№ 1. Логика высказываний

Определения. Зафиксируем счётное множество $\mathrm{Var} = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots\}$, называемое множеством *пропозициональных переменных.* Иногда для удобства мы будем обозначать пропозициональные переменные разными буквами (например, $p = p_1$, $q = p_2$, $r = p_3$ и т. д.).

Множество Fm *пропозициональных формул* определяется следующим образом:
1) любая пропозициональная переменная является пропозициональной формулой;
2) константа $\bot$ («ложь») является пропозициональной формулой;
3) если A и B — пропозициональные формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $\neg A$ — тоже пропозициональные формулы;
4) других пропозициональных формул нет.

Подчеркнём, что формула — это всего лишь строчка символов, сугубо синтаксический объект.

Слово «пропозициональный» в этом листочке мы будем иногда опускать.

Определения. Назовём *интерпретацией* произвольное отображение $\alpha\colon \mathrm{Var} \to \{0,1\}$. Отображение α распространяется на все пропозициональные формулы по таблицам истинности; обозначим это расширение через $\bar\alpha$. Значение $\bar\alpha(A)$ называется *истинностным значением* формулы A при интерпретации α. Если для данной формулы A верно $\bar\alpha(A) = 1$, то говорят, что формула A *истинна при интерпретации* α, и пишут $\alpha \vDash A$. В противном случае A *ложна при интерпретации* α; $\alpha \nvDash A$.

Формула A *общезначима* (является *тавтологией*), если она истинна при всех интерпретациях.

Формулы A и B *эквивалентны,* если формула $A \leftrightarrow B$ общезначима.

1. Запишите пропозициональную формулу, выражающую следующее рассуждение:

> *Если инвестиции останутся постоянными, то вырастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не вырастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и инвестиции останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы вырастут.*

Является ли эта формула тавтологией?

2. а) Докажите, что формула $p \vee q$ не эквивалентна никакой формуле, в записи которой встречаются только знаки $\leftrightarrow$, $\neg$, скобки и пропозициональные переменные.

б) Докажите, что формула $p \to q$ не эквивалентна никакой формуле, в записи которой встречаются только знаки $\vee$, $\wedge$, скобки и пропозициональные переменные.

3. Постройте формулу от трёх переменных p, q и r, истинную в том и только в том случае, когда **а)** ровно одна; **б)** не менее двух из переменных принимают значение 1.

4. Постройте пропозициональную формулу A, для которой обе формулы $(r \to A) \leftrightarrow (r \to (p \wedge q))$ и $(A \to r) \leftrightarrow ((\neg(p \vee q)) \to r)$ общезначимы.

5. Можно ли построить такую формулу A, чтобы формула $((A \wedge q) \to \neg p) \to ((p \to \neg q) \to A)$ была общезначимой? Если да, то сколько неэквивалентных решений имеет задача?

6. Постройте пропозициональную формулу от переменных p, q и r, истинную в точности тогда, когда истинны либо все три переменные, либо ровно одна.

7*. Пусть формула A не содержит других связок, кроме $\leftrightarrow$. Докажите, что A общезначима тогда и только тогда, когда каждая переменная входит в A чётное число раз.

Определения. Если T — множество формул *(пропозициональная теория)*, и все они истинны при интерпретации α, то пишем $\alpha \vDash T$ и говорим, что теория T истинна при интерпретации α и, наоборот, интерпретация α является *моделью* теории T. Пропозициональная теория, имеющая хотя бы одну модель, называется *выполнимой.*

8*. Пусть Θ — множество всех интерпретаций. Определим на нём структуру метрического пространства следующим образом: если $\alpha, \beta \in \Theta$, причём $\alpha(p_i) = \beta(p_i)$ для всех $i < n$, а $\alpha(p_n) \neq \beta(p_n)$, то $\rho(\alpha, \beta) = 2^{-n}$ (а если $\alpha(p_i) = \beta(p_i)$ для всех i, то $\alpha = \beta$ и $\rho(\alpha,\beta) = 0$). **а)** Докажите, что $\mathbf{\Theta} = \langle \Theta, \rho \rangle$ — метрическое пространство. **б)** Докажите, что пространство $\mathbf{\Theta}$ компактно. **в)** Пусть $T \subset \mathrm{Fm}$ — конечное множество пропозициональных формул. Докажите, что множество $\{\alpha \mid \alpha \vDash T\}$ открыто и замкнуто в $\mathbf{\Theta}$. **г)** *Теорема о компактности для логики высказываний.* Пусть теория T такова, что любое её конечное подмножество выполнимо. Докажите, что тогда вся теория T также выполнима.

9*. *Интерполяционная лемма Крейга.* Пусть A и B — пропозициональные формулы, причём формула $A \to B$ общезначима. Докажите, что существует такая формула C, что формулы $A \to C$ и $C \to B$ общезначимы, и всякая переменная, входящая в C, входит одновременно и в A, и в B.

№ 2. Выразимые предикаты

1. Выразите отношение $y = x + 1$ в естественной интерпретации сигнатуры $(=, <)$ на множестве $\mathbb{Z}$.

2. а) Рассмотрим интерпретацию сигнатуры $(=, +, P^2)$ на множестве $\mathbb{R}$: $P(a, b)$ истинно тогда и только тогда, когда $b = a^2$; $=$ и $+$ интерпретируются естественным образом. Выразите формулой трёхместное отношение $x = yz$. **б)*** Тот же вопрос, если $P(a, b)$ интерпретируется как $b = a^3$.

3. Придумайте интерпретацию сигнатуры с тремя одноместными предикатами, в которой каждый предикат выражается через два других, но ни один не выражается через другой.

4. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, +, 0, 1)$ на множестве $\mathbb{R}$. При каких (фиксированных) значениях $\xi \in \mathbb{R}$ предикат «$x = \xi$» выразим формулой?

5*. Выразим ли предикат «$x = 3$» в множестве $\mathbb{N}$ с предикатами равенства и «y кратно z»?

6. а) Выразите предикат «x есть степень двойки» в естественной интерпретации сигнатуры $(+, \cdot, =)$ на множестве $\mathbb{N}$.

б) Выразите предикат «$x = N$» (N — фиксированное натуральное число) в той же интерпретации формулой длины не большей, чем $C \log_2 N$ для некоторой константы C, не зависящей от N.

7. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(\cdot, =)$ на множестве $\mathbb{N}$. Выразимо ли в ней отношение **а)*** $x < y$? **б)*** $x + y = z$? **в)** „x — простое число“ ?

8*. Выразимо ли отношение $x+y = z$ в естественной интерпретации сигнатуры $(\cdot, <, =)$ на множестве $\mathbb{N}$?

9*. На множестве $\mathbb{R}$ даны предикаты „$x+y = z$“ и „$xy = z$“. Выразим ли через них предикат „$x > 0$“ ?

Определения. Множество $M \subseteq \mathbb{N}^n$ называется *арифметическим,* если существует формула $A(x_1, \ldots, x_n)$ в сигнатуре $(+, \cdot, =, 0, 1)$, истинная (в стандартной интерпретации этой сигнатуры на $\mathbb{N}$) в точности на наборах $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, принадлежащих M. Функция $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ называется арифметической, если её график $\Gamma_f = \{(a_1, \ldots, a_k, f(a_1, \ldots, a_k)) \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}\}$ является арифметическим множеством. (В частности, график функции одного аргумента $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — это множество $\Gamma_f = \{(a, f(a)) \mid a \in \mathbb{N}\}$.)

10. Докажите, что функция $x \mapsto [\sqrt{x}\,]$ (целая часть квадратного корня) арифметическая.

11. Докажите, что композиция арифметических функций — тоже арифметическая функция.

12*. Пусть $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — арифметическая функция и пусть функция $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ задана рекурсией: $g(0) = a$ (a — фиксированное натуральное число), $g(n + 1) = f(n, g(n))$. Докажите, что g — арифметическая функция.

№ 3. Логика 1-го порядка. Теории и модели

1. Какие из следующих формул общезначимы:

$$\forall x\,(P(x) \lor Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \lor (\forall x\,Q(x));$$

$$\forall x\,(P(x) \lor Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \lor (\exists x\,Q(x));$$

$$\exists y\,\forall x\,P(x,y,y) \to \forall x\,\exists y\,\forall z\,P(x,y,z)\,?$$

2. Вынесите все кванторы наружу в следующих формулах:

$$\neg\forall x\,\forall y P(x,y) \lor \forall x\,\exists y\,Q(x,y);$$

$$\forall x\,\exists y\,P(x,y) \to \exists x\,\forall y\,Q(x,y).$$

3. Докажите, что следующая формула истинна при стандартной интерпретации на множестве $\mathbb{N}$:

$$\forall x\,\exists z\,\forall y\,\exists u\,((y > z \to y > u) \land (u < z) \land \neg(u < x)).$$

4. Докажите, что следующая формула может быть истинна только в бесконечной интерпретации:

$$\forall x\,\exists y\,Q(x,y) \land \forall x\,\forall y\,\forall z\big(\neg Q(x,x) \land (Q(x,y) \to (Q(y,z) \to Q(x,z)))\big).$$

5*. Рассмотрим конечную сигнатуру без констант и функциональных символов, все предикатные символы которой одноместны. Существует ли в этой сигнатуре выполнимая **а)** замкнутая формула (т.е. формула без свободных переменных); **б)** теория (множество замкнутых формул), не имеющая конечных моделей.

Моделью теории (формулы) называется интерпретация, в которой эта теория (формула) истинна.
Теория (формула) называется *выполнимой,* если у неё есть хотя бы одна модель.

6*. Постройте формулу 1-го порядка *без равенства,* имеющую 8-элементную модель, но не имеющую 7-элементной.

7*. Докажите, что следующая формула истинна в любой интерпретации с трёхэлементным носителем:

$$\forall x\,R(x,x) \land \forall x\,\forall y\,\forall z\,\big(R(x,z) \to (R(x,y) \lor R(y,z))\big) \to \exists u\,\forall v\,R(u,v).$$

8. Назовём *спектром* данной формулы φ (в сигнатуре с равенством) множество таких натуральных чисел n, что существует конечная модель формулы φ мощности n. Существует ли формула (в какой-либо сигнатуре), спектр которой — **а)** множество $\{2, 6, 100, 2016\}$; **б)** множество $\{1136, 1317, 1917\} \cup \{n \mid n \geqslant 2016\}$; **в)*** множество всех чётных чисел; **г)*** множество всех простых чисел?
д) Существует ли множество натуральных чисел, не являющееся спектром никакой формулы?

9. а) Докажите, что если сигнатура конечна или счётна, то любая теория в этой сигнатуре может иметь не больше, чем континуум попарно неизоморфных счётных моделей. **б)*** Постройте (в подходящей сигнатуре) теорию, имеющую континуум попарно неизоморфных счётных моделей.

Две интерпретации называются *элементарно эквивалентными,* если в них истинны одни и те же замкнутые формулы.

10. Рассмотрим сигнатуру $(=, <)$. Будут ли элементарно эквивалентны её естественные интерпретации **а)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$? **б)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$?

11. Рассмотрим сигнатуру $(+, =)$. Будут ли элементарно эквивалентны её естественные интерпретации **а)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$? **б)*** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$?

Формула A *семантически следует* из теории T (обозначение: $T \vDash A$), если A истинна в любой модели теории T. Выполнимая теория T называется *полной,* если для любой формулы A либо $T \vDash A$, либо $T \vDash \neg A$.

12. Докажите, что любая полная теория T обладает *дизъюнктивным свойством:* если $T \vDash A \lor B$, то $T \vDash A$ или $T \vDash B$. Существуют ли неполные теории с дизъюнктивным свойством?

13. Докажите, что все модели полной теории элементарно эквивалентны.

Теория называется *категоричной* в мощности $\varkappa$, если все её модели с мощностью носителя $\varkappa$ изоморфны.

14.** Приведите пример теории, не категоричной в счётной мощности, но категоричной в любой бесконечной несчётной мощности.

№ 4. Логика 1-го порядка. Компактность и не только

Теорема Гёделя – Мальцева о компактности. Пусть теория 1-го порядка T в некоторой сигнатуре Ω такова, что всякая её конечная подтеория $T_0 \subset T$ имеет модель. Тогда и вся теория T имеет модель.

1. Докажите, что не существует системы аксиом, моделями которой были бы в точности все поля всевозможных конечных характеристик $p > 0$.

2. Докажите, что не существует конечной системы аксиом, моделями которой были бы в точности все бесконечные группы.

3. Пусть $\mathcal{N}^*$ — нестандартная модель арифметики (т.е. интерпретация сигнатуры $\langle +, \cdot, <, 0, 1\rangle$, элементарно эквивалентная стандартной, но в которой существует элемент c, не равный 0 и не представимый в виде $1+1+\ldots+1$). Такой элемент называется *нестандартным.* Существование нестандартной модели арифметики следует из теоремы о компактности. *Галактикой* элемента c называется подмножество носителя $\mathcal{N}^*$, составленное из самого элемента c и элементов вида $c+(1+\ldots+1)$ и $c-(1+\ldots+1)$. **а)** Докажите, что две галактики либо не пересекаются, либо совпадают (т.е. галактики образуют разбиение множества всех нестандартных элементов). **б)*** Докажите, что, если G_1 и G_2 — две галактики, то $\{x+y \mid x \in G_1, y \in G_2\}$ — тоже галактика. **в)*** Верно ли, что $\{x \cdot y \mid x \in G_1, y \in G_2\}$ тоже будет галактикой? **г)** Докажите, что если $G_1 \neq G_2$, то либо $G_1 < G_2$, либо $G_2 < G_1$ (т.е. любой элемент G_1 меньше любого элемента G_2, либо наоборот). **д)** Докажите, что отношение порядка на галактиках обладает свойством плотности (если $G_1 < G_2$, то найдётся галактика G_3, такая что $G_1 < G_3 < G_2$) и не имеет первого и последнего элементов.

4. а) Теорема Гёделя о полноте *в слабой форме* утверждает, что всякая общезначимая (т.е. истинная при всех интерпретациях) формула выводима в исчислении предикатов. Выведите из теоремы о полноте в слабой форме и теоремы о компактности теорему Гёделя о полноте *в сильной форме:* всякая непротиворечивая теория (т.е. теория, из которой средствами исчисления предикатов нельзя вывести $\perp$) имеет модель (т.е. интерпретацию, в которой она истинна).
б) Выведите из теоремы Гёделя о полноте в сильной форме следующее утверждение: если во всех моделях теории T истинна формула A, то она выводима из T (коротко это записывают так: $T \vDash A \Rightarrow T \vdash A$).

5*. Пусть теории T_1 и T_2 таковы, что теория $T_1 \cup T_2$ не имеет моделей. Докажите, что найдётся такая формула A, что $T_1 \vDash A$ и $T_2 \vDash \neg A$.

6. Рассмотрим сигнатуру, содержащую только двуместный предикатный символ равенства и двуместный предикатный символ R, интерпретации — множества с бинарными отношениями (ориентированные графы). Можно ли выразить формулами 1-го порядка следующие свойства отношения/графа: **а)** симметричность; **б)** рефлексивность; **в)** транзитивность; **г)** существование клики размера 6 (множества из 6 вершин, в котором каждая соединена с каждой в обе стороны); **д)** конечность множества вершин; **е)** «вершин либо чётное число, либо бесконечно много»; **ё)** ацикличность; **ж)*** связность?

7.** Определим для двух неориентированных графов G и H *игру Эренфойхта* $\mathrm{EHR}(G,H,k)$ следующим образом. Первый игрок (*Новатор*) своим ходом выбирает один из графов и ещё не выбранную вершину в нём; второй игрок (*Консерватор*) должен выбрать соответствующую вершину в другом графе. Игра длится k пар ходов. В итоге в графах G и H окажутся выделенными наборы вершин $u_1, \ldots, u_k$ и $v_1, \ldots, v_k$ соответственно. Консерватор выигрывает, если $u_1 \sim u_2 \iff v_1 \sim v_2$ ($x \sim y$ означает, что вершины x и y соединены ребром); в противном случае выигрывает Новатор.

а) Пусть графы G и H изоморфны. У которого из игроков есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G,H,k)$?

б) Пусть в графе G есть треугольник, а в графе H — нет. При каком наименьшем k у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G,H,k)$?

в) Рассмотрим сигнатуру $(\sim, =)$. Каждый граф есть интерпретация этой сигнатуры. Пусть дана формула A в этой сигнатуре. Докажите, что существует такое число k (зависящее только от A), что если $G \vDash A$ и $H \vDash \neg A$, то у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G,H,k)$.

г) Будем говорить, что граф G обладает *свойством k-расширения*, если для любого набора вершин $u_1, \ldots, u_a$, $v_1, \ldots, v_b$, где $a+b \leqslant k$, существует вершина w, такая что $u_i \sim w$ и $v_j \not\sim w$. Докажите, что если графы G и H обладают свойством k-расширения, то в игре $\mathrm{EHR}(G,H,k)$ выигрышная стратегия есть у Консерватора.

Рассмотрим случайный граф на n вершинах (для каждой пары вершин ребро между ними проводится независимо от других с некоторой фиксированной вероятность p). Оказывается, что при фиксированном k вероятность того, что этот граф обладает свойством k-расширения, стремится к 1 с ростом n. Отсюда следует *закон 0 или 1* [Глебский и др. 1969, Фейгин 1976]: для данной формулы A вероятность того, что случайный граф обладает свойством A, стремится либо к 0, либо к 1 с ростом n. Иначе говоря, любое свойство случайного графа, выразимое на языке первого порядка, либо асимптотически почти наверное истинно, либо асимптотически почти наверное ложно.

8*. *Теорема Эрбрана.* Докажите, что если формула $\exists x\, A(x)$ (где $A(x)$ — формула некоторой сигнатуры Ω с одной свободной переменной x) выводима в исчислении предикатов в сигнатуре Ω, то существует конечный набор термов $t_1, \ldots, t_n$ этой сигнатуры, что выводима формула $A(t_1) \vee \ldots \vee A(t_n)$.

9. Рассмотрим сигнатуру, состоящую из одно символа равенства $(=)$, и пусть $E_k = \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \exists y (y \neq x_1 \wedge \ldots \wedge y \neq x_k)$. Является ли теория $T = \{E_1, E_2, \ldots\}$ полной?

10*. Рассмотрим счётную сигнатуру $(<, c_0, c_1, c_2, \ldots)$, где $<$ — двуместный предикатный символ, c_i — константные символы, и пусть теория T_3 задаётся аксиомами DLO (теория плотных неограниченных линейных порядков) и дополнительными аксиомами $c_0 < c_1$, $c_1 < c_2$, $c_2 < c_3$, $\ldots$. **а)** Докажите, что теория T_3 имеет ровно три неизоморфные счётные модели. **б)** Полна ли теория T_3?

11.** Пусть в сигнатуре Ω существуют две такие теории T_1 и T_2, что любая интерпретация сигнатуры Ω является моделью в точности одной из этих двух теорий. Докажите, что существует такая формула A, что класс всех моделей формулы A совпадает с классом всех моделей теории T_1.

№ 5. Алгоритмы

Пусть зафиксировано конечное непустое множество Σ — *алфавит.* Через Σ^* обозначим множество всех *слов,* составленных из букв алфавита Σ. Мы будем рассматривать множества $A \subseteq \Sigma^*$ и функции $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$. Если считать, что в Σ есть элементы 0 и 1, то каждому множеству $A \subseteq \Sigma^*$ можно сопоставить *характеристическую функцию,* определяемую следующим образом:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin A, \\ 1, & \text{если } x \in A. \end{cases}$$

Вычислимая функция — это функция, вычисляемая некоторым алгоритмом. Заметим, что вычислимая функция может быть определена не всюду: на некоторых входных данных алгоритм может «зависнуть».

Понятие алгоритма можно формализовывать многими различными способами; оказывается, что все они приводят к одному и тому же классу вычислимых функций. Это утверждение (называемое иногда *тезисом Чёрча)* не может быть полностью доказано как математическая теорема (поскольку квантор «для всех разумных формализаций понятия алгоритма» нематематический), однако для двух конкретных формализаций эквивалентность может быть проверена непосредственно.

Разрешимое множество — это множество, характеристическая функция которого вычислима.

Перечислимое множество — это множество значений некоторой вычислимой функции.

Существует вычислимая частичная функция, у которой нет всюду определённого вычислимого продолжения (этим фактом можно пользоваться без доказательства). Область определения этой функции — **перечислимое, но не разрешимое множество.**

1. Докажите, что функция f вычислима тогда и только тогда, когда её *график* (множество $\Gamma_f = \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in D(f)\}$) перечислим.

2. Докажите, что существуют непересекающиеся перечислимые множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, которые не отделяются никаким разрешимым множеством (т. е. не существует такого разрешимого $Z \subseteq \mathbb{N}$, что $X \subseteq Z$ и $Y \cap Z = \varnothing$).

3. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество есть область значений некоторой всюду определённой инъективной функции (*перечисление без повторений*).

4. Пусть функция $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ всюду определена, вычислима и монотонна в следующем смысле: если слово u является собственным началом слова v (т.е. $v = uv'$ для некоторого непустого v'), то $f(u)$ является собственным началом $f(v)$. Докажите, что область значений f — разрешимое множество. Докажите, что всякое бесконечное разрешимое множество можно задать таким образом.

5*. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

Пусть T — множество замкнутых формул (теория первого порядка) в некоторой сигнатуре. Положим $[T] = \{\varphi \mid T \vdash \varphi\}$ — множество *теорем* теории T (а само множество T тогда можно назвать *аксиоматизацией* множества $[T]$). Также $[T]$ называется *дедуктивным замыканием* множества T.

Теория T называется *разрешимой (перечислимой),* если разрешимо (соответственно, перечислимо) множество $[T]$. Теория T называется *разрешимо (перечислимо) аксиоматизируемой,* если существует разрешимое (соответственно, перечислимое) множество замкнутых формул T' эквивалентная T — т. е. такое, что $[T'] = [T]$.

6. Докажите, что теория DLO (теория плотных линейных порядков без наибольшего и наименьшего элементов) разрешима.

7. а) Докажите, что всякая перечислимо аксиоматизируемая теория перечислима.

б) Докажите, что для всякой теории $T = \{\psi_1, \psi_2, \dots\}$ существует эквивалентная ей теория $T' = \{\psi_1', \psi_2', \dots\}$, такая что длина формулы ψ_{n+1}' (как слова в подходящем алфавите) больше, чем длина формулы ψ_n'.

в)* *Трюк Крейга.* Докажите, что всякая перечислимая теория разрешимо аксиоматизируема.

8*. Некоторое множество S натуральных чисел разрешимо (натуральное число n можно кодировать, например, унарной записью: $\underbrace{aa\dots a}_{n}$). Разложим все числа из S на простые множители и составим множество D из всех простых чисел, встречающихся в этих разложениях. Можно ли утверждать, что множество D разрешимо?

9*. Множество $F \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ таково, что для любого $x \in \Sigma^*$ множества $F_x^{(1)} = \{m \mid \langle n, m\rangle \in F\}$ и $F_x^{(2)} = \{m \mid \langle m, n\rangle \in F\}$ разрешимы. Всегда ли разрешимо само множество F?