n миров; **б)** длина максимального пути не больше n.

5. Существует ли *конечная* шкала Крипке, в которой общезначимы в точности все формулы, общезначимые во всех шкалах Крипке?

Листок № 7а. Теория алгоритмов I

Вычислимая функция — это функция, вычисляемая некоторым алгоритмом. Заметим, что вычислимая функция может быть определена не всюду: на некоторых входных данных алгоритм может «зависнуть».

Понятие алгоритма можно формализовывать многими различными способами; оказывается, что все они приводят к одному и тому же классу вычислимых функций. Это утверждение (называемое иногда *тезисом Чёрча)* не может быть полностью доказано как математическая теорема (поскольку квантор «для всех разумных формализаций понятия алгоритма» нематематический), однако для двух конкретных формализаций эквивалентность может быть проверена непосредственно.

Разрешимое множество — это множество, характеристическая функция которого вычислима.

Перечислимое множество — это множество значений некоторой вычислимой функции.

Всякое разрешимое множество перечислимо. Обратное неверно, но пример мы построим позже.

1. Докажите, что следующие свойства множества A равносильны: (1) A перечислимо; (2) A есть область определения некоторой вычислимой функции; (3) A либо пусто, либо является множеством значений некоторой всюду определённой вычислимой функции.

2. Докажите, что функция f вычислима тогда и только тогда, когда её *график* (множество $\Gamma_f = \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in D(f)\}$) перечислим.

3. Докажите *теорему Поста:* множество $A \subseteq \mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда множества A и $\mathbb{N} - A$ перечислимы.

4. Всюду определённая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ неубывает (т. е. если $m > n$, то $f(m) \geqslant f(n)$) и вычислима. Докажите, что её множество значений разрешимо. Верно ли, что всякое непустое разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ можно задать таким образом?

5. Разрешимо ли множество **а)** $\{n \in \mathbb{N} \mid (\exists p \geqslant n)\ p$ и $p+2$ простые$\}$; **б)** $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < e\}$ разрешимо?

6. Множество $F \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ таково, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множества $F_n^{(1)} = \{m \mid \langle n, m\rangle \in F\}$ и $F_n^{(2)} = \{m \mid \langle m, n\rangle \in F\}$ разрешимы. Всегда ли разрешимо само множество F?

7. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ содержит бесконечное разрешимое подмножество.

Листок № 7б. Теория алгоритмов II

Пусть все алгоритмы занумерованы натуральными числами и пусть соответствующие им вычислимые функции (из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$) суть g_0, g_1, g_2, $\ldots$. *Универсальная вычислимая функция* $F\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такова, что $F(n,m) = g_n(m)$. При подходящей нумерации алгоритмов сама функция F также вычислима. Кроме того, мы потребуем, чтобы наша универсальная функция была *главной,* т. е. для любой двуместной вычислимой функции G существует всюду определённая одноместная вычислимая функция s, для которой $G(n,m) = F(s(n),m)$.

1. а) Пусть задана главная универсальная вычислимая функция F. Докажите, что существует такая вычислимая функция $c\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, что для всех m и n верно $g_{c(m,n)} = g_m \circ g_n$ (знак «$\circ$» означает композицию функций). **б)** Верно ли это для неглавной F?

2. Определим функцию

$$f_0(n) = \begin{cases} F(n,n)+1, & \text{если } F(n,n) \text{ определено;}\\ \text{не опр.} & \text{иначе.}\end{cases}$$

Докажите, что f_0 является вычислимой функцией, однако не имеет всюду определённого вычислимого продолжения (т. е. не существует такой всюду определённой вычислимой функции $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, такой что $f|_{\mathcal{D}(f_0)} = f_0$).

3. Пусть f_0 — вычислимая функция, не имеющая всюду определённого вычислимого продолжения. Докажите, что её область определения является перечислимым, но не разрешимым множеством.

4. а) Докажите, что существуют непересекающиеся перечислимые множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, которые не отделяются никаким разрешимым множеством (т. е. не существует такого разрешимого $Z \subseteq \mathbb{N}$, что $X \subseteq Z$ и $Y \cap Z = \varnothing$). **б)** Докажите, что существует счётное число непересекающихся перечислимых множеств, никакие два из которых нельзя отделить друг от друга разрешимым множеством.

5. Докажите *теорему Успенского – Райса:* пусть $\mathcal{K}$ — нетривиальное множество вычислимых функций (т. е. непустое и не совпадающее с множеством всех вычислимых функций). Тогда множество $\{n \mid g_n \in \mathcal{K}\}$ неразрешимо.

6. Разрешимо ли множество $\{\langle n_1, n_2\rangle \mid g_{n_1}$ и g_{n_2} — одна и та же функция$\}$?

7. Может ли какая-нибудь вычислимая функция встретиться в последовательности g_0, g_1, g_2, $\ldots$ конечное число раз?

8. Некоторое множество S натуральных чисел разрешимо. Разложим все числа из S на простые множители и составим множество D из всех простых чисел, встречающихся в этих разложениях. Можно ли утверждать, что множество D разрешимо?

Разрешимые и перечислимые теории

Пусть T — множество замкнутых формул (теория первого порядка) в некоторой сигнатуре. Положим $[T] = \{\varphi \mid T \vdash \varphi\}$ — множество *теорем* теории T (а само множество T тогда можно назвать *аксиоматизацией* множества $[T]$). Также $[T]$ называется *дедуктивным замыканием* множества T.

Теория T называется *разрешимой (перечислимой),* если разрешимо (соответственно, перечислимо) множество $[T]$. Теория T называется *разрешимо (перечислимо) аксиоматизируемой,* если существует разрешимое (соответственно, перечислимое) множество замкнутых формул T', такое, что $[T'] = [T]$.

9. а) Докажите, что всякая перечислимо аксиоматизируемая теория перечислима. **б)** *Трюк Крейга.* Докажите, что всякая перечислимая теория разрешимо аксиоматизируема.

10. Разрешима ли теория **а)** DLO (теория плотных линейных порядков без первого и последнего элементов); **б)** $\mathrm{Th}(\mathbb{R}; +, \cdot, =, <, 0, 1)$ (множество всех формул сигнатуры $\langle +, \cdot, =, <, 0, 1\rangle$, истинных при естественной интерпретации на множестве действительных чисел)?

11. Постройте разрешимо аксиоматизируемую и при этом неразрешимую теорию первого порядка (в некоторой сигнатуре).