Логика высказываний

Определения. Зафиксируем счётное множество $\mathrm{Var} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots\}$, называемое множеством *пропозициональных переменных*. Иногда для удобства мы будем обозначать пропозициональные переменные разными буквами (например, $p = p_1$, $q = p_2$, $r = p_3$ и т. д.).

Множество Fm *пропозициональных формул* определяется следующим образом:
1) любая пропозициональная переменная является пропозициональной формулой;
2) константа $\perp$ («ложь») является пропозициональной формулой;
3) если A и B — пропозициональные формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $\neg A$ — тоже пропозициональные формулы;
4) других пропозициональных формул нет.

Подчеркнём, что формула — это всего лишь строчка символов, сугубо синтаксический объект.

Слово «пропозициональный» в этом листочке мы будем иногда опускать.

Имеет место *лемма об однозначности синтаксического разбора:* любая формула единственным образом представляется в одном из видов 1)–3).

Определения. Назовём *интерпретацией* произвольное отображение $\alpha\colon \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$. Отображение α распространяется на все пропозициональные формулы по таблицам истинности; обозначим это расширение через $\bar{\alpha}$. Значение $\bar{\alpha}(A)$ называется *истинностным значением* формулы A при интерпретации α. Если для данной формулы A верно $\bar{\alpha}(A) = 1$, то говорят, что формула A *истинна при интерпретации* α, и пишут $\alpha \vDash A$. В противном случае A *ложна при интерпретации* α; $\alpha \nvDash A$.

Формула A *общезначима,* если она истинна при всех интерпретациях.

Формулы A и B *эквивалентны,* если формула $A \leftrightarrow B$ общезначима.

1. а) Докажите, что формула $p \vee q$ не эквивалентна никакой формуле, в записи которой встречаются только знаки $\leftrightarrow$, $\neg$, скобки и пропозициональные переменные.

б) Докажите, что формула $p \to q$ не эквивалентна никакой формуле, в записи которой встречаются только знаки $\vee$, $\wedge$, скобки и пропозициональные переменные.

2. Постройте формулу от трёх переменных p, q и r, истинную в том и только в том случае, когда **а)** ровно одна; **б)** не менее двух из переменных принимают значение 1.

3. Постройте пропозициональную формулу A, для которой обе формулы $(r \to A) \leftrightarrow (r \to (p \wedge q))$ и $(A \to r) \leftrightarrow ((\neg(p \vee q)) \to r)$ общезначимы.

4. Можно ли построить такую формулу A, чтобы формула $((A \wedge q) \to \neg p) \to ((p \to \neg q) \to A)$ была общезначимой? Если да, то сколько неэквивалентных решений имеет задача?

5. а) Постройте пропозициональную формулу от переменных p, q и r, изменяющую своё значение при изменении значения ровно одной из этих переменных.

б) Придумайте электрическую схему, при которой свет в комнате включается и выключается любым из трёх переключателей, независимо от состояния остальных (переключатель имеет несколько контактов и 2 состояния, в одном из которых соединено одно множество контактов, а в другом — другое).

6. Пусть формула A не содержит других связок, кроме $\leftrightarrow$. Докажите, что A общезначима тогда и только тогда, когда каждая переменная входит в A чётное число раз.

Определения. Если T — множество формул *(пропозициональная теория)*, и все они истинны при интерпретации α, то пишем $\alpha \vDash T$ и говорим, что теория T истинна при интерпретации α и, наоборот, интерпретация α является *моделью* теории T. Пропозициональная теория, имеющая хотя бы одну модель, называется *выполнимой.*

7. Пусть Θ — множество всех интерпретаций. Определим на нём структуру метрического пространства следующим образом: если $\alpha, \beta \in \Theta$, причём $\alpha(p_i) = \beta(p_i)$ для всех $i < n$, а $\alpha(p_n) \neq \beta(p_n)$, то $\rho(\alpha, \beta) = 2^{-n}$ (а если $\alpha(p_i) = \beta(p_i)$ для всех i, то $\alpha = \beta$ и $\rho(\alpha, \beta) = 0$).

а) Докажите, что $\boldsymbol{\Theta} = \langle \Theta, \rho \rangle$ — метрическое пространство.

б) Докажите, что пространство $\boldsymbol{\Theta}$ компактно.

в) Пусть $T \subset \mathrm{Fm}$ — конечное множество пропозициональных формул. Докажите, что множество $\{\alpha \mid \alpha \vDash T\}$ открыто и замкнуто в $\boldsymbol{\Theta}$.

г) *Теорема о компактности для логики высказываний.* Пусть теория T такова, что любое её конечное подмножество выполнимо. Докажите, что тогда вся теория T также выполнима.

8. *Интерполяционная лемма Крейга.* Пусть A и B — пропозициональные формулы, причём формула $A \to B$ общезначима. Докажите, что существует такая формула C, что формулы $A \to C$ и $C \to B$ общезначимы, и всякая переменная, входящая в C, входит одновременно и в A, и в B.

Языки первого порядка I

Теорией первого порядка в сигнатуре Ω называется произвольное множество замкнутых (т. е. без свободных переменных) формул сигнатуры Ω.

Моделью формулы φ (теории T) сигнатуры Ω называется интерпретация сигнатуры Ω, в которой истинна формула φ (соответственно, истинны все формулы теории T). *Мощность* модели M — это мощность её множества-носителя.

Пусть в сигнатуре Ω есть двухместный предикатный символ, обозначаемый «$=$» *(равенство).* Тогда интерпретация этой сигнатуры называется *нормальной,* если этот символ интерпретируется предикатом совпадения элементов носителя (иначе говоря, *диагональным отношением* $\Delta = \{(a,a) \mid a \in M\}$). Если в сигнатуре есть символ «$=$», мы будем рассматривать только нормальные интерпретации.

Формула сигнатуры Ω называется *общезначимой,* если она истинна во всех интерпретациях сигнатуры Ω (т. е. любая интерпретация является моделью это формулы). Формула называется *выполнимой,* если существует хотя бы одна модель этой формулы.

1. Постройте формулу в сигнатуре $(=,<)$, **а)** истинную во всех конечных интерпретациях, но не общезначимую; **б)** не имеющую конечных моделей, но выполнимую.

2. Постройте теорию в сигнатуре $(=)$, истинную во всех бесконечных интерпретациях, и только в них.

3. Постройте формулу в языке первого порядка *без равенства,* имеющую 3-элементную модель и не имеющую 2-элементной.

4. Назовём *спектром* данной формулы φ (в сигнатуре с равенством) множество таких натуральных чисел n, что существует конечная модель формулы φ мощности n. Существует ли формула (в какой-либо сигнатуре), спектр которой — **а)** множество $\{2, 6, 100, 2015\}$; **б)** множество $\{1317, 1812, 1945\} \cup \{n \mid n \geqslant 2015\}$; **в)*** множество всех чётных чисел; **г)*** множество всех простых чисел?
д) Существует ли множество натуральных чисел, не являющееся спектром никакой формулы?

5*. Рассмотрим сигнатуру без констант и функциональных символов, все предикатные символы которой одноместны. Существует ли в этой сигнатуре формула, не имеющая конечных моделей?

6. Приведите пример теории, имеющей модели всех мощностей, причём все её модели данной мощности изоморфны (такая теория называется *категоричной* во всех мощностях).

7. а) Докажите, что если сигнатура конечна или счётна, то любая теория в этой сигнатуре может иметь не больше, чем континуум попарно неизоморфных счётных моделей. **б)*** Постройте (в подходящей сигнатуре) теорию, имеющую континуум попарно неизоморфных счётных моделей.

Элементарная эквивалентность

Две интерпретации называются *элементарно эквивалентными,* если в них истинны одни и те же формулы без свободных переменных.

8. Рассмотрим сигнатуру $(=, <)$. Будут ли элементарно эквивалентны её естественные интерпретации **а)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$? **б)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$?

9. Рассмотрим сигнатуру $(=, <)$ и её естественную интерпретацию на $\mathbb{R}$. Существует ли интерпретация этой сигнатуры на некотором множестве мощности континуум, не изоморфная, но элементарно эквивалентная этой интерпретации?

10. Рассмотрим сигнатуру $(+, =)$. Будут ли элементарно эквивалентны её естественные интерпретации **а)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$? **б)*** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$?

Выразимые предикаты

11. Выразите отношение $y = x + 1$ в естественной интерпретации сигнатуры $(=,<)$ на множестве $\mathbb{Z}$.

12. а) Рассмотрим интерпретацию сигнатуры $(=,+,P^2)$ на множестве $\mathbb{R}$: $P(a,b)$ истинно тогда и только тогда, когда $b = a^2$; $=$ и $+$ интерпретируются естественным образом. Выразите формулой трёхместное отношение $x = yz$. **б)*** Тот же вопрос, если $P(a,b)$ интерпретируется как $b = a^3$.

13. а) Выразите предикат «x есть степень двойки» в естественной интерпретации сигнатуры $(+,\cdot,=)$ на множестве $\mathbb{N}$.

б) Выразите предикат «$x = N$» (N — фиксированное натуральное число) в той же интерпретации формулой длины не большей, чем $C \log_2 N$ для некоторой константы C, не зависящей от N.

14. Придумайте интерпретацию сигнатуры с тремя одноместными предикатами, в которой каждый предикат выражается через два других, но ни один не выражается через другой.

Языки первого порядка II

Выразимые предикаты (продолжение)

1. Рассмотрим интерпретацию сигнатуры $(=, f^1)$ на множестве $\mathbb{Z}$: функциональный символ f интерпретируется функцией $x \mapsto (x+2)$; предикатный символ $=$ интерпретируется естественным образом. Выразимо ли формулой двуместное отношение «$y = x + 1$»?

2. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, +, 0, 1)$ на множестве $\mathbb{R}$. При каких (фиксированных) значениях $\xi \in \mathbb{R}$ предикат «$x = \xi$» выразим формулой?

3. Выразим ли предикат «$x = 3$» в множестве $\mathbb{N}$ с предикатами равенства и «y кратно z»?

Устранение кванторов

Теорема Тарского – Зайденберга. Всякая формула в сигнатуре $(=, <, 0, 1, +, \cdot)$ при стандартной интерпретации на множестве $\mathbb{R}$ эквивалентна некоторой бескванторной формуле.

Доказательство этой теоремы довольно сложно технически, однако полезно помнить, что достаточно уметь устранить *один квантор существования,* т. е. привести формулу вида $\exists x\, A$, где A не содержит кванторов, к бескванторному виду. Дальнейшее делается индукцией по количеству кванторов.

4. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для $\mathbb{C}$ (в сигнатуре, разумеется, уже не будет символа «$<$»). Верно ли, что в качестве бескванторной формулы, эквивалентной данной, и в $\mathbb{R}$, и в $\mathbb{C}$ можно взять одну и ту же формулу?

5. а) Докажите теорему об устранении кванторов для структур $\langle \mathbb{Q}, <, = \rangle$ и $\langle \mathbb{R}, <, = \rangle$. **б)** Докажите, что эти структуры элементарно эквивалентны (при этом, очевидно, не являясь изоморфными).

6. а) Докажите, что свойство «$x = \alpha$» (α — фиксированное действительное число) выразимо в $(\mathbb{R}; =, <, 0, 1, +, \cdot)$ тогда и только тогда, когда α — алгебраическое число. **б)** Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для $\mathbb{C}$.

7. Рассмотрим интерпретацию сигнатуры $(=, S, 0)$ на множестве $\mathbb{Z}$. (S — это одноместный функциональный символ, интерпретируемый функцией $x \mapsto x + 1$.) **а)** Сформулируйте и докажите теорему об устранении кванторов. **б)** Докажите, что отношение «$x < y$» в этой интерпретации невыразимо. **в)** Можно ли это сделать методом автоморфизмов?

Полные теории

Формула A *семантически следует* из теории T (пишем: $T \vDash A$), если она истинна в любой интерпретации, в которой истинны все формулы теории T.

Назовём выполнимую теорию T *полной,* если для любой формулы A либо $T \vDash A$, либо $T \vDash \neg A$.

8. а) Докажите, что полная теория обладает *дизъюнктивным свойством:* если $T \vDash B \vee C$, то $T \vDash B$ или $T \vDash C$. **б)** Существуют ли неполные теории, обладающие дизъюнктивным свойством?

9. а) Докажите, что все модели полной теории элементарно эквивалентны. **б)** Верно ли обратное?

10. Докажите, что для всякой выполнимой теории T существует полная теория T', включающая в себя T.

Рассмотрим сигнатуру $(<, =)$, и пусть теория DLO состоит из следующих аксиом:

- $\forall x\, \neg(x < x)$ (иррефлексивность);
- $\forall x \forall y \forall z\, (x < y \wedge y < z \to x < z)$ (транзитивность);
- $\forall x \forall y\, (x < y \vee x = y \vee y < x)$ (линейность);
- $\forall x \forall y\, (x < y \to \exists z\, (x < z \wedge z < y))$ (плотность);
- $\forall x \exists y \exists z (y < x \wedge x < z)$ (неограниченность в обе стороны).

11. а) Докажите, что теория DLO полна.

б) Постройте две равномощные, но не изоморфные модели DLO.

12. Заменим в DLO аксиому неограниченности в обе стороны аксиомами существования наибольшего и наименьшего элементов. Будет ли полученная теория полной?

Языки первого порядка III

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов задаётся следующими аксиомами и правилами вывода:

Аксиомы:

A1. Формулы, получаемые подстановкой из тавтологий логики высказываний.

A2. Формулы вида $(\forall x\, A) \to A[x := t]$, причём переменные терма t не связаны кванторами внутри A.

A3. Формулы вида $A[x := t] \to (\exists x\, A)$, с тем же условием.

Правила вывода:

$$\textbf{R1.}\ \frac{A \quad A \to B}{B} \qquad \underbrace{\textbf{R2.}\frac{A \to B}{A \to (\forall x\, B)} \qquad \textbf{R3.}\frac{B \to A}{(\exists x\, B) \to A}}_{\text{правила Бернайса}}$$

modus ponens (MP)

В правилах Бернайса требуется, чтобы переменная x не входила свободно в формулу A.

Пусть T — теория (множество замкнутых формул). Если некая формула A может быть выведена в исчислении предикатов, в которое формулы из T добавлены в качестве аксиом, то A *выводима в теории* T (пишем: $T \vdash A$).

1. Докажите **теорему о корректности:** если $T \vdash A$, то A истинна во всех моделях теории T.

2. Покажите, что ограничения в аксиомах **A2** и **A3** и правилах **R2** и **R3** существенны (без них в исчислении станут выводимыми необщезначимые формулы).

3. Докажите *теорему о дедукции:* если T — теория, A — замкнутая формула, а B — произвольная формула, то $T \cup \{A\} \vdash B \iff T \vdash (A \to B)$.

Теорема Гёделя о полноте (в слабой форме). Если замкнутая формула общезначима (т.е. истинна во всех интерпретациях), то она выводима в исчислении предикатов.

Теорема Гёделя о полноте (в сильной форме). Всякая непротиворечивая теория (т.е. теория, из которой средствами исчисления предикатов нельзя одновременно вывести некоторую формулу и её отрицание) имеет модель. Более того, в силу теоремы Лёвенгейма – Сколема в случае конечной или счётной сигнатуры можно построить не более чем счётную модель.

Теорема Гёделя – Мальцева о компактности. Теория T имеет модель тогда и только тогда, когда любая её конечная подтеория $T_0 \subset T$ имеет модель.

4. а) Выведите из теоремы Гёделя о полноте в сильной форме теорему Гёделя о полноте в слабой форме. **б)** Выведите теорему о компактности из теоремы Гёделя о полноте в сильной форме. **в)** Выведите теорему Гёделя о полноте в сильной форме из теоремы Гёделя о полноте в слабой форме и теоремы о компактности. **г)** Выведите из теоремы Гёделя о полноте в сильной форме следующее утверждение: если во всех моделях теории T истинна формула A, то она выводима из T (коротко это записывают так: $T \vDash A \Rightarrow T \vdash A$).

5. Выводимы ли в исчислении предикатов формулы: **а)** $(\forall x\,(A \to B) \wedge \exists x\, A) \to \exists x\, B$; **б)** $\exists x\, A \to \forall x\, A$; **в)** $\exists x\, \forall y\, A \to \forall y\, \exists x\, A$; **г)** $\forall y\, \exists x\, A \to \exists x\, \forall y\, A$?

6. Докажите, что если $T \vdash (A \to B)$, то $T \vdash (\exists x\, A \to \exists x\, B)$.

7. Пусть теории T_1 и T_2 в некоторой сигнатуре таковы, что теория $T_1 \cup T_2$ противоречива. Докажите, что найдётся такая формула A, что $T_1 \vdash A$ и $T_2 \vdash \neg A$.

8. а) *Признак Лося – Воота.* Пусть теория T в конечной или счётной сигнатуре не имеет конечных моделей и категорична в счётной мощности (т.е. все её счётные модели изоморфны). Докажите, что T полна. **б)** Покажите, что условие отсутствия конечных моделей в этой теореме существенно.

Применения теоремы о компактности

9. Существует ли теория, имеющая конечные модели сколь угодно большой мощности, но не имеющая бесконечной модели?

10. Рассмотрим сигнатуру, содержащую только двуместный предикатный символ равенства и двуместный предикатный символ R, интерпретации — множества с бинарными отношениями (ориентированные графы). Можно ли выразить формулами 1-го порядка следующие свойства отношения/графа: **а)** симметричность; **б)** рефлексивность; **в)** транзитивность; **г)** существование клики размера 6 (множества из 6 вершин, в котором каждая соединена с каждой стрелками в обе стороны); **д)** конечность множества вершин; **е)** «вершин либо чётное число, либо бесконечно много»; **ё)** ацикличность; **ж)** связность?

11. Рассмотрим сигнатуру $(+, \cdot, S, =)$ и её естественную интерпретацию на множестве $\mathbb{N}$ (функциональный символ S интерпретируется отображением $x \mapsto (x+1)$). Существует ли счётная интерпретация этой сигнатуры, элементарно эквивалентная, но не изоморфная естественной интерпретации на $\mathbb{N}$?

Языки первого порядка IV

Выразимость в арифметике

1. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(\cdot, =)$ на множестве $\mathbb{N}$. Выразимо ли в ней отношение **а)** $x < y$? **б)** $x + y = z$? **в)** „x — простое число“?

Определения. Множество $M \subseteq \mathbb{N}^n$ называется *арифметическим,* если существует формула $A(x_1, \ldots, x_n)$ в сигнатуре $(+, \cdot, =, 0, 1)$, истинная (в стандартной интерпретации этой сигнатуры на $\mathbb{N}$) в точности на наборах $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, принадлежащих M. Функция $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ называется арифметической, если её график $\Gamma_f = \{(a_1, \ldots, a_k, f(a_1, \ldots, a_k)) \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}\}$ является арифметическим множеством. (В частности, график функции одного аргумента $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — это множество $\Gamma_f = \{(a, f(a)) \mid a \in \mathbb{N}\}$.)

2. Докажите, что функция $x \mapsto [\sqrt{x}\,]$ (целая часть квадратного корня) арифметическая.

3. Докажите, что композиция арифметических функций — тоже арифметическая функция.

4. *Кодирование пар.* Постройте такую биективную функцию $f \colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что функции $\pi_1 \colon f(a, b) \mapsto a$, $\pi_2 \colon f(a, b) \mapsto b$ и сама f арифметические.

5. *Кодирование конечных множеств.* Обозначим через $\{0, 1\}^*$ множество всех конечных слов, составленных из 0 и 1. (В частности, в этом множестве содержится пустое слово Λ.) Построим биективное отображение $g \colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}^*$, действующее по следующему правилу: „возьми двоичную запись числа $n+1$ и удали первую единицу“. Значения функции g на первых нескольких натуральных числах приведены в таблице (напомним, что мы считаем ноль натуральным числом):

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$g(n)$	Λ	0	1	00	01	10	11	000	001	…

Докажите, что следующие множества арифметические: **а)** $\{n \in \mathbb{N} \mid$ слово $g(n)$ состоит из одних нулей$\}$; **б)** $\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid$ слова $g(n)$ и $g(m)$ имеют одинаковую длину$\}$; **в)** $\{(n, m, k) \in \mathbb{N}^3 \mid g(k) = g(n)g(m)\}$ (иными словами — функция *приписывания,* или *конкатенации,* арифметическая); **г)** $\{(n, m) \mid g(m)$ — подслово $g(n)\}$.

Пусть трёхместное отношение $S(x, y, z)$ означает „слово $g(y)g(x)g(y)$ (конкатенация трёх слов) есть подслово слова $g(z)$“. **д)** Докажите, что предикат S арифметичен. **е)** Докажите, что при любых a, b множество $S_{a,b} = \{c \mid S(c, a, b)\}$ конечно. **ё)** Докажите, что всякое конечное множество натуральных чисел имеет вид $S_{a,b}$ для некоторых a и b.

6. **а)** Докажите, что множество $\{6^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ арифметическое. **б)** Докажите, что функции $x \mapsto 6^x$ и $x \mapsto x!$ арифметические. **в)** Докажите, что функция $x \mapsto [\lg x]$ (целая часть десятичного логарифма) арифметическая.

Разные задачи

7. Перечислите все множества $M \subseteq \mathbb{R}$, определимые в естественной интерпретации сигнатуры $(+, =)$ на $\mathbb{R}$.

8. **а)** *Теорема Эрбрана.* Докажите, что если $\vdash \exists x\, A(x)$ (где $A(x)$ — формула некоторой сигнатуры Ω с одной свободной переменной x), то существует конечный набор термов $t_1, \ldots, t_n$ сигнатуры Ω, такой что $\vdash A(t_1) \vee \ldots \vee A(t_n)$.
б) Верно ли то же утверждение для произвольной теории T (если $T \vdash \exists x\, A(x)$, то существуют такие $t_1, \ldots, t_n$, что $T \vdash A(t_1) \vee \cdots \vee A(t_n)$)?

9. Рассмотрим интерпретацию сигнатуры $(+, \cdot, =, 0, 1)$ на некотором конечном поле $\mathbb{F}$. Докажите, что в этой интерпретации любая формула эквивалентна некоторой бескванторной формуле.

10. Существует ли теория первого порядка в сигнатуре $(+, \cdot, =, 0, 1)$, моделями которой являются **а)** в точности все конечные поля? **б)** в точности все поля ненулевой характеристики?

11. Рассмотрим сигнатуру, состоящую из одного символа $=$ (равенство), и пусть $E_k = \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \exists y\, (y \neq x_1 \wedge \ldots \wedge y \neq x_k)$. Является ли теория $T = \{E_1, E_2, E_3, \ldots\}$ полной?

12. Рассмотрим счётную сигнатуру $(<, c_0, c_1, c_2, \ldots)$, где $<$ — двуместный предикатный символ, c_i — константные символы, и пусть теория T_3 задаётся аксиомами DLO (теория плотных неограниченных линейных порядков) и дополнительными аксиомами $c_0 < c_1$, $c_1 < c_2$, $c_2 < c_3$, … **а)** Докажите, что теория T_3 имеет ровно три неизоморфные счётные модели. **б)** Полна ли теория T_3?

Модальная логика

Модальные формулы строятся из счётного числа переменных ($\mathrm{Var} = \{p, q, r, \ldots\}$) при помощи классических связок ($\wedge, \vee, \to, \neg$) и дополнительной одноместной связки $\Box$. Связка $\Diamond$ определяется как сокращённая запись комбинации $\neg\Box\neg$. *Шкала Крипке* есть ориентированный граф $\langle W, R\rangle$, где W — непустое множество (его элементы называются *«мирами»*), а $R \subseteq W \times W$ — произвольное бинарное отношение на W, называемое *отношением достижимости.* Утверждение $\langle x, y\rangle \in R$ мы будем записывать как xRy и иногда произносить как «мир x видит мир y». *Интерпретацией (оценкой)* переменных в данной шкале Крипке называется функция $\theta\colon W \times \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ (в каждом мире истинность переменных определяется независимо). Истинность сложных формул в данном мире определяется индукцией по их построению. Случай классических связок разбирается по таблицам истинности. Формула $\Box A$ истинна в мире u тогда и только тогда, когда во всех видимых из мира u мирах истинна формула v ($u \Vdash \Box A \iff (\forall v)\,(uRv \Rightarrow v \Vdash A)$). Из определений сразу получается, что $u \Vdash \Diamond A \iff (\exists v)\,(uRv$ и $v \Vdash A)$. Формула A называется *общезначимой* в шкале $\langle W, R\rangle$, если она истинна во всех мирах при всех возможных оценках переменных.

1. Рассмотрим шкалу Крипке $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ («миры» — целые числа, мир n «видит» мир m в точности тогда, когда $n < m$). Определим интерпретацию переменных p и q следующим образом: в мире n истинна переменная p тогда и только тогда, когда n чётно; в мире n истинна переменная q тогда и только тогда, когда $n > 0$. В каких точках полученной модели верны формулы: **а)** $\Diamond\Box q \wedge \Box\Diamond p$; **б)** $\Diamond(p \wedge \neg q) \vee q$? **в)** Постройте модальную формулу, истинную во всех мирах, кроме мира -1.

2. Общезначима ли формула $\Box(\Box p \to p) \to (\Diamond\Box p \to \Box p)$ в шкале **а)** $\langle \mathbb{N}, <\rangle$; **б)** $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$; **в)** $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$?

3. Для каждой из следующих формул опишите класс шкал Крипке, в которых эта формула общезначима: **а)** $\Box p$; **б)** $\Diamond(p \vee \neg p)$; **в)** $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$; **г)** $\Diamond\Box p \to p$; **д)** $\Box p \to \Diamond p$; **е)** $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

4. Напишите модальную формулу, общезначимую в точности в тех шкалах Крипке, в которых **а)** из каждого мира достижимы не более n миров; **б)** длина максимального пути не больше n.

5. Существует ли *конечная* шкала Крипке, в которой общезначимы в точности все формулы, общезначимые во всех шкалах Крипке?

Теория алгоритмов I

Вычислимая функция — это функция, вычисляемая некоторым алгоритмом. Заметим, что вычислимая функция может быть определена не всюду: на некоторых входных данных алгоритм может «зависнуть».

Понятие алгоритма можно формализовывать многими различными способами; оказывается, что все они приводят к одному и тому же классу вычислимых функций. Это утверждение (называемое иногда *тезисом Чёрча)* не может быть полностью доказано как математическая теорема (поскольку квантор «для всех разумных формализаций понятия алгоритма» нематематический), однако для двух конкретных формализаций эквивалентность может быть проверена непосредственно.

Разрешимое множество — это множество, характеристическая функция которого вычислима.

Перечислимое множество — это множество значений некоторой вычислимой функции.

Всякое разрешимое множество перечислимо. Обратное неверно, но пример мы построим позже.

1. Докажите, что следующие свойства множества A равносильны: (1) A перечислимо; (2) A есть область определения некоторой вычислимой функции; (3) A либо пусто, либо является множеством значений некоторой всюду определённой вычислимой функции.

2. Докажите, что функция f вычислима тогда и только тогда, когда её *график* (множество $\Gamma_f = \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in D(f)\}$) перечислим.

3. Докажите *теорему Поста:* множество $A \subseteq \mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда множества A и $\mathbb{N} - A$ перечислимы.

4. Всюду определённая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ неубывает (т. е. если $m > n$, то $f(m) \geqslant f(n)$) и вычислима. Докажите, что её множество значений разрешимо. Верно ли, что всякое непустое разрешимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ можно задать таким образом?

5. Разрешимо ли множество **а)** $\{n \in \mathbb{N} \mid (\exists p \geqslant n)\ p$ и $p+2$ простые$\}$; **б)** $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < e\}$ разрешимо?

6. Множество $F \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ таково, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множества $F_n^{(1)} = \{m \mid \langle n, m\rangle \in F\}$ и $F_n^{(2)} = \{m \mid \langle m, n\rangle \in F\}$ разрешимы. Всегда ли разрешимо само множество F?

7. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ содержит бесконечное разрешимое подмножество.

Теория алгоритмов II

Пусть все алгоритмы занумерованы натуральными числами и пусть соответствующие им вычислимые функции (из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$) суть $g_0, g_1, g_2, \ldots$. *Универсальная вычислимая функция* $F\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такова, что $F(n,m) = g_n(m)$. При подходящей нумерации алгоритмов сама функция F также вычислима. Кроме того, мы потребуем, чтобы наша универсальная функция была *главной,* т. е. для любой двуместной вычислимой функции G существует всюду определённая одноместная вычислимая функция s, для которой $G(n,m) = F(s(n),m)$.

1. а) Пусть задана главная универсальная вычислимая функция F. Докажите, что существует такая вычислимая функция $c\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, что для всех m и n верно $g_{c(m,n)} = g_m \circ g_n$ (знак «$\circ$» означает композицию функций). **б)** Верно ли это для неглавной F?

2. Определим функцию

$$f_0(n) = \begin{cases} F(n,n)+1, & \text{если } F(n,n) \text{ определено;} \\ \text{не опр.} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажите, что f_0 является вычислимой функцией, однако не имеет всюду определённого вычислимого продолжения (т. е. не существует такой всюду определённой вычислимой функции $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, такой что $f|_{\mathcal{D}(f_0)} = f_0$).

3. Пусть f_0 — вычислимая функция, не имеющая всюду определённого вычислимого продолжения. Докажите, что её область определения является перечислимым, но не разрешимым множеством.

4. а) Докажите, что существуют непересекающиеся перечислимые множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, которые не отделяются никаким разрешимым множеством (т. е. не существует такого разрешимого $Z \subseteq \mathbb{N}$, что $X \subseteq Z$ и $Y \cap Z = \varnothing$). **б)** Докажите, что существует счётное число непересекающихся перечислимых множеств, никакие два из которых нельзя отделить друг от друга разрешимым множеством.

5. Докажите *теорему Успенского – Райса:* пусть $\mathcal{K}$ — нетривиальное множество вычислимых функций (т. е. непустое и не совпадающее с множеством всех вычислимых функций). Тогда множество $\{n \mid g_n \in \mathcal{K}\}$ неразрешимо.

6. Разрешимо ли множество $\{\langle n_1, n_2\rangle \mid g_{n_1} \text{ и } g_{n_2} \text{ — одна и та же функция}\}$?

7. Может ли какая-нибудь вычислимая функция встретиться в последовательности $g_0, g_1, g_2, \ldots$ конечное число раз?

8. Некоторое множество S натуральных чисел разрешимо. Разложим все числа из S на простые множители и составим множество D из всех простых чисел, встречающихся в этих разложениях. Можно ли утверждать, что множество D разрешимо?

Разрешимые и перечислимые теории

Пусть T — множество замкнутых формул (теория первого порядка) в некоторой сигнатуре. Положим $[T] = \{\varphi \mid T \vdash \varphi\}$ — множество *теорем* теории T (а само множество T тогда можно назвать *аксиоматизацией* множества $[T]$). Также $[T]$ называется *дедуктивным замыканием* множества T.

Теория T называется *разрешимой (перечислимой),* если разрешимо (соответственно, перечислимо) множество $[T]$. Теория T называется *разрешимо (перечислимо) аксиоматизируемой,* если существует разрешимое (соответственно, перечислимое) множество замкнутых формул T', такое, что $[T'] = [T]$.

9. а) Докажите, что всякая перечислимо аксиоматизируемая теория перечислима. **б)** *Трюк Крейга.* Докажите, что всякая перечислимая теория разрешимо аксиоматизируема.

10. Разрешима ли теория **а)** DLO (теория плотных линейных порядков без первого и последнего элементов); **б)** $\mathrm{Th}(\mathbb{R}; +, \cdot, =, <, 0, 1)$ (множество всех формул сигнатуры $\langle +, \cdot, =, <, 0, 1\rangle$, истинных при естественной интерпретации на множестве действительных чисел)?

11. Постройте разрешимо аксиоматизируемую и при этом неразрешимую теорию первого порядка (в некоторой сигнатуре).