Логика высказываний

1. Запишите пропозициональную формулу, выражающую следующее рассуждение:

> *Если инвестиции останутся постоянными, то вырастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не вырастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и инвестиции останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы вырастут.*

Является ли эта формула тавтологией?

2. а) Постройте пропозициональную формулу A, для которой обе формулы $(r \to A) \leftrightarrow (r \to (p \wedge q))$ и $(A \to r) \leftrightarrow ((\neg(p \vee q)) \to r)$ общезначимы (т.е. являются тавтологиями).

б) Можно ли построить такую формулу A, чтобы формула $((A \wedge q) \to \neg p) \to ((p \to \neg q) \to A)$ была общезначимой? Если да, то сколько неэквивалентных решений имеет задача?

3*. Пусть формула A не содержит других связок, кроме $\leftrightarrow$. Докажите, что A общезначима тогда и только тогда, когда каждая переменная входит в A чётное число раз.

Определения. Назовём *интерпретацией* произвольное отображение $\alpha\colon \mathrm{Var} \to \{0,1\}$. Отображение α распространяется на все пропозициональные формулы по таблицам истинности; обозначим это расширение через $\bar{\alpha}$. Значение $\bar{\alpha}(A)$ называется *истинностным значением* формулы A при интерпретации α. Если для данной формулы A верно $\bar{\alpha}(A) = 1$, то говорят, что формула A *истинна при интерпретации* α, и пишут $\alpha \vDash A$. В противном случае A *ложна при интерпретации* α; $\alpha \nvDash A$.

Определения. Если T — множество формул *(пропозициональная теория)*, и все они истинны при интерпретации α, то пишем $\alpha \vDash T$ и говорим, что теория T истинна при интерпретации α и, наоборот, интерпретация α является *моделью* теории T. Пропозициональная теория, имеющая хотя бы одну модель, называется *выполнимой.*

4*. Пусть Θ — множество всех интерпретаций. Определим на нём структуру метрического пространства следующим образом: если $\alpha, \beta \in \Theta$, причём $\alpha(p_i) = \beta(p_i)$ для всех $i < n$, а $\alpha(p_n) \neq \beta(p_n)$, то $\rho(\alpha, \beta) = 2^{-n}$ (а если $\alpha(p_i) = \beta(p_i)$ для всех i, то $\alpha = \beta$ и $\rho(\alpha, \beta) = 0$). **а)** Докажите, что $\boldsymbol{\Theta} = \langle \Theta, \rho \rangle$ — метрическое пространство. **б)** Докажите, что пространство $\boldsymbol{\Theta}$ компактно. **в)** Пусть $T \subset \mathrm{Fm}$ — конечное множество пропозициональных формул. Докажите, что множество $\{\alpha \mid \alpha \vDash T\}$ открыто и замкнуто в $\boldsymbol{\Theta}$. **г)** *Теорема о компактности для логики высказываний.* Пусть теория T такова, что любое её конечное подмножество выполнимо. Докажите, что тогда вся теория T также выполнима.

Логика первого порядка: определимость

5. Выразите отношение $y = x + 1$ в естественной интерпретации сигнатуры $(=, <)$ на множестве $\mathbb{Z}$.

6. На множестве $\mathcal{P}(A)$ всех подмножеств данного множества A задано двухместное отношение $\subseteq$ («быть подмножеством»). Докажите, что следующие отношения определимы в структуре $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$: 1) $x = y$ (равенства как предикатного символа в сигнатуре нет!); 2) $x = \varnothing$; 3) $x = A$; 4) $x = y \cap z$; 5) $x = y \cup z$; 6) $x = A \setminus y$.

7. Выясните, определимы ли следующие отношения: 1) $x = y + 1$ в структуре $\langle \mathbb{Z}, d, = \rangle$, где $d(x) = x + 2$; 2) $x \equiv 1 \pmod 3$ в структуре $\langle \mathbb{Z}, +, = \rangle$; 3) $x = y^2$ в структуре $\langle \mathbb{Q}, +, < \rangle$; 4) «$x$ — простое число» в структуре $\langle \mathbb{N}, \cdot, = \rangle$.

8*. Придумайте интерпретацию сигнатуры с тремя одноместными предикатами, в которой каждый предикат выражается через два других, но ни один не выражается через другой.

9*. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, +, 0, 1)$ на множестве $\mathbb{R}$. При каких (фиксированных) значениях $\xi \in \mathbb{R}$ предикат «$x = \xi$» выразим формулой?

10*. Выразим ли предикат «$x = 3$» в множестве $\mathbb{N}$ с предикатами равенства и **а)** «y кратно z»? **б)** «$xy = z$»?

Логика 1-го порядка. Теории и модели

1. Какие из следующих формул общезначимы:

$$\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x));$$

$$\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\exists x\, Q(x));$$

$$\exists y\, \forall x\, P(x,y,y) \to \forall x\, \exists y\, \forall z\, P(x,y,z)\,?$$

2. Вынесите все кванторы наружу в следующих формулах:

$$\neg \forall x\, \forall y P(x,y) \vee \forall x\, \exists y\, Q(x,y);$$

$$\forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists x\, \forall y\, Q(x,y).$$

3. Докажите, что следующая формула истинна при стандартной интерпретации на множестве $\mathbb{N}$:

$$\forall x\, \exists z\, \forall y\, \exists u\, ((y > z \to y > u) \wedge (u < z) \wedge \neg(u < x)).$$

4. Докажите, что следующая формула может быть истинна только в бесконечной интерпретации:

$$\forall x\, \exists y\, Q(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z \big(\neg Q(x,x) \wedge (Q(x,y) \to (Q(y,z) \to Q(x,z)))\big).$$

Моделью теории (формулы) называется интерпретация, в которой эта теория (формула) истинна.
Теория (формула) называется *выполнимой,* если у неё есть хотя бы одна модель.

5*. Рассмотрим конечную сигнатуру без констант и функциональных символов, все предикатные символы которой одноместны. Существует ли в этой сигнатуре выполнимая теория (множество замкнутых формул), не имеющая конечных моделей.

6*. Постройте формулу 1-го порядка *без равенства,* имеющую 8-элементную модель, но не имеющую 7-элементной.

7*. Докажите, что следующая формула истинна в любой интерпретации с трёхэлементным носителем:

$$\forall x\, R(x,x) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, \big(R(x,z) \to (R(x,y) \vee R(y,z))\big) \to \exists u\, \forall v\, R(u,v).$$

8. а) Докажите, что если сигнатура конечна или счётна, то любая теория в этой сигнатуре может иметь не больше, чем континуум попарно неизоморфных счётных моделей. **б)*** Постройте (в подходящей сигнатуре) теорию, имеющую континуум попарно неизоморфных счётных моделей.

Две интерпретации называются *элементарно эквивалентными,* если в них истинны одни и те же замкнутые формулы.

9. Рассмотрим сигнатуру $(=, <)$. Будут ли элементарно эквивалентны её естественные интерпретации **а)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$? **б)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$?

10. Рассмотрим сигнатуру $(+, =)$. Будут ли элементарно эквивалентны её естественные интерпретации **а)** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$? **б)*** на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$? **в)**** на $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$?
(Знак $\oplus$ означает прямую сумму: декартово произведение с покомпонентно определяемым сложением.)

Формула A *семантически следует* из теории T (обозначение: $T \vDash A$), если A истинна в любой модели теории T. Выполнимая теория T называется *полной,* если для любой формулы A либо $T \vDash A$, либо $T \vDash \neg A$.

11. Докажите, что любая полная теория T обладает *дизъюнктивным свойством:* если $T \vDash A \vee B$, то $T \vDash A$ или $T \vDash B$. Существуют ли неполные теории с дизъюнктивным свойством?

12. Докажите, что все модели полной теории элементарно эквивалентны.

Теория называется *категоричной* в мощности $\varkappa$, если все её модели с мощностью носителя $\varkappa$ изоморфны.

13.** Приведите пример теории, не категоричной в счётной мощности, но категоричной в любой бесконечной несчётной мощности.

Логика 1-го порядка. Выводимость, полнота, компактность

Исчисление предикатов в сигнатуре Ω (обозначается PC_Ω) задаётся следующими аксиомами и правилами вывода.

I. Схемы аксиом классического исчисления высказываний (только теперь вместо метапеременных A, B, C можно подставлять любые формулы сигнатуры Ω).

II. Аксиомы с кванторами ($[a := t]$ означает подстановку терма t вместо переменной a; при этом t — терм, возможно составной):

1. $\forall x\, A[a := x] \to A[a := t]$, где x не входит в A;
2. $A[a := t] \to \exists x\, A[a := x]$, где x не входит в A;
3. $\forall x\,(A \to B[a := x]) \to (A \to \forall x\, B[a := x])$, где x не входит в A и B и a не входит в A;
4. $\forall x\,(B[a := x] \to A) \to (\exists x\, B[a := x] \to A)$, где x не входит в A и B и a не входит в A.

III. Правила вывода:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}\ (\mathrm{MP}) \qquad \frac{A}{\forall x\, A[a := x]}\ (\mathrm{Gen}),\ \text{где } x \text{ не входит в } A$$

Напомним, что формула называется *замкнутой,* если все переменные в ней связанные. *Теорией* называется произвольное множество замкнутых формул. Выражение $T \vdash A$ означает „формула A выводима из теории T“, т.е. существует вывод A в исчислении предикатов, к которому формулы из T добавлены как аксиомы.

1. Докажите *теорему о дедукции:* если T — теория, A — замкнутая формула, B — произвольная формула. Докажите, что $T \cup \{A\} \vdash B$ тогда и только тогда, когда $T \vdash (A \to B)$. Покажите, что условие замкнутости A здесь существенно.

2. Выведите в исчислении предикатов (возможно, применяя теорему о дедукции) следующие формулы: **а)** $(\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \wedge \exists x\, P(x)) \to \exists x\, Q(x)$; **б)** $\exists x\, P(x) \to \forall x\, P(x)$; **в)** $\exists x\, \forall y\, R(x, y) \to \forall y\, \exists x\, R(x, y)$; **г)*** $\exists x\,(D(x) \to \forall y\, D(y))$.

3*. Докажите, что если $T \vdash (A \to B)$, то $T \vdash (\exists x\, A[a := x] \to \exists x\, B[a := x])$.

4. Покажите, что условие „a не входит в A“ в аксиомах II.3 и II.4 существенно (если его убрать, то в исчислении можно будет вывести формулы, не являющиеся общезначимыми).

Теория T называется *противоречивой,* если для некоторой формулы A одновременно $T \vdash A$ и $T \vdash \neg A$.

5*. Пусть теории T_1 и T_2 в сигнатуре Ω таковы, что теория $T_1 \cup T_2$ противоречива. Докажите, что существует такая формула A в сигнатуре Ω, что $T_1 \vdash A$ и $T_2 \vdash \neg A$.

Теорема Гёделя о полноте. Всякая непротиворечивая теория имеет модель.

6. Выведите из теоремы Гёделя о полноте следующие следствия: **а)** формула A выводима в исчислении предикатов (без дополнительных аксиом) тогда и только тогда, когда она общезначима; **б)** $T \vdash A \iff T \vDash A$ (формула выводима из теории тогда и только тогда, когда она истинна во всех моделях этой теории).

Теорема Гёделя – Мальцева о компактности. Пусть теория T такова, что всякая её конечная подтеория $T_0 \subset T$ имеет модель. Тогда и вся теория T имеет модель.

7. а) Докажите, что не существует системы аксиом, моделями которой были бы в точности все поля всевозможных конечных характеристик $p > 0$. **б)** Постройте систему аксиом, модели которой — в точности все поля нулевой характеристики. **в)** Существует ли конечная система аксиом для полей нулевой характеристики?

8. Существует ли **а)** бесконечная; **б)*** конечная система аксиом, модели которой — в точности все алгебраически замкнутые поля?

9. Рассмотрим сигнатуру, содержащую только двуместный предикатный символ равенства и двуместный предикатный символ R; интерпретации — множества с бинарными отношениями (ориентированные графы). Существует ли формула в этой сигнатуре, выражающее следующее свойство отношения/графа: **а)** симметричность; **б)** рефлексивность; **в)** транзитивность; **г)** существование клики размера 6 (множества из 6 вершин, в котором каждая соединена с каждой в обе стороны); **д)** конечность множества вершин; **е)** «вершин либо чётное число, либо бесконечно много»; **ё)*** ацикличность; **ж)*** связность?

10*. *Теорема Эрбрана.* Пусть формула A в сигнатуре Ω содержит ровно одну свободную переменную, обозначаемую a. Докажите, что если формула $\exists x\, A[a := x]$ выводима в PC_Ω, то существует конечный набор термов $t_1, \ldots, t_n$ той же сигнатуры, что в PC_Ω выводима дизъюнкция $A[a := t_1] \vee \ldots \vee A[a := t_n]$.

11.** Рассмотрим следующую интерпретацию сигнатуры $(=, d)$ (где $=$ — двуместный предикат равенства, d — одноместный функциональный символ) на множестве $\mathbb{Z}$: $=$ интерпретируется нормальным образом (как совпадение элементов), а d — функцией $\hat{d}\colon w \mapsto w + 2$. Определимо ли в этой интерпретации отношение „$x \equiv y \pmod 2$“ ?

12.** Пусть в сигнатуре Ω существуют две такие теории T_1 и T_2, что любая интерпретация сигнатуры Ω является моделью в точности одной из этих двух теорий. Докажите, что существует такая формула A, что класс всех моделей формулы A совпадает с классом всех моделей теории T_1.

Разрешимость и полнота

Пусть зафиксировано конечное непустое множество Σ — *алфавит.* Через Σ^* обозначим множество всех *слов,* составленных из букв алфавита Σ. Мы будем рассматривать множества $A \subseteq \Sigma^*$ и функции $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$. Если считать, что в Σ есть элементы 0 и 1, то каждому множеству $A \subseteq \Sigma^*$ можно сопоставить *характеристическую функцию,* определяемую следующим образом:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin A, \\ 1, & \text{если } x \in A. \end{cases}$$

Вычислимая функция — это функция, вычисляемая некоторым алгоритмом. Заметим, что вычислимая функция может быть определена не всюду: на некоторых входных данных алгоритм может «зависнуть».

Понятие алгоритма можно формализовывать многими различными способами; оказывается, что все они приводят к одному и тому же классу вычислимых функций. Это утверждение (называемое иногда *тезисом Чёрча)* не может быть полностью доказано как математическая теорема (поскольку квантор «для всех разумных формализаций понятия алгоритма» нематематический), однако для двух конкретных формализаций эквивалентность может быть проверена непосредственно.

Разрешимое множество — это множество, характеристическая функция которого вычислима.

Перечислимое множество — это множество значений некоторой вычислимой функции. (Есть также другие эквивалентные определения перечислимого множества.)

Существует вычислимая частичная функция, у которой нет всюду определённого вычислимого продолжения (этим фактом можно пользоваться без доказательства). Область определения этой функции — **перечислимое, но не разрешимое множество.**

1. Докажите, что функция f вычислима тогда и только тогда, когда её *график* (множество $\Gamma_f = \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in D(f)\}$) перечислим.

2. а) Докажите, что существуют непересекающиеся перечислимые множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, которые не отделяются никаким разрешимым множеством (т. е. не существует такого разрешимого $Z \subseteq \mathbb{N}$, что $X \subseteq Z$ и $Y \cap Z = \varnothing$).

б)*Докажите, что существует счётное семейство непересекающихся неотделимых перечислимых множеств $X_1, X_2, \ldots$ — т.е. таких, что не найдётся таких разрешимых множеств $Z_1, Z_2, \ldots$, что $X_i \in Z_i$ и $Z_i \cap Z_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

3. Пусть функция $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ всюду определена, вычислима и обладает следующим свойством: для любого $x \in \Sigma^*$ длина $f(x)$ не меньше длины x. Докажите, что область значений f — разрешимое множество.

4*. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

5*. Множество $F \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ таково, что для любого $x \in \Sigma^*$ множества $F_x^{(1)} = \{m \mid \langle n, m\rangle \in F\}$ и $F_x^{(2)} = \{m \mid \langle m, n\rangle \in F\}$ разрешимы. Всегда ли разрешимо само множество F?

Формулы логики предикатов (в конечной сигнатуре) также являются словами в некотором подходящем алфавите. Значит, применительно к множествам формул (теориям 1-го порядка) также можно говорить о разрешимости и перечислимости. Отметим важную терминологическую тонкость: теория T называется *разрешимой,* если разрешимо, как множество слов, множество *теорем* теории T, т.е. множество $[T] = \{\varphi \mid T \vdash \varphi\}$; аналогично определяется понятие *перечислимой* теории.

Теория T называется *разрешимо аксиоматизируемой,* если существует разрешимое множество формул T', такое что $[T'] = [T]$ (при этом исходная аксиоматизация, T, могла быть неразрешимым множеством). Аналогично определяется понятие перечислимо аксиоматизируемой теории.

6. а) Докажите, что всякая перечислимо аксиоматизируемая теория перечислима.

б) Докажите, что для всякой теории $T = \{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ существует эквивалентная ей теория $T' = \{\psi'_1, \psi'_2, \ldots\}$, такая что длина формулы ψ'_n (как слова в подходящем алфавите) больше n.

в)* *Трюк Крейга.* Докажите, что всякая перечислимая теория разрешимо аксиоматизируема.

7*. Некоторое множество S натуральных чисел разрешимо (натуральное число n можно кодировать, например, унарной записью: $\underbrace{aa\ldots a}_{n}$). Разложим все числа из S на простые множители и составим множество D из всех простых чисел, встречающихся в этих разложениях. Можно ли утверждать, что множество D разрешимо?

8*. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}$ — перечислимое, но не разрешимое множество натуральных чисел. Рассмотрим сигнатуру $\Omega = (0, S, D, =)$, где 0 — константа, S — одноместный функциональный символ, D — одноместный предикатный символ, $=$ — символ равенства. Пусть $T = \{D(\underbrace{S(S \ldots S}_{k \text{ раз}}(0) \ldots)) \mid k \in \mathcal{D}\}$. Докажите, что теория T разрешимо аксиоматизируема, но не разрешима.

Таким образом, классы перечислимых теорий, перечислимо аксиоматизируемых теорий и разрешимо аксиоматизируемых теорий совпадают, и строго содержат класс разрешимых теорий. С другой стороны, если теория полна и перечислима, то она разрешима (теорема Поста). Примером такой теории является DLO — теория плотных линейных порядков, не имеющих наименьшего и наибольшего элементов. Эта теория категорична в счётной мощности, не имеет конечных моделей и, следовательно, полна по теореме Лося – Воота. С другой стороны, она задаётся конечным множеством аксиом и потому перечислима. Значит, по теореме Поста DLO разрешима.

9. Рассмотрим сигнатуру, состоящую из одного двухместного предикатного символа равенства ($=$), и пусть $\xi_k = \forall x_1 \ldots \forall x_k \, \exists y (y \neq x_1 \wedge \ldots \wedge y \neq x_k)$. Разрешима ли теория $T = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$?

10. Рассмотрим (в сигнатуре $(<, =)$) теорию $T_{[)}$ всех строгих плотных линейных порядков, имеющих наименьший элемент, но не имеющих наибольшего. Является ли эта теория **а)** полной; **б)** разрешимой?

11*. Рассмотрим (в сигнатуре $(<, =)$) теорию $T_{[]}$ всех строгих плотных линейных порядков, имеющих наименьший и наибольший элементы. Является ли эта теория **а)** полной; **б)** разрешимой?

12*. Рассмотрим счётную сигнатуру $(<, c_0, c_1, c_2, \ldots)$, где $<$ — двуместный предикатный символ, c_i — константные символы, и пусть теория T_3 задаётся аксиомами DLO (теория плотных неограниченных линейных порядков) и дополнительными аксиомами $c_0 < c_1$, $c_1 < c_2$, $c_2 < c_3$, $\ldots$. **а)** Докажите, что теория T_3 имеет ровно три неизоморфные счётные модели. **б)** Полна ли теория T_3?

Арифметика

Сигнатурой формальной арифметики будем считать $(0, S, +, \cdot, =)$. Для натурального числа n через $\underline{n}$ обозначим терм $\underbrace{S(S(\ldots(S}_{n\text{ раз}}(0))\ldots))$ — *нумерал,* соответствующий n.

Мы считаем, что выбрана гёделева нумерация формул и их последовательностей в формальной арифметике; гёделев номер формулы φ обозначим через $\ulcorner\varphi\urcorner$. Буквой T (возможно, с индексами) далее будет обозначаться разрешимо аксиоматизируемая арифметическая теория, содержащая арифметику Пеано PA (естественным примером такой теории является сама PA). Для теории T можно построить формулу Prf_T с двумя параметрами x и y, кодирующую *свойство быть доказательством* в T:

- если $n = \ulcorner\varphi\urcorner$ и m — гёделев номер доказательства φ в T, то $\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Prf}_T(\underline{n}, \underline{m})$;
- в противном случае (если, например, x или y не является корректным гёделевым номером, или m кодирует последовательность формул, не являющуюся доказательством формулы с гёделевым номером n), то $\mathsf{PA} \vdash \neg\mathrm{Prf}_T(\underline{n}, \underline{m})$.

Далее, по определению $\mathrm{Pr}_T(x) = \exists y\, \mathrm{Prf}_T(x, y)$ и $\mathrm{Con}_T = \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\bot\urcorner)$. Неформально, Pr_T кодирует *доказуемость* в T формулы с данным гёделевым номером, а Con_T — *непротиворечивость* теории T.

1. Докажите, что Con_T истинна в стандартной модели арифметики ($\mathbb{N} \vDash \mathrm{Con}_T$) тогда и только тогда, когда теория T непротиворечива.

Вторая теорема Гёделя о неполноте. Если разрешимо аксиоматизируемая арифметическая теория T, содержащая PA, доказывает свою собственную непротиворечивость, то она противоречива ($T \vdash \mathrm{Con}_T \Rightarrow \mathbb{N} \vDash \neg\mathrm{Con}_T$).

2. Докажите, что арифметика Пеано PA неполна (1-я теорема Гёделя о неполноте).

3. а) Существует ли формула вида $\varphi \vee \psi$, такая что $\mathsf{PA} \vdash \varphi \vee \psi$, но при этом $\mathsf{PA} \nvdash \varphi$ и $\mathsf{PA} \nvdash \psi$?
б)* Существует ли формула вида $\exists x\, \varphi(x)$, такая что $\mathsf{PA} \vdash \exists x\, \varphi(x)$, но при этом $\mathsf{PA} \nvdash \varphi(\underline{n})$ для любого натурального числа n?
в)* Существует ли формула вида $\forall x\, \psi(x)$, такая что $\mathsf{PA} \vdash \psi(\underline{n})$ для любого n, но при этом $\mathsf{PA} \nvdash \forall x\, \psi(x)$?

4*. Существует ли арифметическая формула τ с одним параметром x, что $\mathsf{PA} \vdash \tau(\ulcorner\varphi\urcorner) \iff \mathbb{N} \vDash \varphi$?

5*. Арифметическая теория T „доказывает собственную противоречивость“: $T \vdash \neg\mathrm{Con}_T$. Следует ли отсюда, что она противоречива?

Модальная логика

Модальные формулы строятся из счётного числа переменных ($\mathrm{Var} = \{p, q, r, \ldots\}$) при помощи классических связок ($\wedge, \vee, \to, \neg$) и дополнительной одноместной связки $\Box$. Связка $\Diamond$ определяется как сокращённая запись комбинации $\neg\Box\neg$. *Шкала Крипке* есть ориентированный граф $\langle W, R\rangle$, где W — непустое множество (его элементы называются *«мирами»*), а $R \subseteq W \times W$ — произвольное бинарное отношение на W, называемое *отношением достижимости.* Утверждение $\langle x, y\rangle \in R$ мы будем записывать как xRy и иногда произносить как «мир x видит мир y». *Интерпретацией (оценкой)* переменных в данной шкале Крипке называется функция $\theta\colon W \times \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ (в каждом мире истинность переменных определяется независимо). Истинность сложных формул в данном мире определяется индукцией по их построению. Случай классических связок разбирается по таблицам истинности. Формула $\Box A$ истинна в мире u тогда и только тогда, когда во всех видимых из мира u мирах истинна формула v ($u \Vdash \Box A \iff (\forall v)\,(uRv \Rightarrow v \Vdash A)$). Из определений сразу получается, что $u \Vdash \Diamond A \iff (\exists v)\,(uRv$ и $v \Vdash A)$. Формула A называется *общезначимой* в шкале $\langle W, R\rangle$, если она истинна во всех мирах при всех возможных оценках переменных.

6. Рассмотрим шкалу Крипке $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ («миры» — целые числа, мир n «видит» мир m в точности тогда, когда $n < m$). Пусть в мире n истинна переменная p тогда и только тогда, когда n чётно; в мире n истинна переменная q тогда и только тогда, когда $n > 0$. В каких мирах верны формулы: **а)** $\Diamond\Box q \wedge \Box\Diamond p$; **б)** $\Diamond(p \wedge \neg q) \vee q$? **в)*** Постройте формулу, истинную во всех мирах, кроме -1.

7. Общезначима ли формула $\Box(\Box p \to p) \to (\Diamond\Box p \to \Box p)$ в шкале **а)** $\langle \mathbb{N}, <\rangle$; **б)** $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$; **в)** $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$?

8*. Для каждой из следующих формул опишите класс шкал Крипке, в которых эта формула общезначима: **а)** $\Box p$; **б)** $\Diamond(p \vee \neg p)$; **в)** $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$; **г)** $\Diamond\Box p \to p$; **д)** $\Box p \to \Diamond p$; **е)** $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

9. Напишите модальную формулу, общезначимую в точности в тех шкалах Крипке, в которых **а)** из каждого мира достижимы не более n миров; **б)** длина максимального пути не больше n.

10*. Существует ли *конечная* шкала Крипке, в которой общезначимы в точности все формулы, общезначимые во всех шкалах Крипке?