МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 519.766.23

Кузнецов
Степан Львович

Категориальные грамматики, основанные на вариантах исчисления Ламбека

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Мати Рейнович Пентус

МОСКВА — 2012

Оглавление

Введение

Диссертация посвящена теории формальных грамматик — одному из разделов математической логики. В диссертации исследуются классы языков, порождаемых грамматиками, основанными на нескольких вариантах исчисления Ламбека. В качестве дополнительных следствий из выполненных для этого построений получены оценки сложности проблем выводимости в некоторых из этих вариантов. Для одного из вариантов доказана теорема о полноте относительно класса языковых моделей.

Исчисление Ламбека L впервые введено И. Ламбеком в [16] для описания синтаксиса естественных языков с помощью основанных на этом исчислении категориальных грамматик (см., например, [16], [22], [21]). В исчислении Ламбека используются синтаксические типы, построенные из примитивных типов (переменных) с помощью трёх двуместных связок — умножения, левого и правого делений.

Хомский [7] предложил другое семейство грамматик, называемое иерархией Хомского. Наиболее известным классом грамматик из этого семейства являются контекстно-свободные грамматики (грамматики типа 2). Контекстно-свободные грамматики широко применяются для синтаксического разбора искусственных языков (например, языков программирования: см. [1]), однако для естественных языков категориальные грамматики обладают рядом преимуществ, прежде всего — свойством лексикализации: вся синтаксическая информация хранится в категориальном словаре, и при анализе необходимо рассматривать не всю грамматику, а только часть словаря, относящуюся к словам, встречающимся в разбираемом фрагменте текста. Категориальные грамматики позволяют, параллельно с синтаксическим разбором, вести разбор семантический, используя, например, семантику Монтегю [6].

Отдельным вопросом является сравнение самих классов языков, порождаемых разными типами грамматик, без учёта накладываемых грамматиками синтаксических и семантических структур. В этом (так называемом *слабом*) смысле, оказывается, категориальные грамматики Ламбека не богаче контекстно-свободных: класс языков, порождаемых грамматиками, основанными на исчислении L, в точности совпадает с классом контекстно-свободных языков без пустого слова (см. [30]). Естественный интерес представляют аналогичные вопросы для вариантов исчисления Ламбека (его расширений и фрагментов). Известно [5], что для порождения всех контекстно-свободных языков достаточно фрагмента исчисления Ламбека, содержащего только одно деление — $\mathrm{L}(\backslash)$. Каназава [15] исследовал вопрос о классе языков, порождаемых грамматиками, основанными на исчислении Ламбека с добавлением аддитивных конъюнкции и дизъюнкции: этот класс строго содержит класс конечных пересечений контекстно-свободных языков и содержится в классе контекстно-зависимых языков; вопрос о точном описании этого класса открыт. Мортгат [20] ввёл исчисление Ламбека, обогащённое двумя модальностями; Егер [14] показал, что все языки, порождаемые основанными на этом исчислении грамматиками, являются контекстно-свободными. Диковским и Дехтярём [8] рассматривались категориальные грамматики зависимостей (CDG), в основе которых лежит обогащённый дополнительными связками для нелокальных зависимостей фрагмент исчисления Ламбека без умножения, с ограничением: у каждой операции деления знаменатель является примитивным типом; языки, порождаемые такими грамматиками, образуют особый класс, строго содержащий класс контекстно-свободных языков и замкнутый относительно операции объединения, пересечений с регулярными языками, а также взятия образа и прообраза при неукорачивающих гомоморфизмах. Бушковский [4] доказал, что грамматикой, основанной на расширении исчисления Ламбека некоторым конечным набором дополнительных аксиом, можно породить произвольный рекурсивно перечислимый язык.

В диссертации доказано, что для порождения всех контекстно-свободных языков без пустого слова достаточно фрагмента $\mathrm{L}(\backslash; p_1)$ — исчисления Ламбека с одним делением и одним примитивным типом. Также доказано, что все языки, порождаемые грамматиками, основанными на исчислениях $\mathbf{L_1}$ (исчисление Ламбека с единицей) и L^{R} (исчислении Ламбека с операцией обращения; см. ниже), контекстно-свободны.

Исчисление Ламбека является полным относительно интерпретации типов исчисления Ламбека формальными языками над некоторым алфавитом (при этом связкам $\cdot$, $\backslash$ и $/$ соответствуют операции умножения, левого и правого деления языков) [31]. Такие модели называются L-моделями. В диссертации построено исчисление L^{R} — консервативное расширение исчисления Ламбека новой одноместной связкой $^{\mathrm{R}}$ — и докажем его полноту относительно L-моделей, где связка $^{\mathrm{R}}$ интерпретируется как операция обращения языка.

Алгоритмические проблемы выводимости (и, следовательно, задачи проверки принадлежности слова к языку, порождаемому категориальной грамматикой) для исчисления Ламбека L и его фрагментов $\mathrm{L}(\backslash, /)$ и $\mathrm{L}(\cdot, \backslash)$ являются NP-полными (для L NP-полнота доказана Пентусом [25], для $\mathrm{L}(\backslash, /)$ и $\mathrm{L}(\cdot, \backslash)$ — Саватеевым [32]); однако Пентусом [26] и Фаулером [9] были независимо предложены полиномиальные (время работы порядка $O(n^5)$) алгоритмы для практически важного частного случая, когда сложность типов ограничена константой; Фаулер [10] успешно применял такие алгоритмы для разбора предложений на английском языке. Сходное явление наблюдается и для CDG: общая задача проверки принадлежности слова языку, порождаемому такой грамматикой, NP-полна, однако, если сложность типов ограничена, существует полиномиальный алгоритм [8]. Для фрагмента с одним делением $\mathrm{L}(\backslash)$ Саватеевым [32] предложен полиномиальный (время работы порядка $O(n^3)$) алгоритм проверки принадлежности слова к языку, порождаемому категориальной грамматикой.

В качестве следствий из предлагаемых конструкций мы получим теоремы об NP-полноте для исчислений $\mathrm{L}^{\mathrm{R}}(\backslash)$, $\mathrm{L}(\cdot, \backslash; p_1)$ и $\mathrm{L}(\backslash, /; p_1)$ (и их консервативных расширений, содержащихся в L^{R}), а также полиномиальный алгоритм для проверки принадлежности слова к языку, порождаемому $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(\backslash)$-грамматикой.

Методы исследования

В работе применяются методы теории доказательств и теории моделей. Для доказательства совпадения классов языков, порождаемых грамматиками, основанными на разных вариантах исчисления Ламбека, используются специально построенные подстановки, сводящие эти варианты друг к другу. Для исследования выводимости в исчислении Ламбека и его модификациях используется погружение исчисления Ламбека в мультипликативную циклическую линейную логику (MCLL и MCLL$'$), а, в свою очередь, для исследования выводимости в MCLL и MCLL$'$ применяются теоретико-графовые критерии выводимости, называемые *сетями доказательства.*

Краткое содержание диссертации

Глава 1 имеет вспомогательный характер. В ней вводятся необходимые для дальнейшего изложения понятия и формулируются ранее известные результаты. В **разделе 1.1** приведены аксиомы и правила исчисления Ламбека L и сформулирована теорема об устранимости правила сечения; также в этом разделе определены фрагменты исчисления Ламбека с ограниченными наборами связок и/или примитивных типов. В **разделе 1.2** вводится исчисление Ламбека, допускающее пустые антецеденты (L^*), и исчисление Ламбека с единицей ($\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$), а также фрагменты этих исчислений. В **разделе 1.3** определяется понятие консервативного расширения (фрагмента), доказывается допустимость в исчислении Ламбека и его вариантах правила подстановки, определяется отношение эквивалентности типов. **Раздел 1.4** содержит определение категориальной грамматики (играющее одну из центральных ролей в дальнейшем изложении) и формулировки теорем Гайфмана — Бушковского и Пентуса об эквивалентности (в слабом смысле) L-грамматик и контекстно-свободных грамматик. В **разделе 1.5** даётся краткая сводка известных результатов об алгоритмической сложности фрагментов исчисления Ламбека для дальнейших ссылок. В **разделах 1.6 и 1.7** формулируются вспомогательные исчисления MCLL', MCLL и $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp}$ (фрагменты линейной логики), устанавливается их связь с исчислениями L, L^* и $\mathrm{L}_\mathbf{1}$ соответственно и доказываются теоретико-графовые критерии выводимости в этих исчислениях (называемые сетями доказательства). В **разделе 1.8** приводится способ построения L^*-грамматики для языка, содержащего пустое слово. Тем самым, учитывая уже известные результаты, сформулированные в разделе 1.4, устанавливается, что класс контекстно-свободных языков совпадает с классом L^*-языков. Несмотря на естественность такого утверждения (сравните с теоремами Гайфмана — Бушковского и Пентуса для L), случай языка с пустым словом до сих пор разобран не был.

Глава 2 посвящена исчислению Ламбека с единицей и его фрагментам. В **разделе 2.1** приведена более удобная формулировка исчисления $\mathrm{L}_\mathbf{1}$ и доказана её эквивалентность исходной формулировке. В **разделе 2.2** описана подстановка, сводящая выводимость в $\mathrm{L}_\mathbf{1}$ к выводимости в L^*. С помощью этой подстановки доказано, что всякий $\mathrm{L}_\mathbf{1}$-язык контекстно-свободен. В **разделе 2.3** описана подстановка, сводящая выводимость в $\mathrm{L}_\mathbf{1}(\backslash)$ к выводимости в $\mathrm{L}^*(\backslash)$. С помощью этой подстановки доказана полиномиальная разрешимость проблемы выводимости для исчисления $\mathrm{L}_\mathbf{1}(\backslash)$.

Глава 3 посвящена исчислению Ламбека ($\mathrm{L}(p)$) с одним примитивным типом и его фрагментам ($\mathrm{L}(\backslash; p)$ и др.). В **разделах 3.1 и 3.2** строится конструкция (подстановка типов), сводящая выводимость в $\mathrm{L}(\backslash)$ к выводимости в $\mathrm{L}(\backslash; p)$, и доказывается её корректность. Та же конструкция работает для соответствующих фрагментов L^*. Эта конструкция является неравномерной: применяемая подстановка зависит от множества примитивных типов, встречающихся в данной секвенции; в **разделе 3.5** построена единая равномерная подстановка. **Разделы 3.3 и 3.4** содержат приложения предложенной конструкции: 1) класс $\mathrm{L}(\backslash; p)$-языков совпадает с классом контекстно-свободных языков без пустого слова, а класс $\mathrm{L}^*(\backslash; p)$-языков совпадает с классом всех контекстно-свободных языков; 2) проблемы выводимости в исчислениях $\mathrm{L}(\cdot, \backslash; p)$, $\mathrm{L}^*(\cdot, \backslash; p)$, $\mathrm{L}(\backslash, /; p)$ и $\mathrm{L}^*(\backslash, /; p)$ NP-полны.

В **главе 4** строится исчисление Ламбека с операцией обращения (L^{R}) и доказываются его свойства. В **разделе 4.1** вводится понятие модели на подмножествах свободной полугруппы (L-модели, языковой модели) и формулируется теорема Пентуса о полноте исчисления L относительно класса L-моделей. В **разделе 4.2** предъявляется расширение исчисления Ламбека одноместной связкой $^{\mathrm{R}}$, — исчисление L^{R} — доказывается его консервативность над исчислением L и формулируется теорема о полноте исчисления L^{R} относительно класса L-моделей, в которых связка $^{\mathrm{R}}$ интерпретируется как обращение языка. Теорема о полноте показывает, что расширение выбрано правильно. В **разделе 4.3** вводится понятие нормальной формы типа исчисления L^{R} и доказывается, что каждый тип эквивалентен своей нормальной форме (понятие нормальной формы применяется для доказательства дальнейших теорем). В **разделе 4.4** доказывается теорема о полноте исчисления L^{R} относительно класса L-моделей. **Раздел 4.5** содержит формулировки и доказательства основных свойств исчисления L^{R} и его фрагментов: 1) все языки, порождаемые L^{R}-грамматиками, контекстно-свободны (обратное верно в силу консервативности); 2) проблемы выводимости в исчислениях $\mathrm{L}^{\mathrm{R}}(\backslash)$, L^{R} и всех промежуточных фрагментах NP-полны.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя профессора М. Р. Пентуса за постановку задачи, поддержку и внимание к работе, а также весь коллектив кафедры математической логики и теории алгоритмов за тёплую атмосферу и конструктивные обсуждения.

Глава 1

Исчисление Ламбека и категориальные грамматики

1.1 Исчисление L и его фрагменты

Определим *исчисление Ламбека* L, впервые введённое в [16]. Счётное множество $\mathrm{Pr} \leftrightharpoons \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ называется множеством *примитивных типов* (здесь и далее значок «$\leftrightharpoons$» означает «равно по определению»). *Типы* исчисления Ламбека образуются из примитивных с помощью двуместных связок $\backslash$ (левое деление), $/$ (правое деление) и $\cdot$ (умножение); их множество обозначается Tp. Формально множество Tp определяется индуктивно как наименьшее в смысле включения множество, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1. $\mathrm{Pr} \subset \mathrm{Tp}$;
2. если $A, B \in \mathrm{Tp}$, то $(A \setminus B), (B \mathbin{/} A), (A \cdot B) \in \mathrm{Tp}$.

Типы обозначаются большими латинскими буквами, их конечные (возможно пустые) последовательности — заглавными греческими; пустая последовательность обозначается буквой Λ. Через A^k будем обозначать последовательность, составленную из повторённого k раз типа A. Выводимыми объектами в исчислении Ламбека являются *секвенции* — выражения вида $\Pi \to C$; Π называется *антецедентом*, а C — *сукцедентом* секвенции. Секвенции с пустым антецедентом (вида $\Lambda \to C$) будем записывать так: $\to C$.

Исчисление L задаётся аксиомами вида $p_i \to p_i$ (обозначение: (акс.)) и правилами вывода

$$\frac{A\,\Pi \to B}{\Pi \to A \setminus B}\ (\to \setminus),\ \text{где}\ \Pi \neq \Lambda; \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, \Pi\, (A \setminus B)\, \Delta \to C}\ (\setminus \to);$$

$$\frac{\Pi\, A \to B}{\Pi \to B \,/\, A}\ (\to /),\ \text{где}\ \Pi \neq \Lambda; \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, (B \,/\, A)\, \Pi\, \Delta \to C}\ (/ \to);$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma\, \Delta \to A \cdot B}\ (\to \cdot); \qquad \frac{\Gamma\, A\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, (A \cdot B)\, \Delta \to C}\ (\cdot \to);$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma\, A\, \Delta \to C}{\Gamma\, \Pi\, \Delta \to C}\ (\mathrm{cut}).$$

Пример 1.1. $\mathrm{L} \vdash (p_1 \setminus p_2)\ ((p_3 \setminus p_2) \setminus p_4) \to ((p_3 \setminus p_1) \setminus p_4)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_3 \to p_3 \qquad \dfrac{p_1 \to p_1 \qquad p_2 \to p_2}{p_1\ (p_1 \setminus p_2) \to p_2}}{\dfrac{p_3\ (p_3 \setminus p_1)\ (p_1 \setminus p_2) \to p_2}{(p_3 \setminus p_1)\ (p_1 \setminus p_2) \to (p_3 \setminus p_2)}} \qquad p_4 \to p_4}{(p_3 \setminus p_1)\ (p_1 \setminus p_2)\ ((p_3 \setminus p_2) \setminus p_4) \to p_4}}{(p_1 \setminus p_2)\ ((p_3 \setminus p_2) \setminus p_4) \to ((p_3 \setminus p_1) \setminus p_4)}$$

Легко видеть, что секвенции с пустыми антецедентами в L выводиться не могут.

Правило (cut), называемое *правилом сечения,* устранимо:

Теорема 1 (И. Ламбек, 1958)**.** *Если секвенция выводима в* L*, то она выводима без применения правила* (cut)*.* [16]

Обозначим через $\mathrm{Tp}(\setminus)$ множество типов, не содержащих ни $\cdot$, ни $/$. Исчисление, заданное аксиомами (акс.) и правилами $(\setminus \to)$ и $(\to \setminus)$, обозначается $\mathrm{L}(\setminus)$. Вместо $\setminus$ можно рассматривать другое деление $/$, при этом получится полностью симметричная теория; мы будем везде рассматривать левое деление $\setminus$. Аналогичным образом определяются исчисления $\mathrm{L}(\cdot, \setminus)$ и $\mathrm{L}(\setminus, /)$.

Через $\mathrm{Tp}(p_1, \ldots, p_N)$ обозначим множество типов, содержащих только примитивные типы из множества $\{p_1, \ldots, p_N\}$. Соответствующий фрагмент исчисления Ламбека обозначается $\mathrm{L}(p_1, \ldots, p_N)$; его фрагменты с ограниченными наборами связок обозначаются $\mathrm{L}(\setminus; p_1, \ldots, p_N)$,

$\mathrm{L}(\cdot, \backslash; p_1, \ldots, p_N)$, $\mathrm{L}(\backslash, /; p_1, \ldots, p_N)$. Нас будет особо интересовать случай $N = 1$. Для удобства заведём обозначение $p \leftrightharpoons p_1$.

1.2 Исчисления L^* и $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$

Исчисление L^* *(исчисление Ламбека, допускающее пустые антецеденты)* получается из исчисления L отбрасыванием требования $\Pi \neq \Lambda$ в правилах $(\to \backslash)$ и $(\to /)$.

Через $\mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$ обозначается множество всех типов, построенных из примитивных типов и константы $\mathbf{1}$ (единица) с помощью связок $\cdot$, $\backslash$ и $/$. Исчисление $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ (*исчисление Ламбека с единицей,* введено в [17]) получается из исчисления L^* добавлением аксиомы $\to \mathbf{1}$ (обозначается $(\to \mathbf{1})$) и правила вывода

$$\frac{\Gamma\,\Delta \to A}{\Gamma\,\mathbf{1}\,\Delta \to A}\ (\mathbf{1} \to);$$

при этом в качестве множества типов вместо Tp используется $\mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$.

Фрагменты исчислений $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ и L^* с ограниченными наборами связок и/или примитивных типов определяются аналогично соответствующим фрагментам L.

Для исчисления $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ верна теорема об устранении сечения (см. [17]); следовательно, правило сечения устранимо и в исчислении L^*.

1.3 Консервативность. Подстановка и эквивалентность

Метапеременная $\mathscr{L}$ будет обозначать один из вариантов исчисления Ламбека: L, L^*, $\mathrm{L}(\backslash)$, $\mathrm{L}^*(\backslash)$, $\mathrm{L}(\backslash; p_1, \ldots, p_N)$, $\mathrm{L}^*(\backslash; p_1, \ldots, p_N)$, $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$, а также исчисление L^{R}, определяемое в главе 4. Через $\mathrm{Tp}_{\mathscr{L}}$ будем обозначать множество типов, соответствующее исчислению $\mathscr{L}$ (Tp для L и L^*, $\mathrm{Tp}(\backslash)$ для $\mathrm{L}(\backslash)$ и т. д.).

Определение. Исчисление $\mathscr{L}_1$ называется *фрагментом* исчисления $\mathscr{L}_2$ (соответственно, $\mathscr{L}_2$ называется *консервативным расширением* $\mathscr{L}_1$), если $\mathrm{Tp}_{\mathscr{L}_1} \subseteq \mathrm{Tp}_{\mathscr{L}_2}$ и для секвенций, составленных исключительно из типов из множества $\mathrm{Tp}_{\mathscr{L}_1}$, выводимость в $\mathscr{L}_1$ равносильна выводимости в $\mathscr{L}_2$.

Из теоремы 1 следует, например, что исчисление $\mathrm{L}(\backslash)$ является фрагментом исчисления L. Аналогичным свойством обладает и исчисление $\mathrm{L}(\backslash; p_1, \ldots, p_N)$ по отношению к исчислениям L и $\mathrm{L}(\backslash)$. Однако по отношению к исчислению L^* исчисление L фрагментом не является (например, в L^* выводится невыводимая в L секвенция $(p_1 \backslash p_1) \backslash p_2 \to p_2$).

Фрагмент исчисления $\mathscr{L}$ с ограниченным набором примитивных типов $p_1, \ldots, p_N$ обозначим через $\mathscr{L}(p_1, \ldots, p_N)$ (например, $\mathrm{L}(\cdot, \backslash; p_1, p_2, p_2) = \mathrm{L}(\cdot, \backslash)(p_1, p_2, p_3)$).

Обозначим через $\mathscr{A}[z := A]$ результат подстановки типа A вместо каждого вхождения z (где $z \in \mathrm{Pr} \cup \{\mathbf{1}\}$) в $\mathscr{A}$; здесь $\mathscr{A}$ может быть любым синтаксическим объектом: типом, последовательностью типов, секвенцией или (см. далее) грамматикой. Запись $\mathscr{A}[z_1 := A_1, z_2 := A_2, \ldots]$ означает, что все подстановки осуществляются одновременно. Во всех рассматриваемых исчислениях допустимо *правило подстановки* (это свойство весьма естественно для разумной логической системы, и в применении к вариантам исчисления Ламбека принадлежит, по-видимому, математическому фольклору):

Предложение 1.1. *Если* $\mathscr{L} \vdash \Pi \to C$, *то* $\mathscr{L} \vdash (\Pi \to C)[q_1 := A_1, q_2 := A_2, \ldots]$, *где* $q_i \in \mathrm{Pr}$.

Доказательство. Поскольку все правила рассматриваемых исчислений заданы схемами, они сохраняют силу после осуществления подстановки произвольных типов вместо примитивных (здесь существенно, что $q_i \in \mathrm{Pr}$: при подстановке некоторого типа вместо $\mathbf{1}$ правило $(\mathbf{1} \to)$ теряет силу). Следовательно, достаточно проверить, что при подстановке аксиомы переходят в выводимые секвенции, т. е. что во всех рассматриваемых исчислениях для произвольного типа A выводима секвенция $A \to A$.

Выводимость секвенции $A \to A$ устанавливается индукцией по построению типа A. База индукции тривиальна: если $A = p_i$, то рассматриваемая секвенция является аксиомой (акс.), а если $A = \mathbf{1}$ (для исчисления $\mathrm{L}_\mathbf{1}$), то она выводится из аксиомы $\to \mathbf{1}$ одним применением правила $(\mathbf{1} \to)$. Индуктивный переход обосновывается следующими выводами:

$$\dfrac{\dfrac{A_1 \to A_1 \quad A_2 \to A_2}{A_1\, A_2 \to A_1 \cdot A_2}}{A_1 \cdot A_2 \to A_1 \cdot A_2} \qquad \dfrac{\dfrac{A_1 \to A_1 \quad A_2 \to A_2}{A_1\, (A_1 \setminus A_2) \to A_2}}{A_1 \setminus A_2 \to A_1 \setminus A_2} \qquad \dfrac{\dfrac{A_1 \to A_1 \quad A_2 \to A_2}{(A_2 \,/\, A_1)\, A_1 \to A_2}}{A_2 \,/\, A_1 \to A_2 \,/\, A_1}$$

$\square$

Если для всех секвенций $\Pi \to C$ верна и обратная импликация, подстановка называется *точной.*

Определение. Типы A и B называются *эквивалентными* в исчислении $\mathscr{L}$ (обозначение: $A \leftrightarrow_{\mathscr{L}} B$, или просто $A \leftrightarrow B$, когда ясно, какое исчисление имеется в виду), если $\mathscr{L} \vdash A \to B$ и $\mathscr{L} \vdash B \to A$.

Отношение $\leftrightarrow_{\mathscr{L}}$ действительно является отношением эквивалентности; кроме того, оно является конгруэнцией по отношению к связкам исчисления Ламбека:

Предложение 1.2. *Отношение $\leftrightarrow_{\mathscr{L}}$ рефлексивно, транзитивно и симметрично. Если $A_1 \leftrightarrow A_2$ и $B_1 \leftrightarrow B_2$, то $A_1 \cdot B_1 \leftrightarrow A_2 \cdot B_2$, $A_1 \setminus B_1 \leftrightarrow A_2 \setminus B_2$, $B_1 \,/\, A_1 \leftrightarrow B_2 \,/\, A_2$.*

Доказательство. Рефлексивность следует из выводимости секвенции $A \to A$, транзитивность получается применением правила (cut), симметричность очевидна.

Оставшиеся три утверждения доказываются применением, соответственно, правил $(\cdot \to)$ и $(\to \cdot)$, $(\to \setminus)$ и $(\setminus \to)$, $(\to /)$ и $(/ \to)$. $\square$

Используя правило (cut), получаем, что, если заменить в секвенции некий подтип на эквивалентный ему, выводимость секвенции не изменится.

1.4 Категориальные грамматики Ламбека

Алфавитом называется произвольное непустое конечное множество. Множество всех конечных последовательностей (включая пустую), составленных из элементов алфавита Σ *(слов над алфавитом Σ)* обозначается Σ^*. Пустое слово обозначается через ε. Множество всех слов, кроме пустого, обозначается Σ^+. Подмножества Σ^* называются *формальными языками* (или просто *языками*) над алфавитом Σ.

Для конечного описания формальных языков (обычно бесконечных как множества) используются формальные грамматики различных видов. Исчисление Ламбека и его варианты служат основой для *категориальных грамматик Ламбека.*

Определение. *Грамматикой, основанной на исчислении $\mathscr{L}$, ($\mathscr{L}$-грамматикой)* называется тройка $\mathcal{G} = \langle \Sigma, H, \rhd \rangle$, где Σ — некоторое непустое конечное множество (алфавит), $H \in \mathrm{Tp}_{\mathscr{L}}$, а $\rhd \subset \mathrm{Tp}_{\mathscr{L}} \times \Sigma$ — произвольное конечное бинарное соответствие. Язык, порождаемый грамматикой $\mathcal{G}$, есть $\text{Я}(\mathcal{G}) \leftrightharpoons \{a_1 \dots a_k \in \Sigma^* \mid \exists B_1, \dots, B_k \colon B_i \rhd a_i$ и $\mathscr{L} \vdash B_1 \dots B_k \to H\}$. Такие языки называются *$\mathscr{L}$-языками.*

Понятие *подстановки в $\mathscr{L}$-грамматику* определяется естественным образом: если $\mathcal{G} = \langle \Sigma, H, \rhd \rangle$ — $\mathscr{L}$-грамматика, $z \in \mathrm{Pr} \cup \{\mathbf{1}\}$ и $A \in \mathrm{Tp}_{\mathscr{L}}$, то $\mathcal{G}[z := A] \leftrightharpoons \langle \Sigma, H[z := A], \rhd[z := A] \rangle$, где $\rhd[z := A] \leftrightharpoons \{\langle B[z := A], a \rangle \mid B \rhd a\}$.

Предложение 1.3. *Если исчисление $\mathscr{L}$ является фрагментом исчисления $\mathscr{L}'$, то любой $\mathscr{L}$-язык является $\mathscr{L}'$-языком.*

Доказательство. Всякую $\mathscr{L}$-грамматику можно рассмотреть как $\mathscr{L}'$-грамматику. Из-за консервативности язык при этом не изменится. $\square$

И наоборот, если в $\mathscr{L}'$-грамматике встречаются только типы из $\mathrm{Tp}_{\mathscr{L}}$, то эту грамматику можно рассмотреть как $\mathscr{L}$-грамматику, задающую тот же язык.

Наряду с категориальными грамматиками, основанными на исчислении Ламбека и его вариантах, широко известно также семейство формализмов, называемое *иерархией Хомского* [7]. Мы будем рассматривать грамматики Хомского типа 2, называемые также контекстно-свободными грамматиками.

Определение. *Контекстно-свободной грамматикой* называется четвёрка $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$, где N и Σ — непересекающиеся алфавиты (элементы N и Σ называются, соответственно, *нетерминальными* и *терминальными* символами), P — конечное подмножество декартова произведения $N \times (N \cup \Sigma)^*$ и $S \in N$. Пары $\langle A, \alpha \rangle \in P$ называются *правилами (продукциями)* грамматики G и записываются так: $A \to \alpha$. Пусть $\varphi, \psi \in (N \cup \Sigma)^*$. Слово ψ *непосредственно выводимо* из φ в грамматике G (обозначение: $\varphi \Rightarrow_G \psi$), если найдутся такие $\alpha, \gamma, \delta \in (N \cup \Sigma)^*$ и $A \in N$, что $\varphi = \gamma A \delta$, $\psi = \gamma \alpha \delta$ и $(A \to \alpha) \in P$. Бинарное отношение $\Rightarrow_G^*$ есть рефлексивно-транзитивное замыкание отношения $\Rightarrow_G$. Если $\varphi \Rightarrow_G^* \psi$, говорят, что ψ *выводимо* из φ в грамматике G. Язык, порождаемый грамматикой G, есть множество всех слов, составленных только из нетерминальных символов и выводимых в грамматике G из однобуквенного слова S: $\text{Я}(G) \leftrightharpoons \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$. Такие языки называются *контекстно-свободными.*

Интересен вопрос о взаимном включении классов языков, задаваемых, с одной стороны, контекстно-свободными грамматиками, и, с другой стороны, $\mathscr{L}$-грамматиками для различных исчислений $\mathscr{L}$. Для $\mathscr{L} = \mathrm{L}$ и $\mathscr{L} = \mathrm{L}(\backslash)$ ответ на этот вопрос дают следующие теоремы:

Теорема 2 (Х. Гайфман, 1960; В. Бушковский, 1985)**.** *Всякий контекстно-свободный язык, не содержащий пустого слова, является* $\mathrm{L}(\backslash)$*-языком.* [2, 5]

Теорема 3 (М. Р. Пентус, 1993). *Всякий* L*-язык контекстно-свободен и не содержит пустого слова.* [30]

В силу предложения 1.3 получаем, что классы L-языков, L(\)-языков и контекстно-свободных языков без пустого слова совпадают.

У этих теорем есть варианты для исчислений, допускающих пустые антецеденты. Теорема 3 для L* сохраняется практически без изменений (единственное отличие и в формулировке, и в доказательстве заключается в том, что теперь рассматриваемые языки могут содержать пустое слово):

Теорема 4 (М. Р. Пентус, 1993). *Всякий* L*-*язык контекстно-свободен.* [30]

Чтобы доказать, что любой контекстно-свободный язык задаётся некоторой L*(\)-грамматикой (и, следовательно, классы L*-языков, L*(\)-языков и всех контекстно-свободных языков совпадают), нам потребуется теорема 2 в уточнённой форме:

Определение. Назовём тип *грейбаховским,* если он имеет вид p_i, $p_j \setminus p_i$ или $p_k \setminus (p_j \setminus p_i)$, причём $k, j \neq 1$. Назовём секвенцию $\Pi \to C$ *гайфмановской,* если $C = p_1$ и все типы в составе Π грейбаховские.

Теорема 5. *Всякий контекстно-свободный язык, не содержащий пустого слова, порождается некоторой* L(\)-*грамматикой* $\mathcal{G} = \langle \Sigma, H, \rhd \rangle$*, где* $H = p_1$*, а все типы, встречающиеся в* $\rhd$*, грейбаховские.*

Доказательство. Более слабая версия этой теоремы из [5] для произвольного контекстно-свободного языка без пустого слова даёт L(\)-грамматику практически требуемого вида, но без ограничения $k, j \neq 1$ в определении грейбаховского типа (в знаменателях может встречаться p_1). Преобразуем эту грамматику, чтобы это ограничение выполнялось. Пусть $\tilde{p}_1$ — новый (ранее не встречавшийся в грамматике) примитивный тип. Если для некоторой буквы $a \in \Sigma$ было $a \rhd A$, добавим в грамматику

$a \triangleright A[p_1 := \tilde{p}_1]$, а потом удалим из отношения $\triangleright$ все типы, в которых в знаменателях встречался p_1. Легко проверить, что при таком преобразовании грамматики порождаемый ей язык не изменится. $\square$

Ясно, что для таких грамматик все секвенции, которые нужно выводить для проверки принадлежности слов к языку, гайфмановские.

Предложение 1.4. *Если* $\Pi \to p_1$ *— гайфмановская секвенция, то*

$$\mathrm{L}^* \vdash \Pi \to p_1 \iff \mathrm{L} \vdash \Pi \to p_1.$$

Доказательство. Во всех секвенциях вывода гайфмановской секвенции (и в L, и в L*), в котором не применяется правило (cut), сукцеденты суть примитивные типы. Значит, правила $(\to \backslash)$ и $(\to /)$ применяться не могут, а остальные правила и аксиомы у L и L* совпадают. $\square$

Пусть теперь M — контекстно-свободный язык. Если $\varepsilon \notin M$, пусть $\mathcal{G}$ — $\mathrm{L}(\backslash)$-грамматика для M, существующая по теореме 5. В силу предложения 1.4 язык $\text{Я}(\mathcal{G})$ не изменится, если рассмотреть $\mathcal{G}$ как $\mathrm{L}^*(\backslash)$-грамматику. Таким образом, для любого контекстно-свободного языка, не содержащего пустого слова, существует $\mathrm{L}^*(\backslash)$-грамматика. Случай $\varepsilon \in M$ разобран в разделе 1.8.

Определение. Категориальные грамматики, для которых отношение $\triangleleft$ является частичной функцией из Σ в $\mathrm{Tp}_{\mathscr{L}}$ (иначе говоря, для каждой буквы $a \in \Sigma$ существует не более одного типа $B \in \mathrm{Tp}_{\mathscr{L}}$, для которого $B \triangleright a$), называются *грамматиками с однозначным присвоением типов.* (Термин *«детерминированные грамматики»,* принятый в [33], не очень удачен, потому что в рассматриваемых грамматиках остаётся ещё один источник недетерминированности: секвенция $B_1 \dots B_n \to H$ может иметь несколько существенно различных выводов в исчислении $\mathscr{L}$.)

Теорема 6 (А. Н. Сафиуллин, 2007)**.** *Всякий контекстно-свободный язык без пустого слова задаётся некоторой* L*-грамматикой с однозначным присвоением типов.* [33]

В [33] также указывается, что эту теорему можно усилить, заменив L на $\mathrm{L}(\backslash, /)$. Аналогичные вопросы для других фрагментов L (а именно, для $\mathrm{L}(\cdot, \backslash)$ и тем более для $\mathrm{L}(\backslash)$), а также для исчисления $\mathrm{L}_\mathbf{1}$ и его фрагментов остаются открытыми.

1.5 Алгоритмическая сложность исчисления Ламбека и его фрагментов

Приведём для дальнейших ссылок краткую сводку известных результатов о сложности проблем выводимости в исчислении Ламбека и его фрагментах. Более подробный обзор можно найти в [27].

В силу теорем об устранении сечения всякая выводимая секвенция имеет вывод, число применений правил в котором в точности равно числу связок в исходной секвенции, — вывод полиномиального относительно длины секвенции размера. Следовательно, проблемы выводимости в исчислениях L, $\mathrm{L}_\mathbf{1}$ и их фрагментах лежат в классе NP.

Теорема 7 (М. Р. Пентус, 2003)**.** *Проблемы выводимости в исчислениях* L *и* L^* *(а, следовательно, и в исчислении* $\mathrm{L}_\mathbf{1}$*) NP-полны.* [25]

Эта теорема допускает следующее усиление:

Теорема 8 (Ю. В. Саватеев, 2008—2009)**.** *Проблемы выводимости в исчислениях* $\mathrm{L}(\backslash, /)$, $\mathrm{L}^*(\backslash, /)$, $\mathrm{L}(\cdot, \backslash)$ *и* $\mathrm{L}^*(\cdot, \backslash)$ *NP-полны.*

Однако для случая одной связки ситуация иная:

Теорема 9 (Ю. В. Саватеев, 2006)**.** *Существует алгоритм, проверяющий выводимость секвенции в исчислении* $\mathrm{L}(\backslash)$ *(*$\mathrm{L}^*(\backslash)$*) за время* $O(n^3)$, *где* n *— длина секвенции (количество вхождений связок и примитивных типов).*

Более того, существует (Ю. В. Саватеев, 2008) алгоритм, за полиномиальное время проверяющий принадлежность данного слова данной

$\mathrm{L}(\backslash)$-грамматике ($\mathrm{L}^*(\backslash)$-грамматике); время работы алгоритма оценивается сверху многочленом от длины слова и суммарной длины типов, использующихся в грамматике.

Все упомянутые результаты Ю. В. Саватеева изложены в его диссертации [32].

1.6 Мультипликативная циклическая линейная логика

Введём вспомогательное исчисление $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp}$ — *мультипликативную циклическую линейную логику* (исчисление $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp}$ является фрагментом линейной логики Жирара [11] и впервые введено в [28]; в [23] установлена его связь с исчислением Ламбека).

Элементы счётного множества $\mathrm{Var} \leftrightharpoons \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ называются *переменными*; $\mathrm{At} \leftrightharpoons \mathrm{Var} \cup \{\bar{q} \mid q \in \mathrm{Var}\} \cup \{\mathbf{1}, \perp\}$ — множество *атомов*. Формулы $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp}$ строятся из атомов с помощью двух двуместных связок: $\invamp$ (мультипликативная дизъюнкция, *пар*) и $\otimes$ (мультипликативная конъюнкция, *тензор*). Множество всех формул обозначается $\mathrm{Fm}_{\mathbf{1},\perp}$. Формулы обозначаются заглавными латинскими, их последовательности — заглавными греческими буквами; пустая последовательность обозначается Λ. Секвенции $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp}$ имеют вид $\to \Gamma$.

Определение. *Линейное отрицание* вводится внешним образом как отображение $(\cdot)^\perp\colon \mathrm{Fm} \to \mathrm{Fm}$, определяемое рекурсивно: $p_i^\perp \leftrightharpoons \bar{p}_i$, $\bar{p}_i^\perp \leftrightharpoons p_i$, $\mathbf{1}^\perp \leftrightharpoons \perp$, $\perp^\perp \leftrightharpoons \mathbf{1}$, $(A \invamp B)^\perp \leftrightharpoons B^\perp \otimes A^\perp$, $(A \otimes B)^\perp \leftrightharpoons B^\perp \invamp A^\perp$.

Аксиомы $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp}$ имеют вид $\to p_i\, \bar{p}_i$ и $\to \mathbf{1}$. Правила вывода:

$$\frac{\to \Gamma\, A\, B\, \Delta}{\to \Gamma\, (A \invamp B)\, \Delta}\,(\to \invamp); \qquad \frac{\to \Gamma\, A \quad \to B\, \Delta}{\to \Gamma\, (A \otimes B)\, \Delta}\,(\to \otimes);$$

$$\frac{\to \Gamma\, \Delta}{\to \Gamma \perp \Delta}\,(\to \perp); \qquad \frac{\to \Gamma\, \Delta}{\to \Delta\, \Gamma}\,(\text{цикл.}).$$

Мы будем также рассматривать *двусторонние* $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp}$-секвенции: запись $A_1 A_2 \ldots A_n \to B_1 \ldots B_m$ понимается как $\to A_n^{\perp} \ldots A_2^{\perp} A_1^{\perp} B_1 \ldots B_m$.

Фрагмент исчисления $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp}$ без констант (задаваемый аксиомами вида $\to p_i \bar{p}_i$ и правилами $(\to \parr)$, $(\to \otimes)$ и (цикл.)) обозначим через MCLL.

Определение. *Стандартный перевод* $\widehat{A} \in \mathrm{Fm}$ *типа* $A \in \mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$ определяется следующим образом:

1. $\widehat{p_i} \leftrightharpoons p_i$ $(p_i \in \mathrm{Pr})$;

2. $\widehat{\mathbf{1}} \leftrightharpoons \mathbf{1}$;

3. $\widehat{A \cdot B} \leftrightharpoons \widehat{A} \otimes \widehat{B}$;

4. $\widehat{A \setminus B} \leftrightharpoons \widehat{A}^{\perp} \parr \widehat{B}$;

5. $\widehat{B \,/\, A} \leftrightharpoons \widehat{B} \parr \widehat{A}^{\perp}$.

Если $\Pi = B_1 \ldots B_m$, то $\widehat{\Pi} \leftrightharpoons \widehat{B}_1 \ldots \widehat{B}_m$. Стандартным переводом секвенции $\Pi \to C$ является секвенция $\widehat{\Pi} \to \widehat{C}$, или, что то же, секвенция $\to \widehat{B}_m^{\perp} \ldots \widehat{B}_1^{\perp} C$.

В смысле этого перевода MCLL является консервативным расширением $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$:

Теорема 10. *Пусть* $\Pi = B_1 \ldots B_m$ *и* $B_1, \ldots, B_m, C \in \mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$. *Тогда*

$$\mathrm{L}_{\mathbf{1}} \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp} \vdash \widehat{\Pi} \to \widehat{C}.$$

В силу консервативности $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp}$ над MCLL и $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ над L^* получаем аналогичную теорему для L^*:

Теорема 11. *Пусть* $\Pi = B_1 \ldots B_m$ *и* $B_1, \ldots, B_m, C \in \mathrm{Tp}$. *Тогда*

$$\mathrm{L}^* \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{MCLL} \vdash \widehat{\Pi} \to \widehat{C}.$$

Исчислению L соответствует модифицированное исчисление MCLL', получающееся из MCLL добавлением ограничения $\Gamma\Delta \neq \Lambda$ к правилу $(\to \parr)$.

Теорема 12. *Пусть* $\Pi = B_1 \ldots B_m$ *и* $B_1, \ldots, B_m, C \in \mathrm{Tp}$. *Тогда*

$$\mathrm{L} \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{MCLL}' \vdash \widehat{\Pi} \to \widehat{C}.$$

Теоремы 10 и 12 доказаны в [23].

Пример 1.2. В этом примере мы будем использовать запись $A^{\frown}$ вместо $\widehat{A}$. По определению стандартного перевода $\big((p_3 \setminus p_1) \setminus p_4\big)^{\frown} = (\bar{p}_1 \otimes p_3) \parr p_4$, $\big((p_3 \setminus p_2) \setminus p_4\big)^{\frown\perp} = \bar{p}_4 \otimes (\bar{p}_3 \parr p_2)$ и $\big(p_1 \setminus p_2\big)^{\frown\perp} = \bar{p}_2 \otimes p_1$. Значит, в силу примера 1.1 и теоремы 12 имеем $\mathrm{MCLL}' \vdash \to (\bar{p}_4 \otimes (\bar{p}_3 \parr p_2))\ (\bar{p}_2 \otimes p_1)\ ((\bar{p}_1 \otimes p_3) \parr p_4)$. Вывод этой секвенции таков:

$$\dfrac{\to p_4\ \bar{p}_4 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\to p_2\ \bar{p}_2 \qquad \to p_1\ \bar{p}_1}{\to p_2\ (\bar{p}_2 \otimes p_1)\ \bar{p}_1} \qquad \to p_3\ \bar{p}_3}{\to p_2\ (\bar{p}_2 \otimes p_1)\ (\bar{p}_1 \otimes p_3)\ \bar{p}_3}}{\to \bar{p}_3\ p_2\ (\bar{p}_2 \otimes p_1)\ (\bar{p}_1 \otimes p_3)}}{\to (\bar{p}_3 \parr p_2)\ (\bar{p}_2 \otimes p_1)\ (\bar{p}_1 \otimes p_3)}}{\dfrac{\to p_4\ (\bar{p}_4 \otimes (\bar{p}_3 \parr p_2))\ (\bar{p}_2 \otimes p_1)\ (\bar{p}_1 \otimes p_3)}{\dfrac{\to (\bar{p}_4 \otimes (\bar{p}_3 \parr p_2))\ (\bar{p}_2 \otimes p_1)\ (\bar{p}_1 \otimes p_3)\ p_4}{\to (\bar{p}_4 \otimes (\bar{p}_3 \parr p_2))\ (\bar{p}_2 \otimes p_1)\ ((\bar{p}_1 \otimes p_3) \parr p_4)}}}$$

Подстановка $\to \Gamma[z := A]$, где $z \in \mathrm{Var} \cup \{\mathbf{1}\}$, определяется с учётом отрицания следующим образом: если $z = p_i$, то вместо каждого вхождения p_i в $\to \Gamma$ подставляется A, а вместо каждого вхождения $\bar{p}_i$ — $A^\perp$; если же $z = \mathbf{1}$, то A подставляется вместо каждого вхождения $\mathbf{1}$, а $A^\perp$ — вместо каждого вхождения $\perp$. В исчислениях $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp}$ и MCLL' допустимо правило подстановки.

Предложение 1.5. *Если секвенция* $\to \Gamma$ *выводима в исчислении* MCLL *(в исчислении* MCLL'*), то в исчислении* MCLL *(соответственно,* MCLL'*) выводима и секвенция* $\to \Gamma[q_1 := A_1, q_2 := A_2, \ldots]$*, где* $q_i \in \mathrm{Var}$, $A_i \in \mathrm{Fm}$.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству аналогичного свойства исчисления Ламбека (предложение 1.1).

1.7 Сети доказательства

Сформулируем и докажем теоретико-графовые критерии выводимости в исчислениях MCLL и MCLL$'$, называемые *сетями доказательства.* Идея сетей доказательства, по-видимому, принадлежит математическому фольклору. Мы рассмотрим вариант сетей доказательства, предложенный Пентусом [24], и его модификацию для исчисления MCLL$'$; похожий критерий предложен также у де Гроота [12]. В силу теорем 11 и 12 эти критерии также годятся для исследования выводимости в исчислениях L* и L соответственно, чем мы и воспользуемся в дальнейшем.

Сначала по данной секвенции $\to \Gamma$ построим структуру $\mathbf{\Omega}_\Gamma = \langle \Omega_\Gamma, <_\Gamma, \prec_\Gamma \rangle$. Пусть $\Gamma = A_1 \dots A_m$. Поставим перед A_1 и между A_i и A_{i+1} ($i = 1, \dots, m-1$) значки $\diamond$ ($\diamond$ — новый символ): $\diamond A_1 \diamond A_2 \diamond \dots \diamond A_m$. В полученной записи занумеруем слева направо все символы, кроме скобок (атом считается одним символом; для определённости будем считать, что нумерация начинается с 1); множество пар $\langle \text{символ}, \text{номер} \rangle$ обозначим Ω_Γ. Элементы множества Ω_Γ будем называть *вхождениями* соответствующих символов в Γ; вхождения обозначаются маленькими греческими буквами. Для $\alpha = \langle s_1, k_1 \rangle, \beta = \langle s_2, k_2 \rangle$ положим $\alpha <_\Gamma \beta$ (вхождение α расположено *левее* вхождения β), если $k_1 < k_2$.

Под вхождением подформулы будем понимать соответствующее подмножество Ω_Γ. Если X — вхождение подформулы, то обозначим через $\mathrm{l}(X)$ вхождение связки или $\diamond$ непосредственно слева, а через $\mathrm{r}(X)$ — справа от X; если такого вхождения нет, $\mathrm{r}(X)$ определяется циклически как крайнее слева вхождение $\diamond$.

Для каждого A_i рассмотрим дерево синтаксического разбора (с вершинами — вхождениями, т. е. элементами множества Ω_Γ). Транзитивное замыкание объединения этих синтаксических деревьев (синтаксического леса) обозначим $\prec_\Gamma$ (если α — вершина, лежащая в поддереве с корнем β, то $\alpha \prec_\Gamma \beta$).

Множество вхождений знака $\parr$ обозначим $\Omega_\Gamma^{\parr}$, знака $\diamond$ — $\Omega_\Gamma^{\diamond}$, знака $\otimes$ — $\Omega_\Gamma^{\otimes}$, атомов вида p_i — $\Omega_\Gamma^{\mathrm{At}^+}$, атомов вида $\bar{p}_i$ — $\Omega_\Gamma^{\mathrm{At}^-}$; положим $\Omega_\Gamma^{\parr\diamond} \leftrightharpoons \Omega_\Gamma^{\parr} \cup \Omega_\Gamma^{\diamond}$, $\Omega_\Gamma^{\parr\otimes} \leftrightharpoons \Omega_\Gamma^{\parr} \cup \Omega_\Gamma^{\otimes}$ и $\Omega_\Gamma^{\mathrm{At}} \leftrightharpoons \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}^+} \cup \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}^-}$. Для $X \subseteq \Omega_\Gamma$ положим $\#(X) \leftrightharpoons |X \cap \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}^+}| - |X \cap \Omega_\Gamma^{\mathrm{At}^-}|$.

Положим $(\alpha, \beta) \leftrightharpoons \{\gamma \mid \alpha <_\Gamma \gamma <_\Gamma \beta\}$, $\mathrm{In}(\alpha,\beta) \leftrightharpoons (\alpha,\beta) \cup (\beta,\alpha)$, $\mathrm{Out}(\alpha,\beta) \leftrightharpoons \Omega_\Gamma - \big(\mathrm{In}(\alpha,\beta) \cup \{\alpha,\beta\}\big)$. (Здесь и далее для обозначения разности множеств применяется знак «$-$», потому что знак «$\backslash$» вызовет путаницу с обозначением операции левого деления.)

Определение. Ориентированный граф $\langle \Omega_\Gamma, \mathcal{C} \rangle$, где $\mathcal{C} \subseteq \Omega_\Gamma \times \Omega_\Gamma$, называется $<_\Gamma$-*планарным*, если для каждой пары дуг $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathcal{C}$ и $\langle \gamma, \delta \rangle \in \mathcal{C}$ если $\{\alpha,\beta\} \cap \{\gamma,\delta\} = \varnothing$, то $\gamma \in \mathrm{In}(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \delta \in \mathrm{In}(\alpha,\beta)$. Геометрически это означает, что дуги графа можно изобразить в верхней полуплоскости без пересечений, если его вершины расположены на границе полуплоскости в порядке $<_\Gamma$.

Определение. *Сетью доказательства* называется тройка $\mathfrak{N} = \langle \mathbf{\Omega}_\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{E} \rangle$, где $\mathcal{A} \subset \Omega_\Gamma \times \Omega_\Gamma$, $\mathcal{E} \subset \Omega_\Gamma \times \Omega_\Gamma$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. $|\Omega_\Gamma^{\parr\diamond}| - |\Omega_\Gamma^{\otimes}| = 2$;
2. $\mathcal{A}$ является всюду определённой функцией из $\Omega_\Gamma^{\otimes}$ в $\Omega_\Gamma^{\parr\diamond}$;
3. $\mathcal{E}$ является биективной функцией из $\Omega_\Gamma^{\mathrm{At}^+}$ в $\Omega_\Gamma^{\mathrm{At}^-}$, и если α — вхождение p_i, то $\mathcal{E}(\alpha)$ — вхождение $\bar{p}_i$;
4. граф $\langle \Omega_\Gamma, \mathcal{A} \cup \mathcal{E} \rangle$ $<_\Gamma$-планарен;
5. граф $\langle \Omega_\Gamma, \mathcal{A} \cup \prec_\Gamma \rangle$ является ациклическим.

Определение. *Сильной сетью доказательства* называется сеть доказательства, удовлетворяющая дополнительной аксиоме

6. для любого вхождения подформулы $X \subset \Omega_\Gamma$ имеем $\widetilde{\mathcal{A}}(\mathrm{l}(X)) \neq$

$\widetilde{\mathcal{A}}(\mathrm{r}(X))$, где

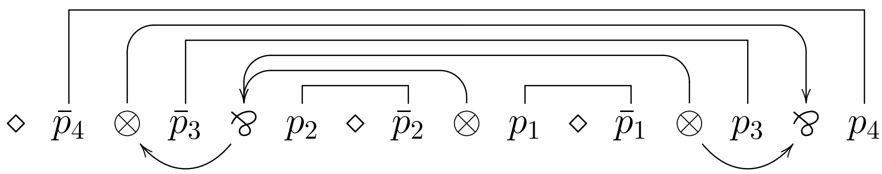
$$\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha) \leftrightharpoons \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \in \Omega_\Gamma^{\parr\diamond}, \\ \mathcal{A}(\alpha), & \text{если } \alpha \in \Omega_\Gamma^{\otimes}. \end{cases}$$

Теорема 13 (М. Р. Пентус, 1996)**.** *Секвенция* $\to \Gamma$ *выводима в исчислении* MCLL *тогда и только тогда, когда существует сеть доказательства для* Γ.

Теорема 14. *Секвенция* $\to \Gamma$ *выводима в исчислении* MCLL$'$ *тогда и только тогда, когда существует сильная сеть доказательства для* Γ.

Теорема 13 доказана в [24]. Приведённое ниже доказательство теоремы 14 является модификацией доказательства теоремы 13.

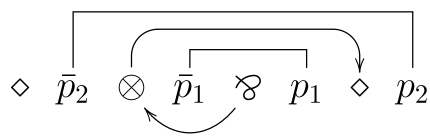
Пример 1.3. На следующем рисунке изображена сильная сеть доказательства для секвенции из примера 1.2:



Здесь и далее в изображениях сетей доказательства и их частей графы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{E}$ изображаются в верхней, а отношение $\prec_\Gamma$ (суженное на множество $\Omega_\Gamma^{\otimes} \cup \Omega_\Gamma^{\parr\diamond}$) — в нижней полуплоскости.

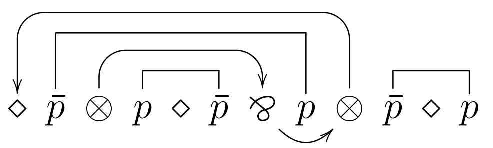
В этом примере множество Ω_Γ есть $\{\langle\diamond,1\rangle$, $\langle\bar p_4,2\rangle$, $\langle\otimes,3\rangle$, $\langle\bar p_3,4\rangle$, $\langle\parr,5\rangle$, $\langle p_2,6\rangle$, $\langle\diamond,7\rangle$, $\langle\bar p_2,8\rangle$, $\langle\otimes,9\rangle$, $\langle p_1,10\rangle$, $\langle\diamond,11\rangle$, $\langle\bar p_1,12\rangle$, $\langle\otimes,13\rangle$, $\langle p_3,14\rangle$, $\langle\parr,15\rangle$, $\langle p_4,16\rangle\}$.

Пример 1.4. Секвенция $\to \bigl(\bar p_2 \otimes (\bar p_1 \parr p_1)\bigr)\ p_2$ (перевод секвенции $(p_1 \setminus p_1) \setminus p_2 \to p_2$, выводимой в L*, но не в L) выводима в MCLL, но не в MCLL$'$. Приведённая ниже сеть доказательства для этой секвенции не является сильной.

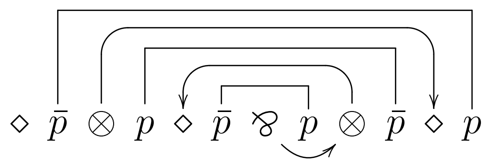


Действительно, если X — вхождение подформулы $\bar{p}_1 \parr p_1$, то $\mathrm{l}(X) = \langle \otimes, 3 \rangle$, $\mathrm{r}(X) = \langle \diamond, 7 \rangle$, и $\widetilde{\mathcal{A}}(\mathrm{l}(X)) = \widetilde{\mathcal{A}}(\mathrm{r}(X)) = \langle \diamond, 7 \rangle$, т. е. аксиома 6 не выполняется.

Пример 1.5. Можно также указать секвенцию, для которых существует как сильная сеть доказательства, так и сеть доказательства, не являющаяся сильной. Таковой является секвенция $\big(p \,/ (p \setminus p)\big)\ (p \setminus p) \to p$. Её стандартным переводом является секвенция $\to\ (\bar{p} \otimes p)\ \big((\bar{p} \parr p) \otimes \bar{p}\big)\ p$, для которой существуют две сети доказательства:



и



Первая из этих сетей является сильной, а вторая — нет. Эти две сети доказательства отвечают следующим двум выводам исходной секвенции $\big(p \,/ (p \setminus p)\big)\ (p \setminus p) \to p$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p \quad p \to p}{p\ (p \setminus p) \to p}}{p \setminus p \to p \setminus p} \quad p \to p}{\big(p \,/ (p \setminus p)\big)\ (p \setminus p) \to p} \qquad \text{и} \qquad \dfrac{\dfrac{p \to p}{\to p \setminus p} \quad \dfrac{p \to p \quad p \to p}{p\ (p \setminus p) \to p}}{\big(p \,/ (p \setminus p)\big)\ (p \setminus p) \to p}$$

Второй вывод действителен только в исчислении L^*, но не в L.

Лемма 1.6. *Если существует сильная сеть доказательства* $\mathfrak{N} = \langle \boldsymbol{\Omega}_\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{E} \rangle$, *то* Γ *состоит по меньшей мере из двух формул.*

Доказательство. От противного: пусть $\Gamma = A_1$. Пусть X — вхождение A_1 (как подформулы Γ). Тогда $\mathrm{l}(X) = \mathrm{r}(X) = \langle \diamond, 1 \rangle$, откуда $\widetilde{\mathcal{A}}(\mathrm{l}(X)) = \mathrm{l}(X) = \mathrm{r}(X) = \widetilde{\mathcal{A}}(\mathrm{r}(X))$, что противоречит аксиоме 6. $\square$

Доказательство теоремы 14. Утверждение «только тогда» доказывается построением сильной сети доказательства индукцией по выводу $\to \Gamma$ (точно так же, как и в доказательстве теоремы 13 [24]).

Будем доказывать утверждение «тогда» индукцией по количеству вхождений связок в Ω_Γ. База индукции тривиальна: в этом случае $\Omega_\Gamma^{\parr\otimes} =$

$\varnothing$, и наша секвенция может быть либо $\to p_i\,\bar{p}_i$ (аксиома), либо $\to \bar{p}_i\,p_i$ (получается из аксиомы одним применением правила (цикл.)).

Шаг индукции. Определим бинарное отношение $\ll$ как ограничение отношения $\prec_\Gamma \cup \mathcal{A}$ на множество $\Omega_\Gamma^{\bindnasrepma\otimes}$. Граф $\prec_\Gamma \cup \mathcal{A}$ ацикличен, поэтому существует максимальный для отношения $\ll$ элемент $\gamma \in \Omega_\Gamma^{\bindnasrepma\otimes}$.

Если $\gamma \in \Omega_\Gamma^{\bindnasrepma}$, заменим его на $\diamond$. Получится сильная сеть доказательства с меньшим числом вхождений связок. Применим к этой сети предположение индукции, а потом к получившейся секвенции — правило ($\to \bindnasrepma$). Ограничение этого правила выполняется в силу леммы 1.6.

Теперь пусть $\gamma \in \Omega_\Gamma^{\otimes}$ и $\beta = \mathcal{A}(\gamma)$. Поскольку γ максимален в смысле отношения $\ll$, $\beta \in \Omega_\Gamma^{\diamond}$. Без ограничения общности можно считать, что $\beta = \langle \diamond, 0 \rangle$ (т. е. β — крайнее слева вхождение $\diamond$): в противном случае применим правило (цикл.) и соответствующим образом перестроим сеть.

Итак, $\Gamma = \Phi\,(A \otimes B)\,\Psi$, и дуга $\langle \gamma, \beta \rangle \in \mathcal{A}$ ведёт из вхождения $\otimes$ в самое левое вхождение $\diamond$. Эта дуга разбивает верхнюю полуплоскость на две части. Возьмём верхнюю из них как сильную сеть доказательства для $\to B\,\Psi$, а нижнюю — для $\to \Phi\,A$. Аксиомы 2, 3, 4, 5 и 6 проверяются тривиальным образом. Аксиома 1 доказана в [24], лемма 7.10.

По предположению индукции $\mathrm{MCLL}' \vdash\ \to \Phi\,A$ и $\mathrm{MCLL}' \vdash\ \to B\,\Psi$, откуда, применяя правило ($\to \otimes$), получаем $\mathrm{MCLL}' \vdash\ \to \Phi\,(A \otimes B)\,\Psi$. $\square$

Далее мы будем рассматривать $\mathcal{E}$ как неориентированный граф на Ω_Γ; рёбра $\mathcal{E}$ условимся называть *скобками*. Для скобки $\mathbf{C}$ с концами α и β определим множества $\mathrm{In}(\mathbf{C})$ и $\mathrm{Out}(\mathbf{C})$ как $\mathrm{In}(\alpha, \beta)$ и $\mathrm{Out}(\alpha, \beta)$ соответственно. Из-за $<_\Gamma$-планарности графа $\mathcal{E}$ $\#(\mathrm{In}(\mathbf{C})) = \#(\mathrm{Out}(\mathbf{C})) = 0$. Скобки разбивают верхнюю полуплоскость на области. Для каждой скобки имеется *внешняя* и *внутренняя* область. Ясно, что в каждой области расположено хотя бы одно вхождение $\bindnasrepma$ или $\diamond$ (иначе там есть только вхождения $\otimes$, и дуги $\mathcal{A}$, ведущие из них, должны пересечь скобки, что противоречит $<_\Gamma$-планарности графа $\mathcal{A}\cup\mathcal{E}$). Подсчёт числа скобок и $|\Omega_\Gamma^{\otimes\diamond}|$ показывает, что на самом деле в каждой области находится ровно одно вхождение $\otimes$ или $\diamond$.

Для $X, Y \subseteq \Omega_\Gamma$ полагаем $X <_\Gamma Y$, если для любых $\alpha \in X$ и $\beta \in Y$ имеем $\alpha <_\Gamma \beta$. Пусть X и Y — два вхождения подформул, причём $X \cap Y = \varnothing$. Тогда определим *фрагмент от X до Y* как $\{\alpha \in \Omega_\Gamma \mid X <_\Gamma \{\alpha\} <_\Gamma Y\}$, если $X <_\Gamma Y$, и как $\{\alpha \in \Omega_\Gamma \mid \{\alpha\} <_\Gamma X$ или $Y <_\Gamma \{\alpha\}\}$, если $Y <_\Gamma X$ (другие случаи невозможны).

Если $\mathbf{C}$ — скобка и $\mathscr{K}$ — подмножество Ω_Γ, то положим $\mathscr{D}(\mathbf{C}, \mathscr{K}) = \mathrm{In}(\mathbf{C})$, если $\mathscr{K} \subseteq \mathrm{In}(\mathbf{C})$ и $\mathscr{D}(\mathbf{C}, \mathscr{K}) = \mathrm{Out}(\mathbf{C})$ в противном случае (если $\mathscr{K}$ — фрагмент от одного вхождения подформулы до другого, не содержащий концов $\mathbf{C}$, то в этом случае $\mathscr{K} \subseteq \mathrm{Out}(\mathbf{C})$, так что для таких $\mathscr{K}$ всегда имеем $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{D}(\mathbf{C}, \mathscr{K})$). Заметим, что $\#(\mathscr{D}(\mathbf{C}, \mathscr{K})) = 0$.

Условимся иногда опускать слово «вхождение» там, где это не приводит к путанице.

1.8 $\mathrm{L}^*(\backslash)$-грамматики для контекстно-свободных языков, содержащих пустое слово

Теорема 15. *Всякий контекстно-свободный язык порождается некоторой $\mathrm{L}^*(\backslash)$-грамматикой.*

Для завершения доказательства этой теоремы (см. раздел 1.4) осталось разобрать случай, когда в язык входит пустое слово. Пусть язык M контекстно-свободен и $\varepsilon \in M$. Построим по теореме 5 $\mathrm{L}(\backslash)$-грамматику $\mathcal{G}$ для языка $M - \{\varepsilon\}$.

Рассмотрим тип $D \leftrightharpoons \big((r \backslash r) \backslash \big((s \backslash s) \backslash q\big)\big) \backslash q$, где q, r и s — примитивные типы, не встречающиеся в грамматике $\mathcal{G}$.

Лемма 1.7.

1. $\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash \to D$.

2. Если секвенция $\Pi \to p_1$, где $\Pi \neq \Lambda$, гайфмановская и не содержит примитивных типов q, r и s, то верна равносильность

$$\mathrm{L}(\backslash) \vdash \Pi \to p_1 \iff \mathrm{L}^*(\backslash) \vdash \Pi[p_1 := D] \to D.$$

Доказательство. Первое утверждение доказывается явным построением вывода:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{r \to r}{\to r \backslash r} \qquad \dfrac{\dfrac{s \to s}{\to s \backslash s} \quad q \to q}{(s \backslash s) \backslash q \to q}}{(r \backslash r) \backslash \big((s \backslash s) \backslash q\big) \to q}}{\to \Big((r \backslash r) \backslash \big((s \backslash s) \backslash q\big)\Big) \backslash q}$$

Импликация слева направо во втором утверждении следует из того, что всякая выводимая в $\mathrm{L}(\backslash)$ секвенция выводима и в $\mathrm{L}^*(\backslash)$, и в исчислении $\mathrm{L}^*(\backslash)$ допустимо правило подстановки.

Нетривиальной является импликация справа налево. Пусть $\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash \Pi[p_1 := D] \to D$. Нам нужно доказать, что $\mathrm{L}(\backslash) \vdash \Pi \to p_1$. В силу предложения 1.4, поскольку секвенция $\Pi \to p_1$ гайфмановская, достаточно доказать, что $\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash \Pi \to p_1$ (иначе говоря, что для гайфмановских секвенций подстановка $p_1 := D$ является точной).

Рассмотрим перевод в MCLL. Легко видеть, что

$$\widehat{D} = \big(\bar{q} \otimes (\bar{s} \parr s) \otimes (\bar{r} \parr r)\big) \parr q \qquad \text{и} \qquad \widehat{D}^{\perp} = \bar{q} \otimes \big((\bar{r} \otimes r) \parr (\bar{s} \otimes s) \parr q\big).$$

Пусть $\Pi = B_1 \ldots B_n$ и пусть $\tilde{\Pi} = \widehat{B}_n^{\perp} \ldots \widehat{B}_1^{\perp}$.

Дано, что $\mathrm{MCLL} \vdash \to \tilde{\Pi}[p_1 := \widehat{D}]\, \widehat{D}$; в этой секвенции переменные q, r и s встречаются только в подставленных в неё вместо p_1 и $\bar{p}_1$ подформулах $\widehat{D}$ и $\widehat{D}^{\perp}$. Рассмотрим сеть доказательства для секвенции $\to \tilde{\Pi}[p_1 := \widehat{D}]\, \widehat{D}$. Вхождение $\bar{s}$ из $\widehat{D}^{\perp}$ не может быть соединено с вхождением s из какого-либо $\widehat{D}^{\perp}$ (ни другого, ни того же самого), потому что в противном случае в одной области окажутся два $\parr$:

$$\ldots \quad \bar{q} \otimes \bar{r} \otimes r \parr \bar{s} \otimes s \parr q \quad \ldots \quad \bar{q} \otimes \bar{r} \otimes r \parr \bar{s} \otimes s \parr q \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \bar{q} \otimes \bar{r} \otimes r \parr \bar{s} \otimes s \parr q \quad \ldots \quad \bar{q} \otimes \bar{r} \otimes r \parr \bar{s} \otimes s \parr q \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \bar{q} \otimes \bar{r} \otimes r \parr \bar{s} \otimes s \parr q \quad \ldots$$

Значит, это вхождение $\bar{s}$ соединено с вхождением s в некотором вхождении $\widehat{D}$.

Секвенция $\Pi \to p_1$ гайфмановская, следовательно, положительное вхождение p_1 единственно. Поэтому секвенция $\to \tilde{\Pi}[p_1 := \widehat{D}]\,\widehat{D}$ содержит в точности одно вхождение $\widehat{D}$ (это последняя формула секвенции) и, в силу предыдущего, не более одного вхождения $\widehat{D}^{\perp}$. Рассмотрим два случая:

1-й случай. Вхождений $\widehat{D}^{\perp}$ нет. Тогда q и $\bar{q}$ из вхождения $\widehat{D}$ соединены, и $\tilde{\Pi} = \Lambda$ (в противном случае в одной области окажутся два вхождения $\diamond$). Противоречие: $\Pi \neq \Lambda$.

2-й случай. Имеется ровно одно вхождение $\widehat{D}^{\perp}$. Тогда вхождения q, r, s, $\bar{q}$, $\bar{r}$ и $\bar{s}$ из $\widehat{D}$ и $\widehat{D}^{\perp}$ попарно соединены: $\bar{s}$ из $\widehat{D}^{\perp}$ соединено с s из $\widehat{D}$ в силу предыдущих рассуждений, следовательно, s из $\widehat{D}^{\perp}$ соединено с $\bar{s}$ из $\widehat{D}$ (других вхождений $\bar{s}$ нет); скобка, соединяющая $\bar{s}$ из $\widehat{D}^{\perp}$ и s из $\widehat{D}$, разделяет верхнюю полуплоскость на две части, в каждой из которых лежит по паре вхождений q и $\bar{q}$ — $\bar{q}$ и q из $\widehat{D}^{\perp}$ соединены соответственно с q и $\bar{q}$ из $\widehat{D}$; наконец, вхождение r из $\widehat{D}^{\perp}$ не может быть соединено с $\bar{r}$ из той же формулы, потому что в таком случае в области, лежащей под получившейся скобкой, не будет вхождения $\parr$ или $\diamond$ — значит, $\bar{r}$ и r из $\widehat{D}^{\perp}$ соединены соответственно с r и $\bar{r}$ из $\widehat{D}$.

$$\ldots \quad \bar{q} \otimes \bar{r} \otimes r \parr \bar{s} \otimes s \parr q \quad \ldots \quad \bar{q} \otimes \bar{s} \parr s \otimes \bar{r} \parr r \parr q$$

Теперь мы можем заменить $\widehat{D}^{\perp}$ и $\widehat{D}$ на $\bar{p}_1$ и p_1 соответственно, получив сеть доказательства для $\to \tilde{\Pi}\, p_1$, что и требовалось. $\square$

Из этой леммы очевидно следует, что если в грамматике $\mathcal{G}$ осуществить подстановку D вместо p_1, то получится $\mathrm{L}^*(\backslash)$-грамматика, порождающая язык $\text{Я}(\mathcal{G}) \cup \{\varepsilon\} = M$.

Глава 2

Исчисление Ламбека с единицей

2.1 Эквивалентная формулировка исчисления $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$

Для дальнейшего нам будет удобнее использовать альтернативную формулировку исчисления $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$. Правило $(\mathbf{1} \to)$ можно рассматривать как частный случай правила ослабления. Любой $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$-вывод можно перестроить так, что все применения этого правила будут идти сразу после аксиом. Точно это формулируется следующим образом. Рассмотрим исчисление, которое получится, если убрать из исчисления $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ правило $(\mathbf{1} \to)$ и добавить две серии аксиом: $\mathbf{1}^k \to \mathbf{1}$ $(k \geqslant 0)$ и $\mathbf{1}^k p_i \mathbf{1}^m \to p_i$ $(k, m \geqslant 0,$ $i \geqslant 1)$; обозначим их через $(\to \mathbf{1})_{\mathrm{w}}$ и $(\text{акс.})_{\mathrm{w}}$ соответственно. Временно назовём полученное исчисление $\widetilde{\mathrm{L}}_{\mathbf{1}}$.

Предложение 2.1. *Для любой секвенции* $\Pi \to B$*, где* $\Pi = A_1 \ldots A_n$*,* $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$*, имеет место равносильность*

$$\mathrm{L}_{\mathbf{1}} \vdash \Pi \to B \iff \widetilde{\mathrm{L}}_{\mathbf{1}} \vdash \Pi \to B.$$

Доказательство. Для доказательства импликации справа налево достаточно установить выводимость в исчислении $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ секвенций $(\to \mathbf{1})_{\mathrm{w}}$ и $(\text{акс.})_{\mathrm{w}}$. Это осуществляется индукцией по k и $k + m$ соответственно: базисный случай ($k = 0$ и $k + m = 0$) соответствует аксиомам $(\to \mathbf{1})$ и (акс.) исчисления $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$, а индуктивный переход производится применением правила $(\mathbf{1} \to)$.

Импликация слева направо устанавливается индукцией по длине $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$-вывода: если правило $(\mathbf{1}\to)$ применялось после какого-либо другого правила (возможно, несколько раз), то вывод можно перестроить таким образом, что применения правила $(\mathbf{1}\to)$ будут идти, наоборот, перед применением другого правила; применение же (многократное) правила $(\mathbf{1}\to)$ к аксиомам (акс.) и $(\to\mathbf{1})$ даёт как раз аксиомы $(\text{акс.})_{\mathrm{w}}$ и $(\to\mathbf{1})_{\mathrm{w}}$ соответственно. $\square$

В дальнейшем мы будем под исчислением $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ понимать исчисление $\widetilde{\mathrm{L}}_{\mathbf{1}}$, эквивалентное ему в силу предложения 2.1.

2.2 Свед**е́**ние $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ к L^*. $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$-грамматики

Построим подстановку, сводящую выводимость в исчислении $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ к выводимости в исчислении L^*.

Теорема 16. *Для любой секвенции $\Pi\to C$, составленной из типов, принадлежащих $\mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$, и любого примитивного типа q, не встречающегося в $\Pi\to C$, верна равносильность*

$$\mathrm{L}_{\mathbf{1}}\vdash\Pi\to C\iff\mathrm{L}^*\vdash\big(\Pi\to C\big)[p_i:=(\mathbf{1}\cdot p_i)\cdot\mathbf{1}][\mathbf{1}:=q\setminus q].$$

Запись вида «$p_i:=D_i$» означает, что подстановка осуществляется одновременно для всех i.

Лемма 2.2. *Для всех $k\geqslant 0$ имеет место выводимость $\mathrm{L}^*(\setminus)\vdash(q\setminus q)^k\to q\setminus q$.*

Доказательство.

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$q\to q$}
\AxiomC{$q\to q$}
\AxiomC{$q\to q$}
\AxiomC{$q\to q$}
\AxiomC{$q\to q$}
\BinaryInfC{$q\,(q\setminus q)\to q$}
\BinaryInfC{$\vdots$}
\UnaryInfC{$q\,(q\setminus q)\,\ldots\,(q\setminus q)\to q$}
\BinaryInfC{$q\,(q\setminus q)\,(q\setminus q)\,\ldots\,(q\setminus q)\to q$}
\BinaryInfC{$q\,(q\setminus q)\,(q\setminus q)\,(q\setminus q)\,\ldots\,(q\setminus q)\to q$}
\UnaryInfC{$(q\setminus q)\,(q\setminus q)\,(q\setminus q)\,\ldots\,(q\setminus q)\to q\setminus q$}
\end{prooftree}$$

$\square$

Рассмотрим вспомогательное исчисление $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}^{-}$, которое получается из L^* добавлением аксиом $(\to \mathbf{1})_{\mathrm{w}}$. Ясно, что всякая секвенция, выводимая в $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}^{-}$, выводима в $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$.

Лемма 2.3. *Для любой секвенции* $\Pi \to C$*, составленной из типов, принадлежащих* $\mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}$*, верны равносильности*

$$\mathrm{L}_{\mathbf{1}} \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{L}_{\mathbf{1}} \vdash \bigl(\Pi \to C\bigr)[p_i := (\mathbf{1} \cdot p_i) \cdot \mathbf{1}] \iff \\ \iff \mathrm{L}_{\mathbf{1}}^{-} \vdash \bigl(\Pi \to C\bigr)[p_i := (\mathbf{1} \cdot p_i) \cdot \mathbf{1}].$$

Доказательство. Первая равносильность следует из того, что $p_i \leftrightarrow_{\mathrm{L}_{\mathbf{1}}} (\mathbf{1} \cdot p_i) \cdot \mathbf{1}$, а выводимость в исчислении $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ не меняется при замене типа на эквивалентный.

Во второй равносильности импликация справа налево очевидна. Докажем обратную импликацию: выведем третье утверждение из первого (равносильного второму). Произведём в $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$-выводе секвенции $\Pi \to C$ подстановку $(\mathbf{1} \cdot p_i) \cdot \mathbf{1}$ вместо p_i (для всех i). Легко видеть, что при этом сохранятся аксиомы $(\to \mathbf{1})_{\mathrm{w}}$ и правила вывода. Остаётся проверить, что результат такой подстановки в аксиому $(\text{акс.})_{\mathrm{w}}$ будет выводим в $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}^{-}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{1}^{k+1} \to \mathbf{1} \qquad p_i \to p_i}{\mathbf{1}^{k+1}\, p_i \to \mathbf{1} \cdot p_i} \qquad \mathbf{1}^{m+1} \to \mathbf{1}}{\mathbf{1}^k\, \mathbf{1}\, p_i\, \mathbf{1}^{m+1} \to (\mathbf{1} \cdot p_i) \cdot \mathbf{1}}}{\mathbf{1}^k\, (\mathbf{1} \cdot p_i)\, \mathbf{1}\, \mathbf{1}^m \to (\mathbf{1} \cdot p_i) \cdot \mathbf{1}}}{\mathbf{1}^k\, \bigl((\mathbf{1} \cdot p_i) \cdot \mathbf{1}\bigr)\, \mathbf{1}^m \to (\mathbf{1} \cdot p_i) \cdot \mathbf{1}}$$

$\square$

Следующие две леммы по сути повторяют рассуждение Метейе [19] про замкнутый (без переменных, но с константами) фрагмент циклической линейной логики.

Лемма 2.4. *Если* $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}^{-} \vdash \Pi \to C$ *и* $q \in \mathrm{Pr}$*, то* $\mathrm{L}^* \vdash \bigl(\Pi \to C\bigr)[\mathbf{1} := q \setminus q]$.

Доказательство. Произведём требуемую подстановку в $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}^{-}$-выводе секвенции $\Pi \to C$. Аксиомы (акс.) и правила вывода при этом не пострадают. Аксиомы $(\to \mathbf{1})_{\mathrm{w}}$ перейдут в секвенции $(q \setminus q)^k \to q \setminus q$, выводимые в L^* по лемме 2.2. $\square$

Лемма 2.5. *Если* $\mathrm{L}^* \vdash \big(\Pi \to C\big)[\mathbf{1} := q \setminus q]$ *и* q *— примитивный тип, не встречающийся в* $\Pi \to C$*, то* $\mathrm{L}_{\mathbf{1}} \vdash \Pi \to C$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{L}^* \vdash \big(\Pi \to C\big)[\mathbf{1} := q \setminus q]$. Рассмотрим секвенцию $\big(\Pi \to C\big)[\mathbf{1} := q \setminus q][q := \mathbf{1}]$. С одной стороны, она выводима в $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$, потому что $\big(\Pi \to C\big)[\mathbf{1} := q \setminus q]$ выводима в $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ (в силу консервативности $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ над L^*) и в $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ допустимо правило подстановки. С другой стороны, рассматриваемая секвенция есть $\big(\Pi \to C\big)[\mathbf{1} := \mathbf{1} \setminus \mathbf{1}]$, потому что вхождения q могли появиться только в составе типов $q \setminus q$, подставляемых вместо $\mathbf{1}$. Значит, её выводимость в $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ равносильна выводимости секвенции $\Pi \to C$ (ибо $\mathbf{1} \leftrightarrow_{\mathrm{L}_{\mathbf{1}}} \mathbf{1} \setminus \mathbf{1}$). $\square$

Доказательство теоремы 16.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}_{\mathbf{1}} \vdash \Pi \to C \Longrightarrow \mathrm{L}_{\mathbf{1}}^{-} \vdash \big(\Pi \to C\big)[p_i := (\mathbf{1} \cdot p_i) \cdot \mathbf{1}] \Longrightarrow \\
\Longrightarrow \mathrm{L}^* \vdash \big(\Pi \to C\big)[p_i := (\mathbf{1} \cdot p_i) \cdot \mathbf{1}][\mathbf{1} := q \setminus q] \Longrightarrow \\
\Longrightarrow \mathrm{L}_{\mathbf{1}} \vdash \big(\Pi \to C\big)[p_1 := (\mathbf{1} \cdot p_i) \cdot \mathbf{1}] \Longrightarrow \mathrm{L}_{\mathbf{1}} \vdash \Pi \to C.
\end{aligned}
$$

Здесь первая и четвёртая импликации выполняются в силу леммы 2.3, вторая — в силу леммы 2.4, третья — в силу леммы 2.5. $\square$

Из теоремы 16 легко получается следствие про $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$-грамматики. (В [30] заявлено, что это утверждение доказывается так же, как и аналогичное утверждение об исчислении L^*, но это не так.)

Теорема 17. *Класс языков, порождаемых* $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$*-грамматиками, совпадает с классом всех контекстно-свободных языков.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{G}$ — $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$-грамматика. Тогда L^*-грамматика $\mathcal{G}[p_i := (\mathbf{1} \cdot p_i) \cdot \mathbf{1}][\mathbf{1} := q \setminus q]$ порождает (в силу теоремы 16) тот же язык, что и $\mathcal{G}$. С другой стороны, порождаемый ей язык контекстно-свободен по теореме 4.

Обратное включение следует из консервативности $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$ над L^* и теоремы 15. $\square$

2.3 Свед*е*ние $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(\backslash)$ к $\mathrm{L}^*(\backslash)$. Полиномиальная разрешимость проблемы выводимости в исчислении $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(\backslash)$

Нам потребуется более тонкое утверждение, чем теорема 16 — подстановка, содержащая только одно деление.

Теорема 18. *Если* $\Pi \to C$ *— секвенция с типами из* $\mathrm{Tp}_{\mathbf{1}}(\backslash)$ *и* q *— примитивный тип, не встречающийся в этой секвенции, то имеет место равносильность*

$$\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(\backslash) \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{L}^*(\backslash) \vdash \big(\Pi \to C\big)[\mathbf{1} := q \setminus q,\ p_i := (q \setminus q) \setminus (p_i \setminus q)].$$

Из этой теоремы непосредственно следует полиномиальная разрешимость проблемы выводимости в исчислении $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(\backslash)$ (проблемы выводимости в исчислениях $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$, $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(\backslash, /)$ и $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(\cdot, \backslash)$ NP-полны в силу консервативности и теоремы 8):

Теорема 19. *Существует алгоритм, проверяющий выводимость секвенции в исчислении* $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(\backslash)$ *за время* $O(n^3)$*, где* n *— длина секвенции (количество вхождений связок, примитивных типов и константы* $\mathbf{1}$*).*

Доказательство. Алгоритм таков: сначала по данной секвенции $\Pi \to C$ строится секвенция $\big(\Pi \to C\big)[\mathbf{1} := q \setminus q, p_i := (q \setminus q) \setminus (p_i \setminus q)]$ (длина секвенции при этом увеличится не более, чем в семь раз; q — примитивный тип, не встречающийся в $\Pi \to C$), а потом выводимость последней в $\mathrm{L}^*(\backslash)$ проверяется методом Саватеева (теорема 9). $\square$

Доказательству теоремы 18 предпошлём несколько технических лемм.

Лемма 2.6. *Для всех* $k, m \geqslant 0$, $p_i \in \mathrm{Pr}$ *имеет место выводимость*

$$\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash (q \backslash q)^k \bigl((q \backslash q) \backslash (p_i \backslash q)\bigr)\, (q \backslash q)^m \to (q \backslash q) \backslash (p_i \backslash q).$$

Доказательство.

$$\dfrac{\dfrac{(q \backslash q)^{k+1} \to q \backslash q \qquad \dfrac{\dfrac{p_i \to p_i \quad q\,(q \backslash q)^m \to q}{p_i\,(p_i \backslash q)\,(q \backslash q)^m \to q}}{(p_i \backslash q)\,(q \backslash q)^m \to p_i \backslash q}}{(q \backslash q)^{k+1} \bigl((q \backslash q) \backslash (p_i \backslash q)\bigr)\, (q \backslash q)^m \to p_i \backslash q}}{(q \backslash q)^k \bigl((q \backslash q) \backslash (p_i \backslash q)\bigr)\, (q \backslash q)^m \to (q \backslash q) \backslash (p_i \backslash q)}$$

Выводы секвенций $(q \backslash q)^{k+1} \to q \backslash q$ и $q\,(q \backslash q)^m \to q$ приведены в доказательстве леммы 2.2. □

Лемма 2.7. *Если* $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp} \vdash\; \to \Gamma[p_i := \bar{p}_i]$, *то* $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp} \vdash\; \to \Gamma$.

Доказательство. После осуществления подстановки $p_i := \bar{p}_i$ в $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp}$-выводе некоторой секвенции правила вывода и аксиома $\to \mathbf{1}$ сохраняют силу, а аксиомы $\to p_i\,\bar{p}_i$ переходят в секвенции $\to \bar{p}_i\,p_i$, выводимые одним применением правила (цикл.). Остаётся заметить, что $\Gamma[p_i := \bar{p}_i][p_i := \bar{p}_i] = \Gamma$. □

Лемма 2.8. *В* $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp}$ *имеют место эквивалентности* $\mathbf{1} \parr \perp \leftrightarrow \mathbf{1}$ *и* $(\mathbf{1} \otimes \perp) \parr (\bar{p}_i \parr \perp) \leftrightarrow \bar{p}_i$.

Доказательство. Поскольку $A \leftrightarrow_{\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp}} B$ означает, что $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp} \vdash\; \to A^\perp B$ и $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp} \vdash\; \to B^\perp A$, и $(\mathbf{1} \parr \perp)^\perp = \mathbf{1} \otimes \perp$, $\mathbf{1}^\perp = \perp$, $\bar{p}_i^\perp = p_i$, $\bigl((\mathbf{1} \otimes \perp) \parr (\bar{p}_i \parr \perp)\bigr)^\perp = (\mathbf{1} \otimes p_i) \otimes (\mathbf{1} \parr \perp)$, для доказательства леммы достаточно установить выводимость в $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\perp}$ следующих секвенций: $\to (\mathbf{1} \otimes \perp)\,\mathbf{1}$, $\to \perp\,(\mathbf{1} \parr \perp)$, $\to \bigl((\mathbf{1} \otimes p_i) \otimes (\mathbf{1} \parr \perp)\bigr)\,\bar{p}_i$ и $\to p_i\,\bigl((\mathbf{1} \otimes \perp) \parr (\bar{p}_i \parr \perp)\bigr)$. Предъявим выводы этих секвенций:

$$\dfrac{\to \mathbf{1} \qquad \dfrac{\to \mathbf{1}}{\to \perp\,\mathbf{1}}}{\to (\mathbf{1} \otimes \perp)\,\mathbf{1}} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\to \mathbf{1}}{\to \mathbf{1}\,\perp}}{\to \perp\,\mathbf{1}\,\perp}}{\to \perp\,(\mathbf{1} \parr \perp)}$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\to \mathbf{1} \quad \to p_i\,\bar p_i}{\to (\mathbf{1}\otimes p_i)\,\bar p_i}}{\to \bar p_i\,(\mathbf{1}\otimes p_i)} \quad \dfrac{\dfrac{\to \mathbf{1}}{\to \mathbf{1}\,\bot}}{\to \mathbf{1}\parr\bot}}{\to \bar p_i\,\big((\mathbf{1}\otimes p_i)\otimes(\mathbf{1}\parr\bot)\big)}}{\to \big((\mathbf{1}\otimes p_i)\otimes(\mathbf{1}\parr\bot)\big)\,\bar p_i}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\to \mathbf{1} \quad \dfrac{\dfrac{\to p_i\,\bar p_i}{\to \bar p_i\,p_i}}{\to \bot\,\bar p_i\,p_i}}{\to (\mathbf{1}\otimes\bot)\,\bar p_i\,p_i}}{\to p_i\,(\mathbf{1}\otimes\bot)\,\bar p_i}}{\to p_i\,(\mathbf{1}\otimes\bot)\,\bar p_i\,\bot}}{\to p_i\,(\mathbf{1}\otimes\bot)\,(\bar p_i\parr\bot)}}{\to p_i\,\big((\mathbf{1}\otimes\bot)\parr(\bar p_i\parr\bot)\big)}
$$

□

Доказательство теоремы 18. Докажем импликацию слева направо. Пусть для секвенции $\Pi \to C$ существует вывод в исчислении $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(\backslash)$. Выполним в этом выводе подстановки $\mathbf{1} := q \backslash q$ и $p_i := (q \backslash q) \backslash (p_i \backslash q)$. При этом правила вывода не пострадают, аксиомы $(\to \mathbf{1})_{\mathrm{w}}$ перейдут в выводимые (по лемме 2.2) севенции $(q \backslash q)^k \to q \backslash q$, а аксиомы $(\text{акс.})_{\mathrm{w}}$ — в выводимые (по лемме 2.6) секвенции $(q \backslash q)^k\,(q \backslash q) \backslash (p_i \backslash q)\,(q \backslash q)^m \to (q \backslash q) \backslash (p_i \backslash q)$. Значит, секвенция $\big(\Pi \to C\big)[\mathbf{1} := q \backslash q, p_i := (q \backslash q) \backslash (p_i \backslash q)]$ выводима в исчислении $\mathrm{L}^{*}(\backslash)$.

Теперь докажем импликацию справа налево. Пусть $\mathrm{L}^{*}(\backslash) \vdash \big(\Pi \to C\big)[\mathbf{1} := q \backslash q, p_i := (q \backslash q) \backslash (p_i \backslash q)]$. Тогда $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\bot} \vdash \big(\widehat{\Pi} \to \widehat{C}\big)[\mathbf{1} := \bar q \parr q, p_i := (\bar q \otimes q) \parr (\bar p_i \parr q)]$. Подставим в эту секвенцию $\bot$ вместо q. Получится выводимая в $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\bot}$ секвенция, причём, так как q не входит в $\widehat{\Pi} \to \widehat{C}$, это будет секвенция $\big(\widehat{\Pi} \to \widehat{C}\big)[\mathbf{1} := \mathbf{1} \parr \bot, p_i := (\mathbf{1} \otimes \bot) \parr (\bar p_i \parr \bot)]$. По лемме 2.8 получаем, что $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\bot} \vdash \big(\widehat{\Pi} \to \widehat{C}\big)[p_i := \bar p_i]$. Наконец, по лемме 2.7 имеем $\mathrm{MCLL}_{\mathbf{1},\bot} \vdash \widehat{\Pi} \to \widehat{C}$, откуда $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(\backslash) \vdash \Pi \to C$, что и требовалось. □

Глава 3

Исчисление Ламбека с одним примитивным типом

3.1 Сведе́ние $\mathrm{L}(\backslash; p_1, \ldots, p_N)$ к $\mathrm{L}(\backslash; p)$

Пусть N — произвольное натуральное число. Построим точную подстановку типов, сводящую выводимость в $\mathrm{L}(\backslash; p_1, \ldots, p_N)$ к выводимости в $\mathrm{L}(\backslash; p_1)$ и выводимость в $\mathrm{L}^*(\backslash; p_1, \ldots, p_N)$ к выводимости в $\mathrm{L}^*(\backslash; p_1)$.

Для упрощения записи введём обозначение $p^m \leftrightharpoons \underbrace{p \cdot \ldots \cdot p}_{m \text{ раз}}$. Предъявим типы $A_1, \ldots, A_N$:

$$A_k \leftrightharpoons \big(p^{k+1} \cdot \big(((p \cdot p) \setminus p) \setminus p\big) \cdot p^{N-k+1}\big) \setminus p, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Поскольку в сигнатуре исчисления $\mathrm{L}(\backslash)$ нет операции умножения, связка $\cdot$ (умножение в знаменателе) здесь понимается как сокращение записи для уменьшения количества скобок: $(D_1 \cdot \ldots \cdot D_m) \setminus C \leftrightharpoons D_m \setminus (D_{m-1} \setminus (D_{m-2} \setminus \ldots \setminus (D_1 \setminus C) \ldots))$; в формуле для A_k связка $\cdot$ встречалась только в таком качестве. Отметим, что это обозначение согласовано с «настоящей» операцией умножения в исчислении Ламбека: $(D_1 \cdot \ldots \cdot D_m) \setminus C \leftrightarrow_{\mathrm{L}(\cdot,\backslash)} D_m \setminus (D_{m-1} \setminus (D_{m-2} \setminus \ldots \setminus (D_1 \setminus C) \ldots))$.

Теорема 20. *Для любой секвенции $\Pi \to C$, где $\Pi = B_1 \ldots B_m$, $m \geqslant 1$, и $B_1, \ldots, B_m, C \in \mathrm{Tp}(\backslash; p_1, \ldots, p_N)$, имеет место равносильность*

$$\mathrm{L}(\backslash; p_1, \ldots, p_N) \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{L}(\backslash; p) \vdash (\Pi \to C)[p_1 := A_1, \ldots, p_N := A_N].$$

Теорема 21. *Для любой секвенции* $\Pi \to C$, *где* $\Pi = B_1 \dots B_m$, $m \geqslant 0$, *и* $B_1, \dots, B_m, C \in \mathrm{Tp}(\backslash; p_1, \dots, p_N)$, *имеет место равносильность*

$$\mathrm{L}^*(\backslash; p_1, \dots, p_N) \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{L}^*(\backslash; p) \vdash (\Pi \to C)[p_1 := A_1, \dots, p_N := A_N].$$

В силу консервативности MCLL' над $\mathrm{L}(\backslash)$ (и, соответственно, $\mathrm{MCLL}'(p)$ над $\mathrm{L}(\backslash; p)$ и $\mathrm{MCLL}'(p_1, \dots, p_N)$ над $\mathrm{L}(\backslash; p_1, \dots, p_N)$) и MCLL над $\mathrm{L}^*(\backslash)$ (соответственно, $\mathrm{MCLL}(p)$ над $\mathrm{L}^*(\backslash; p)$ и $\mathrm{MCLL}(p_1, \dots, p_N)$ над $\mathrm{L}^*(\backslash; p_1, \dots, p_N)$) эти две теоремы являются следствиями следующих двух более сильных утверждений, которые мы и докажем в следующем разделе:

Теорема 22. *Для любой секвенции* $\to \Gamma$, *где* $\Gamma = B_1 \dots B_m$, $m \geqslant 2$, *и* $B_1, \dots, B_m \in \mathrm{Fm}(p_1, \dots, p_N)$, *имеет место равносильность*

$$\mathrm{MCLL}'(p_1, \dots, p_N) \vdash\, \to \Gamma \iff \mathrm{MCLL}'(p) \vdash\, \to \Gamma[p_1 := \widehat{A}_1, \dots, p_N := \widehat{A}_N].$$

Теорема 23. *Для любой секвенции* $\to \Gamma$, *где* $\Gamma = B_1 \dots B_m$, $m \geqslant 1$, *и* $B_1, \dots, B_m \in \mathrm{Fm}(p_1, \dots, p_N)$, *имеет место равносильность*

$$\mathrm{MCLL}(p_1, \dots, p_N) \vdash\, \to \Gamma \iff \mathrm{MCLL}(p) \vdash\, \to \Gamma[p_1 := \widehat{A}_1, \dots, p_N := \widehat{A}_N].$$

Точная подстановка, сводящая выводимость в $\mathrm{MCLL}(p_1, \dots, p_N)$ к выводимости в $\mathrm{MCLL}(p)$, предлагалась Метейе в [19]. Конструкцию Метейе легко модифицировать, чтобы получить подстановку, сводящую $\mathrm{L}^*(\backslash, /; p_1, \dots, p_N)$ к $\mathrm{L}^*(\backslash, /; p)$ (вместо p_k предлагается подставить тип $A_k \leftrightharpoons p^k \backslash p \,/\, p^{N+1-k}$ — здесь по существу использованы обе операции деления); результат для соответствующих фрагментов L доказывается аналогично, с заменой сетей доказательства на сильные сети доказательства.

Ещё одна подстановка, сводящая выводимость в $\mathrm{L}(\backslash)$ к выводимости в $\mathrm{L}(\backslash; p)$, независимо от автора предложена Хендриксом в [13, гл. 3, п. 6]. Конструкция Хендрикса, в отличие от конструкции Метейе, использует только одно деление, однако рассматриваемые в ней типы имеют зависящую от N глубину вложенности делений и экспоненциальный по N размер (из-за итерированного применения подстановки; сходный эффект наблюдается для «равномерной» подстановки, описанной в разделе 3.5 настоящей работы), что делает невозможным применение этой конструкции для доказательства NP-полноты фрагментов $\mathrm{L}(\cdot, \backslash; p)$, $\mathrm{L}(\backslash, /; p)$ и их вариантов, допускающих пустые антецеденты; доказательство корректности сведения выводимости в $\mathrm{L}(\backslash)$ к выводимости в $\mathrm{L}(\backslash; p)$, предложенное Хендриксом, по мнению автора, сложнее излагаемого ниже.

3.2 Точность подстановки (доказательство)

Будем доказывать теоремы 22 и 23 параллельно. Импликации слева направо тривиальны (они следуют из допустимости правила подстановки).

Положим $R_k \leftrightharpoons \widehat{A}_k$. По определению стандартного перевода и линейного отрицания имеем

$$R_k = \underbrace{\bar{p} \parr \ldots \parr \bar{p}}_{N-k+1} \parr \bigl(\bar{p} \otimes (\bar{p} \parr \bar{p} \parr p_*)\bigr) \parr \underbrace{\bar{p} \parr \ldots \parr \bar{p}}_{k+1} \parr p_+;$$

$$R_k^\perp = \bar{p}_+ \otimes \underbrace{p \otimes \ldots \otimes p}_{k+1} \otimes \bigl((\bar{p}_* \otimes p \otimes p) \parr p\bigr) \otimes \underbrace{p \otimes \ldots \otimes p}_{N-k+1}.$$

Здесь мы пользуемся соглашением, что скобки при связках $\parr$ расставляются справа налево, а при $\otimes$ — слева направо. Индексы $*$ и $+$ у атомов выделяют их конкретные вхождения для дальнейших ссылок. Назовём R_k *положительной*, а $R_k^\perp$ — *отрицательной формулой.*

Итак, дано, что секвенция $\to \Gamma[p_1 := R_1, \ldots, p_N := R_N]$ выводима в исчислении $\mathrm{MCLL}'(p)$ (соответственно, $\mathrm{MCLL}(p)$). Поскольку в секвенции $\to \Gamma$ встречались только переменные $p_1, \ldots, p_N$, после подстановки получится секвенция с формулами из $\mathrm{Fm}(p)$, это равносильно (в силу консервативности) утверждению $\mathrm{MCLL}' \vdash {\to} \Gamma[p_1 := R_1, \ldots, p_N := R_N]$ (соответственно, $\mathrm{MCLL} \vdash {\to} \Gamma[p_1 := R_1, \ldots, p_N := R_N]$). Значит, для этой секвенции существует сильная сеть доказательства (соответственно, просто сеть доказательства) $\mathfrak{N}$. Построим по ней сеть доказательства $\mathfrak{N}'$ для исходной секвенции $\to \Gamma$; если сеть доказательства $\mathfrak{N}$ была сильной, $\mathfrak{N}'$ тоже будет сильной.

Сначала докажем несколько вспомогательных предложений об $\mathfrak{N}$.

Лемма 3.1. *Количества вхождений положительных и отрицательных формул совпадают.*

Доказательство. Пусть вхождений положительных формул m_1, а отрицательных — m_2. Тогда $0 = \#(\Omega_\Gamma) = (m_2 - m_1)(N + 3)$, откуда $m_2 = m_1$. $\square$

Лемма 3.2. *Вхождение p_* из R_k соединяется с вхождением $\bar{p}_*$ из некоторого $R^\perp_{k'}$ (возможно, $k \neq k'$).*

Доказательство. Рассуждаем от противного. Пусть скобка $\mathbf{C}$, выходящая из некого p_*, идёт не туда, куда надо. Рассмотрим случаи, где может находиться соответствующее вхождение $\bar{p}$:

1-й случай: Данное p_* соединено с $\bar{p}$ из того же R_k. Поскольку под любой скобкой число p и $\bar{p}$ должно быть одинаково, наше p_* может соединяться только с соседним $\bar{p}$. Но тогда в области, внешней по отношению к $\mathbf{C}$, будет два $\invamp$, что приводит к противоречию.

2-й случай: p_* соединено с $\bar{p}$ из другого $R_{k'}$. По обе стороны от p_* стоят знаки $\invamp$, и $\invamp$ же стоит хотя бы по одну сторону от любого $\bar{p}$ из $R_{k'}$, поэтому либо во внутренней, либо во внешней (по отношению к $\mathbf{C}$) области будет два $\invamp$. Опять противоречие.

3-й случай: p_* соединено с $\bar{p}_+$ (из некоторого $R^\perp_{k'}$) скобкой $\mathbf{C}$:

$$\bar{p} \invamp \ldots \invamp \bar{p} \invamp \bar{p} \otimes \bar{p} \invamp \bar{p} \invamp p_* \invamp \bar{p} \invamp \ldots \invamp \bar{p} \invamp p_+ \boxed{\quad\mathscr{K}\quad} \bar{p}_+ \otimes p \ldots \otimes p \otimes \bar{p}_* \otimes p \otimes p \invamp p \otimes p \otimes \ldots \otimes p$$

Обозначим через $\mathscr{K}$ фрагмент от R_k до $R^\perp_{k'}$. $\mathscr{K}$ состоит из нескольких вхождений положительных и отрицательных формул (и связок между ними). Пусть положительных формул там m_1, а отрицательных m_2. Тогда получаем $0 = \#(\mathscr{D}(\mathbf{C}, \mathscr{K})) = 1 - (k + 1) + \#(\mathscr{K}) =$

$-k + (m_2 - m_1)(N+3)$, откуда k делится на $N+3$, что невозможно, потому что $1 \leqslant k \leqslant N$. Противоречие. $\square$

Лемма 3.3. *Вхождение $\bar{p}_*$ из $R_k^\perp$ соединяется со вхождением p_* из некоторого $R_{k'}$.*

Доказательство. По лемме 3.1 вхождений $\bar{p}_*$ столько же, сколько и соединённых с ними (по лемме 3.2) вхождений p_*; лишних вхождений $\bar{p}_*$ нет. $\square$

Лемма 3.4. *Если вхождения p_* из R_k и $\bar{p}_*$ из $R_{k'}^\perp$ соединены, то $k = k'$.*

Доказательство. От противного: пусть $k \neq k'$ и рассматриваемые p_* и $\bar{p}_*$ соединены скобкой $\mathbf{C}$.

$$\bar{p} \parr \ldots \parr \bar{p} \parr \bar{p} \otimes \bar{p} \parr \bar{p} \parr p_* \parr \bar{p} \parr \ldots \parr \bar{p} \parr p_+ \boxed{\quad \mathscr{K} \quad} \bar{p}_+ \otimes p \otimes \ldots \otimes p \otimes \bar{p}_* \otimes p \otimes p \parr p \otimes p \otimes \ldots \otimes p$$

Как и раньше, пусть $\mathscr{K}$ — фрагмент от R_k до $R_{k'}^\perp$. Вхождения положительных формул в $\mathscr{K}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии со вхождениями отрицательных формул там же (биекция задаётся скобками, соединяющими p_* и $\bar{p}_*$). Значит, $\#(\mathscr{K}) = 0$. Но тогда $\#(\mathscr{D}(\mathbf{C}, \mathscr{K})) = k' - k + \#(\mathscr{K}) = k' - k \neq 0$ по нашему предположению. Противоречие. $\square$

Лемма 3.5. *Вхождение p_+ из R_k соединяется со вхождением $\bar{p}_+$ из некоторого $R_{k'}^\perp$ (возможно, $k \neq k'$).*

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев:

1-й случай: Данное вхождение p_+ соединяется с некоторым вхождением $\bar{p}$ из того же R_k скобкой $\mathbf{C}$. Поскольку $\#(\mathrm{In}(\mathbf{C})) = 0$, это соседнее вхождение $\bar{p}$:

$$\bar{p} \parr \ldots \parr \bar{p} \parr \bar{p} \otimes \bar{p} \parr \bar{p} \parr p_* \parr \bar{p} \parr \ldots \parr \bar{p} \parr p_+ \otimes$$

Но тогда справа от R_k находится вхождение τ знака $\otimes$ (если бы там был $\parr$, получили бы противоречие — два $\parr$ в одной области), причём соединённый $\mathcal{A}$-дугой с вхождением π знака $\parr$ слева от скобки $\mathbf{C}$ (в силу $<_\Gamma$-планарности графа $\mathcal{A} \cup \mathcal{E}$). С другой стороны, $\pi \prec_\Gamma \tau$. Противоречие с ацикличностью графа $\mathcal{A} \cup \prec_\Gamma$.

2-й случай: p_+ соединяется скобкой $\mathbf{C}$ с некоторым вхождением $\bar{p}$ в (другую) положительную формулу $R_{k'}$, но не третьим слева от p_*. Тогда либо во внутренней (если $R_{k'}$ лежит левее R_k), либо во внешней (если правее) по отношению к $\mathbf{C}$ области находятся два знака $\parr$. Противоречие.

3-й случай: p_+ соединяется с третьим слева от p_* вхождением $\bar{p}$ в $R_{k'}$ скобкой $\mathbf{C}$:

$$\bar{p} \parr \ldots \parr \bar{p} \parr \bar{p} \otimes \bar{p} \parr \bar{p} \parr p_* \parr \bar{p} \parr \ldots \parr \bar{p} \parr p_+ \boxed{\quad \mathscr{K} \quad} \bar{p} \parr \ldots \parr \bar{p} \parr \bar{p} \otimes \bar{p} \parr \bar{p} \parr p_* \parr \bar{p} \parr \ldots \parr \bar{p} \parr p_+$$

Опять введём фрагмент $\mathscr{K}$. По тем же соображениям, что и в доказательстве леммы 3.4, $\#(\mathscr{K}) = 0$. Но тогда $\#(\mathscr{D}(\mathbf{C}, \mathscr{K})) = -(N - k' + 1) + \#(\mathscr{K}) \neq 0$. Противоречие.

4-й случай: p_+ соединяется с $\bar{p}_*$ из некоторого $R_{k'}^{\perp}$. Но в силу леммы 3.3 это вхождение $\bar{p}_*$ соединено с некоторым вхождением p_*, а не с p_+. Противоречие. $\square$

Лемма 3.6. *Вхождение $\bar{p}_+$ из $R_k^{\perp}$ соединяется с вхождением p_+ из некоторого $R_{k'}$.*

Доказательство. Аналогично лемме 3.3. $\square$

Вхождение символа назовём *старым*, если оно не входит во вхождение положительной или отрицательной формулы (т.е. ему соответствует вхождение в исходной секвенции $\to \Gamma$).

Лемма 3.7 («о старом тензоре»)**.** *Если вхождение τ символа $\otimes$ старое, то $\mathcal{A}(\tau)$ — тоже старое.*

Доказательство. От противного. Пусть $\mathcal{A}(\tau)$ — не старое вхождение. Будем считать, что τ находится правее $\mathcal{A}(\tau)$ (в противном случае все рассуждения проводятся симметрично относительно дуги $\langle \tau, \mathcal{A}(\tau)\rangle$). Рассмотрим случаи:

1-й случай: $\mathcal{A}(\tau)$ расположено в $R_k^{\perp}$:

$$\bar{p}_+ \otimes p \otimes \ldots \otimes p \otimes \bar{p}_* \otimes p \otimes p \parr p \otimes p \otimes \ldots \otimes p \boxed{\quad \mathscr{K} \quad} \otimes$$

Положим $\mathscr{D} = \mathrm{In}(\tau, \mathcal{A}(\tau))$ и определим $\mathscr{K}$ как фрагмент Γ, расположенный между $R_k^{\perp}$ и τ. Имеем $\#(\mathscr{K}) = 0$ и $\#(\mathscr{D}) = 0$, что приводит к противоречию.

2-й случай: $\mathcal{A}(\tau)$ есть вхождение $\parr$ в R_k, причём не второе справа. Противоречие получается так же, как и в первом случае, если в качестве $\mathscr{D}$ взять то из множеств $\mathrm{In}(\tau, \mathcal{A}(\tau))$ и $\mathrm{Out}(\tau, \mathcal{A}(\tau))$, в котором не лежит p_* из рассматриваемого R_k. (В качестве $\mathscr{K}$ берётся фрагмент Γ, содержащий все элементы $\mathscr{D}$, кроме входящих в R_k.)

3-й случай: $\mathcal{A}(\tau)$ есть второе справа вхождение $\parr$ в R_k:

$$\bar{p} \parr \ldots \parr \bar{p} \parr \bar{p} \otimes \bar{p} \parr \bar{p} \parr p_* \parr \bar{p} \parr \ldots \parr \bar{p} \parr p_+ \boxed{\quad \mathscr{K} \quad} \otimes$$

Определим $\mathscr{D}$ и $\mathscr{K}$ так же, как и в первом случае. Количества вхождений p_* и $\bar{p}_*$ в $\mathscr{K}$ совпадают. Значит, совпадают и количества вхождений p_+ и $\bar{p}_+$ в $\mathscr{K}$. С другой стороны, то же верно и для $\mathscr{D}$. Получаем противоречие, поскольку в $\mathscr{D}$ столько же вхождений $\bar{p}_+$, сколько и в $\mathscr{K}$, а p_+ на единицу больше. $\square$

Теперь определим сеть $\mathfrak{N}'$ для исходной секвенции $\to \Gamma$: $\mathfrak{N}' \leftrightharpoons \langle \boldsymbol{\Omega}_\Gamma, \mathcal{A}', \mathcal{E}' \rangle$, где $\mathcal{A}'$ состоит из всех дуг $\mathcal{A}$, ведущих из старых $\otimes$, а рёбра $\mathcal{E}'$ соединяют такие вхождения p_k и $\bar{p}_k$, что у соответствующих R_k и $R_k^{\perp}$ соединены вхождения p_* и $\bar{p}_*$. В силу доказанных лемм $\mathfrak{N}'$ есть сеть доказательства для $\to \Gamma$, поэтому $\mathrm{MCLL} \vdash \to \Gamma$. Кроме того, если исходная сеть $\mathfrak{N}$ была сильной, то $\mathfrak{N}'$ тоже будет сильной, и секвенция $\to \Gamma$ будет выводима в исчислении MCLL'. Теоремы 22 и 23 доказаны.

3.3 $\mathrm{L}(\backslash; p)$- и $\mathrm{L}^*(\backslash; p)$-грамматики

Теорема 24. *Всякий контекстно-свободный язык, не содержащий пустого слова, порождается некоторой* $\mathrm{L}(\backslash; p_1)$*-грамматикой. Всякий контекстно-свободный язык порождается некоторой* $\mathrm{L}^*(\backslash; p_1)$*-грамматикой.*

Доказательство. В силу теорем 2 и 15 достаточно доказать, что всякий $\mathrm{L}(\backslash)$-язык (соответственно, $\mathrm{L}^*(\backslash)$-язык) порождается некоторой $\mathrm{L}(\backslash; p_1)$-грамматикой (соответственно, $\mathrm{L}^*(\backslash; p_1)$-грамматикой). Пусть для данного языка M существует $\mathrm{L}(\backslash)$-грамматика ($\mathrm{L}^*(\backslash)$-грамматика) $\mathcal{G}$. В грамматике участвует лишь конечное число примитивных типов; пусть наибольший номер примитивного типа, встречающегося в $\mathcal{G}$, равен N. Значит, $\mathcal{G}$ является $\mathrm{L}^*(\backslash; p_1, \ldots, p_N)$-грамматикой ($\mathrm{L}^*(\backslash; p_1, \ldots, p_N)$-грамматикой). Рассмотрим грамматику $\mathcal{G}[p_1 := A_1, \ldots, p_N := A_N]$. В силу теоремы 20 (соответственно, теоремы 21) эта грамматика порождает тот же язык M, т. е. является искомой $\mathrm{L}(\backslash; p_1)$-грамматикой ($\mathrm{L}^*(\backslash; p_1)$-грамматикой). □

В силу теорем 3 и 4 и консервативности получаем, что класс $\mathrm{L}(\backslash; p_1)$-языков совпадает с классом контекстно-свободных языков без пустого слова, а класс $\mathrm{L}^*(\backslash; p_1)$-языков совпадает с классом всех контекстно-свободных языков.

Применяя эту же конструкцию (можно использовать и более простую конструкцию Метейе) к грамматикам с однозначным присвоением типов, которые даёт теорема 6, получаем, что всякий контекстно-свободный язык без пустого слова порождается некоторой $\mathrm{L}(\backslash, /; p_1)$-грамматикой с однозначным присвоением типов.

3.4 NP-полнота проблем выводимости в исчислениях $\mathrm{L}(\cdot, \backslash; p)$, $\mathrm{L}^*(\cdot, \backslash; p)$, $\mathrm{L}(\backslash, /; p)$ и $\mathrm{L}^*(\backslash, /; p)$

Теорема 25. *Проблемы выводимости в исчислениях* $\mathrm{L}(\cdot, \backslash; p)$, $\mathrm{L}^*(\cdot, \backslash; p)$, $\mathrm{L}(\backslash, /; p)$ *и* $\mathrm{L}^*(\backslash, /; p)$ *(и, следовательно, в их консервативных расширениях* $\mathrm{L}(p)$, $\mathrm{L}^*(p)$, $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(\cdot, \backslash; p)$, $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(\backslash, /; p)$ *и* $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(p)$*) NP-полны.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}$ — одно из исчислений $\mathrm{L}(\cdot, \backslash)$, $\mathrm{L}^*(\cdot, \backslash)$, $\mathrm{L}(\backslash, /)$ и $\mathrm{L}^*(\backslash, /)$. Построим функцию φ, вычислимую за полиномиальное время, сводящую выводимость в $\mathscr{L}$ к выводимости в $\mathscr{L}(p)$. Рассмотрим произвольную секвенцию $\Pi \to C$. Пусть $N_{\Pi \to C}$ — наибольший номер примитивного типа, встречающегося в $\Pi \to C$. Для $N = N_{\Pi \to C}$ построим типы A_1, A_2, …, A_N так, как показано в разделе 3.1. Положим $\varphi(\Pi \to C) \leftrightharpoons \big(\Pi \to C\big)[p_1 := A_1, p_2 := A_2, \ldots, p_N := A_N]$. Из теорем 22 и 23 в силу консервативности получаем, что $\mathscr{L} \vdash \Pi \to C \iff \mathscr{L}(p) \vdash \varphi(\Pi \to C)$. Значит, φ является требуемой сводящей функцией, и, поскольку проблема выводимости в $\mathscr{L}$ NP-полна (теорема 8), проблема выводимости в $\mathscr{L}(p)$ также NP-полна.

Для исчислений с двумя делениями можно также воспользоваться конструкцией Метейе. $\square$

Проблема выводимости в исчислениях $\mathrm{L}(\backslash; p)$, $\mathrm{L}^*(\backslash; p)$ и $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}(\backslash; p)$, разумеется, решается за полиномиальное (точнее, кубическое) время, в силу консервативности и теорем 9 и 19.

3.5 Равномерная подстановка

Хотя для доказательства теорем 24 и 25 нам было достаточно точной подстановки, действующей на ограниченном множестве примитивных типов, интерес представляет вопрос о существовании единой подстановки, сводящей выводимость в $\mathrm{L}(\backslash)$ к выводимости в $\mathrm{L}(\backslash; p_1)$ (соответственно, $\mathrm{L}^*(\backslash)$ к $\mathrm{L}^*(\backslash; p_1)$), вне зависимости от количества различных примитивных типов, используемых в секвенции. Такую подстановку можно построить, используя уже имеющуюся конструкцию. Для начала заметим, что доказательство не изменится, если допустить наличие в секвенции *параметров,* а именно, выполняется следующее: для любой секвенции $\Pi \to C$, где $\Pi = B_1 \ldots B_m$ и $B_1, \ldots, B_m, C \in \mathrm{Tp}(\backslash; p_1, \ldots, p_N, p_{N+1}, \ldots, p_{N+M})$ верны равносильности

$$\mathrm{L}(\backslash) \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{L}(\backslash) \vdash \big(\Pi \to C\big)[p_1 := A_1, \ldots, p_N := A_N];$$

$$\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{L}^*(\backslash) \vdash \big(\Pi \to C\big)[p_1 := A_1, \ldots, p_N := A_N].$$

Здесь примитивные типы p_{N+1}, …, p_{N+M} играют роль параметров и не затрагиваются подстановкой; при преобразовании (сильной) сети доказательства рёбра $\mathcal{E}$, соединяющие их вхождения, без изменений копируются из сети $\mathfrak{N}$ в сеть $\mathfrak{N}'$.

Положим $N = 2$. Наша конструкция даёт следующие типы A_1 и A_2 (здесь мы продолжаем пользоваться соглашением об умножении в знаменателе):

$$\begin{aligned} A_1 &= \big(p \cdot p \cdot \big(((p \cdot p) \backslash p) \backslash p\big) \cdot p \cdot p\big) \backslash p, \\ A_2 &= \big(p \cdot p \cdot p \cdot \big(((p \cdot p) \backslash p) \backslash p\big) \cdot p\big) \backslash p. \end{aligned}$$

Определим две функции из $\mathrm{Tp}(\backslash)$ в $\mathrm{Tp}(\backslash)$: $\mathcal{L}\colon E \mapsto A_1[p_1 := E]$ и $\mathcal{R}\colon E \mapsto A_2[p_1 := E]$. Переименовывая примитивные типы, получаем следующую лемму:

Лемма 3.8. *Для произвольной секвенции* $\Pi \to C$, *где* $\Pi = B_1 \ldots B_m$ *и* $B_1, \ldots, B_m, C \in \mathrm{Tp}(\backslash; p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n, p_{n+1}$, *имеют место равносильности*

$$\mathrm{L}(\backslash) \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{L}(\backslash) \vdash \big(\Pi \to C\big)[p_n = \mathcal{L}(p_n), p_{n+1} := \mathcal{R}(p_n)];$$

$$\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{L}^*(\backslash) \vdash \big(\Pi \to C\big)[p_n = \mathcal{L}(p_n), p_{n+1} := \mathcal{R}(p_n)].$$

(Здесь роль параметров играют примитивные типы p_1, …, p_{n-1}.)

Лемма 3.9. *Для любого $n \geqslant 1$ и для произвольной секвенции $\Pi \to C$, где $\Pi = B_1 \dots B_m$ и $B_1, \dots, B_m, C \in \mathrm{Tp}(\backslash; p_1, \dots, p_n)$, имеют место равносильности*

$$\mathrm{L}(\backslash) \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{L}(\backslash; p_1) \vdash \big(\Pi \to C\big)[p_1 := \mathcal{L}(p_1),\\ p_2 := \mathcal{L}(\mathcal{R}(p_1)), \dots, p_{n-1} := \mathcal{L}(\mathcal{R}^{n-2}(p_1)), p_n := \mathcal{R}^{n-1}(p_1)];$$

$$\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{L}^*(\backslash; p_1) \vdash \big(\Pi \to C\big)[p_1 := \mathcal{L}(p_1),\\ p_2 := \mathcal{L}(\mathcal{R}(p_1)), \dots, p_{n-1} := \mathcal{L}(\mathcal{R}^{n-2}(p_1)), p_n := \mathcal{R}^{n-1}(p_1)].$$

Доказательство. Рассуждаем индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение очевидно: в этом случае справа стоит та же секвенция $\Pi \to C$. Предположим, что лемма верна для n и докажем её для $n+1$. По лемме 3.8 имеет место равносильность

$$\mathrm{L}(\backslash) \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{L}(\backslash) \vdash \big(\Pi \to C\big)[p_n := \mathcal{L}(p_n), p_{n+1} := \mathcal{R}(p_n)].$$

Секвенция в правой части содержит только примитивные типы $p_1, \dots, p_{n-1}, p_n$. По индуктивному предположению её выводимость равносильна тому, что

$$\mathrm{L}(\backslash) \vdash \big(\Pi \to C\big)[p_n := \mathcal{L}(p_n), p_{n+1} := \mathcal{R}(p_n)][p_1 := \mathcal{L}(p_1),\\ p_2 = \mathcal{L}(\mathcal{R}(p)), \dots, p_{n-1} := \mathcal{L}(\mathcal{R}^{n-2}(p)), p_n := \mathcal{R}^{n-1}(p)],$$

а эта секвенция графически совпадает с секвенцией $\big(\Pi \to C\big)[p_1 := \mathcal{L}(p), p_2 = \mathcal{L}(\mathcal{R}(p)), \dots, p_{n-1} := \mathcal{L}(\mathcal{R}^{n-2}(p)), p_n := \mathcal{L}(\mathcal{R}^{n-1}(p)), p_{n+1} := \mathcal{R}^n(p)]$, что и требуется.

Рассуждения для $\mathrm{L}^*(\backslash)$ полностью аналогичны. □

Теорема 26. *Для произвольной секвенции $\Pi \to C$, где $\Pi = B_1 \dots B_m$, $B_1, \dots, B_m, C \in \mathrm{Tp}(\backslash)$, имеют место равносильности*

$$\mathrm{L}(\backslash) \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{L}(\backslash; p_1) \vdash \big(\Pi \to C\big)[p_1 := \mathcal{L}(p), p_2 := \mathcal{L}(\mathcal{R}(p)),\\ p_3 := \mathcal{L}(\mathcal{R}(\mathcal{R}(p))), \dots, p_k := \mathcal{L}(\mathcal{R}^{k-1}(p)), \dots];$$

$$\mathrm{L}^*(\backslash) \vdash \Pi \to C \iff \mathrm{L}^*(\backslash; p_1) \vdash \bigl(\Pi \to C\bigr)[p_1 := \mathcal{L}(p), p_2 := \mathcal{L}(\mathcal{R}(p)),$$
$$p_3 := \mathcal{L}(\mathcal{R}(\mathcal{R}(p))), \ldots, p_k := \mathcal{L}(\mathcal{R}^{k-1}(p)), \ldots].$$

Доказательство. Применим предыдущую лемму для $n = N + 1$, где N — наибольший номер примитивного типа, встречающегося в секвенции $\Pi \to C$. $\square$

Недостатком предложенной выше равномерной подстановки является экспоненциальный рост размера подставляемого типа: вместо p_k предлагается подставить тип $\mathcal{L}(\mathcal{R}^{k-1}(p))$, содержащий 9^k вхождений примитивного типа p (при каждом применении функции $\mathcal{L}$ или $\mathcal{R}$ количество вхождений примитивных типов увеличивается в девять раз). Эта особенность не позволяет применять равномерную подстановку для доказательства NP-полноты фрагментов исчисления Ламбека с одним примитивным типом и хотя бы двумя связками.

Глава 4

Исчисление Ламбека с операцией обращения

4.1 L-модели для исчисления L

В этом и следующих трёх разделах алфавит Σ считается произвольным непустым конечным *или счётным* множеством. Три связки исчисления L соответствуют трём операциям над языками без пустого слова ($M, N \subseteq \Sigma^+$): $M \cdot N \risingdotseq \{uv \mid u \in M, v \in N\}$, $M \setminus N \risingdotseq \{u \in \Sigma^+ \mid (\forall v \in M)\, vu \in N\}$, $N \setminus M \risingdotseq \{u \in \Sigma^+ \mid (\forall v \in M)\, uv \in N\}$.

Определение. L-моделью называется пара $\mathcal{M} = \langle \Sigma, w \rangle$, где Σ — алфавит, а w — отображение типов исчисления Ламбека в формальные языки над Σ, не содержащие пустого слова, причём для любых $A, B \in \mathrm{Tp}$ выполняются соотношения $w(A \cdot B) = w(A) \cdot w(B)$, $w(A \setminus B) = w(A) \setminus w(B)$ и $w(B \,/\, A) = w(B) \,/\, w(A)$. Отображение w называется *интерпретацией* типов языками над Σ.

Отображение w определяется произвольным образом на примитивных типах, а на остальные типы распространяется единственным образом.

Поскольку множество Σ^+ с операцией приписывания слов является свободной полугруппой, порождённой алфавитом Σ, L-модели также называются *моделями на подмножествах свободных полугрупп.*

Определение. Секвенция вида $F \to G$ считается *истинной* в модели $\mathcal{M} = \langle \Sigma, w \rangle$ (обозначение: $\mathcal{M} \vDash F \to G$), если $w(F) \subseteq w(G)$.

Исчисление L корректно и полно относительно класса L-моделей (далее мы кратко будем называть это свойство «L-полнотой»):

Теорема 27 (М. Р. Пентус, 1995)**.** *Секвенция $F \to G$ выводима в* L *тогда и только тогда, когда она истинна во всех L-моделях.*

Эта теорема доказана в [31]; доказательство для частного случая — исчисления Ламбека без операции умножения — гораздо проще и приведено в [3].

Заметим, что, хотя теорема 27 сформулирована только для секвенций вида $F \to G$ (с одним типом в антецеденте), её легко обобщить на случай секвенции произвольного вида, потому что секвенция $F_1 F_2 \dots F_n \to G$ выводима в исчислении Ламбека тогда и только тогда, когда выводима секвенция $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n \to G$ (в силу ассоциативности операции умножения расстановка скобок в левой части не имеет значения) Определение интерпретации также естественно распространяется на последовательности типов: $\bar{w}(F_1 F_2 \dots F_n) \leftrightharpoons w(F_1) \cdot w(F_2) \cdot \ldots \cdot w(F_n)$, и окончательно получаем, что $\mathrm{L} \vdash \Pi \to G$ тогда и только тогда, когда для любой модели $\mathcal{M} = \langle \Sigma, w \rangle$ имеем $\mathcal{M} \vDash \Pi \to C$, т. е. $\bar{w}(\Pi) \subseteq w(G)$. В силу этого соображения достаточно рассматривать только секвенции вида $F \to G$.

4.2 Исчисление L^{R}

Рассмотрим ещё одну операцию над формальными языками — *обращение* языка. Для $u = a_1 a_2 \dots a_n$ ($a_1, \dots, a_n \in \Sigma$, $n \geqslant 1$) положим $u^{\mathrm{R}} \leftrightharpoons a_n \dots a_2 a_1$; для $M \subseteq \Sigma^+$ положим $M^{\mathrm{R}} \leftrightharpoons \{u^{\mathrm{R}} \mid u \in M\}$. Добавим к языку исчисления Ламбека новую одноместную связку $^{\mathrm{R}}$ (записывается в постфиксной форме: A^{R}); новое множество типов обозначим через Tp^{R}. Если $\Gamma = A_1 A_2 \dots A_n$, положим $\Gamma^{\mathrm{R}} \leftrightharpoons A_n^{\mathrm{R}} \dots A_2^{\mathrm{R}} A_1^{\mathrm{R}}$.

Понятие L-модели обобщается естественным образом — добавлением условия $w(A^{\mathrm{R}}) = w(A)^{\mathrm{R}}$ на интерпретацию типов (уже из расширенного множества Tp^{R}).

Исчисление L^{R} получается из исчисления L добавлением трёх новых правил для новой связки $^{\mathrm{R}}$:

$$\frac{\Gamma \to C}{\Gamma^{\mathrm{R}} \to C^{\mathrm{R}}}\ ({}^{\mathrm{R}} \to {}^{\mathrm{R}}) \qquad \frac{\Gamma\, A\, \Delta \to C}{\Gamma\, A^{\mathrm{RR}}\, \Delta \to C}\ ({}^{\mathrm{RR}} \to) \qquad \frac{\Gamma \to C}{\Gamma \to C^{\mathrm{RR}}}\ (\to {}^{\mathrm{RR}})$$

Легко видеть, что исчисление L^{R} корректно относительно L-моделей (любая L^{R}-выводимая секвенция истинна во всех моделях).

Предложение 4.1. *Исчисление* L^{R} *является консервативным расширением исчисления* L.

Доказательство. Пусть секвенция $F \to G$ выводима в L^{R}, причём $F, G \in \mathrm{Tp}$. Тогда эта секвенция истинна во всех L-моделях и, в силу теоремы 27, выводима в L.

Случай секвенций со многими типами в антецеденте сводится к уже рассмотренному (см. окончание предыдущего раздела). □

Заметим, что, поскольку правило сечения в приведённом выше исчислении неустранимо (например, выводимая (см. лемму 4.2) секвенция $(p_1 \cdot p_2)^{\mathrm{R}} \to p_2^{\mathrm{R}} \cdot p_1^{\mathrm{R}}$ не имеет вывода без применений правила сечения), консервативность L^{R} над L неочевидна. Вопрос о построении исчисления без правила сечения, эквивалентного исчислению L^{R}, открыт.

L-полнота фрагмента исчисления L^{R} без умножения доказана в [29] с помощью модифицированного метода Бушковского [3]; там же доказана L-полнота вырожденного фрагмента, в котором из связок оставлены только умножение и обращение. Мы докажем L-полноту всего исчисления L^{R}:

Теорема 28. *Секвенция $F \to G$ ($F, G \in \mathrm{Tp}^{\mathrm{R}}$) выводима в* L^{R} *тогда и только тогда, когда она истинна во всех L-моделях.*

В [18] рассматривается аналогичная операция на подмножествах свободных моноидов, т. е. на L-моделях, в которых языки могут содержать пустое слово, с соответствующим образом изменёнными операциями деления. Такие модели соответствуют исчислению L^*: имеет место теорема о полноте [24]; вопрос об L-полноте расширения L^* связкой ${}^{\mathrm{R}}$ остаётся открытым.

4.3 Нормальная форма типов исчисления L^{R}

Отношение $\leftrightarrow_{\mathrm{L}^{\mathrm{R}}}$ является отношением эквивалентности, а также конгруэнцией относительно всех связок (для ${}^{\mathrm{R}}$ это достигается применением правила $({}^{\mathrm{R}} \to {}^{\mathrm{R}})$, для остальных связок см. предложение 1.2).

Лемма 4.2. *В* L^{R} *имеют место следующие эквивалентности (*A *и* B *— произвольные типы из* Tp^{R}*):*

1. $A^{\mathrm{RR}} \leftrightarrow A$;
2. $(A \cdot B)^{\mathrm{R}} \leftrightarrow B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}}$;
3. $(A \setminus B)^{\mathrm{R}} \leftrightarrow B^{\mathrm{R}} / A^{\mathrm{R}}$;
4. $(B / A)^{\mathrm{R}} \leftrightarrow A^{\mathrm{R}} \setminus B^{\mathrm{R}}$.

Доказательство. Первая эквивалентность очевидна из правил $({}^{\mathrm{RR}} \to)$ и $(\to {}^{\mathrm{RR}})$. Вторая и третья эквивалентности устанавливаются следующими выводами:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A^{\mathrm{RR}} \qquad \dfrac{B \to B^{\mathrm{RR}} \qquad \dfrac{\dfrac{B^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}} \quad A^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}}}{B^{\mathrm{R}}\, A^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}}}}{A^{\mathrm{RR}}\, B^{\mathrm{RR}} \to (B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}}}}{A^{\mathrm{RR}}\, B \to (B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}}}}{A\, B \to (B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}}}}{A \cdot B \to (B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}}}}{(A \cdot B)^{\mathrm{R}} \to (B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{RR}}} \qquad (B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{RR}} \to B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}}}{(A \cdot B)^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A \quad B \to B}{A\,B \to A \cdot B}}{B^{\mathrm{R}}\,A^{\mathrm{R}} \to (A \cdot B)^{\mathrm{R}}}}{B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}} \to (A \cdot B)^{\mathrm{R}}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A \quad B \to B}{A\,(A \setminus B) \to B}}{(A \setminus B)^{\mathrm{R}}\,A^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}}}}{(A \setminus B)^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}} \,/\, A^{\mathrm{R}}}$$

$$\dfrac{B^{\mathrm{R}} / A^{\mathrm{R}} \to (B^{\mathrm{R}} / A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{RR}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A^{\mathrm{RR}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A^{\mathrm{R}} \to A^{\mathrm{R}} \quad B^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}}}{(B^{\mathrm{R}} / A^{\mathrm{R}})\,A^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{R}}}}{A^{\mathrm{RR}}\,(B^{\mathrm{R}} / A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}} \to B^{\mathrm{RR}}} \quad B^{\mathrm{RR}} \to B}{A^{\mathrm{RR}}\,(B^{\mathrm{R}} / A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}} \to B}}{A\,(B^{\mathrm{R}} / A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}} \to B}}{(B^{\mathrm{R}} / A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}} \to A \setminus B}}{(B^{\mathrm{R}} / A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{RR}} \to (A \setminus B)^{\mathrm{R}}}}{B^{\mathrm{R}} / A^{\mathrm{R}} \to (A \setminus B)^{\mathrm{R}}}$$

Четвёртая эквивалентность симметрична третьей. □

Определение. Для произвольного типа $A \in \mathrm{Tp}^{\mathrm{R}}$ определим тип $tr(A)$ индуктивно по числу связок в A:

1. $tr(p_i) \leftrightharpoons p_i$;
2. $tr(p_i^{\mathrm{R}}) \leftrightharpoons p_i^{\mathrm{R}}$;
3. $tr(A \cdot B) \leftrightharpoons tr(A) \cdot tr(B)$;
4. $tr(A \setminus B) \leftrightharpoons tr(A) \setminus tr(B)$;
5. $tr(B \,/\, A) \leftrightharpoons tr(B) \,/\, tr(A)$;
6. $tr((A \cdot B)^{\mathrm{R}}) \leftrightharpoons tr(B^{\mathrm{R}}) \cdot tr(A^{\mathrm{R}})$;
7. $tr((A \setminus B)^{\mathrm{R}}) \leftrightharpoons tr(B^{\mathrm{R}}) \,/\, tr(A^{\mathrm{R}})$;
8. $tr((B \,/\, A)^{\mathrm{R}}) \leftrightharpoons tr(A^{\mathrm{R}}) \setminus tr(B^{\mathrm{R}})$;
9. $tr(A^{\mathrm{RR}}) \leftrightharpoons tr(A)$.

Следующее утверждение доказывается индукцией по количеству связок в типе A; на шаге индукции применяется лемма 4.2:

Предложение 4.3. *Всякий тип $A \in \mathrm{Tp}^{\mathrm{R}}$ эквивалентен в исчислении L^{R} типу $tr(A)$.*

Назовём $tr(A)$ *нормальной формой* типа A. В типе $tr(A)$ связка $^{\mathrm{R}}$ может встречаться только непосредственно у примитивных типов.

4.4 L-полнота исчисления L^{R} (доказательство)

Докажем теорему 28 от противного. Пусть $\mathrm{L}^{\mathrm{R}} \nvdash F_0 \to G_0$. Необходимо построить *контрмодель* для секвенции $F_0 \to G_0$, т. е. модель, в которой эта секвенция ложна.

Пусть $\mathrm{Pr}' \leftrightharpoons \mathrm{Pr} \cup \{p^{\mathrm{R}} \mid p \in \mathrm{Pr}\}$ и пусть L' есть исчисление Ламбека с Pr' вместо Pr в качестве множества примитивных типов. Здесь ${}^{\mathrm{R}}$ не является связкой, и p^{R} рассматривается как новый, независимый от p примитивный тип. Очевидно, что если $\mathrm{L}' \vdash F \to G$, то $\mathrm{L}^{\mathrm{R}} \vdash F \to G$.

Положим $F \leftrightharpoons tr(F_0)$, $G \leftrightharpoons tr(G_0)$. Тогда $\mathrm{L}^{\mathrm{R}} \nvdash F \to G$, и, следовательно, $\mathrm{L}' \nvdash F \to G$. Исчисление L' по сути совпадает с L, поэтому в силу теоремы 27 существует структура $\mathcal{M} = \langle \Sigma, w \rangle$ такая, что $w(F) \not\subseteq w(G)$. В $\mathcal{M}$ секвенция $F \to G$ ложна, однако $\mathcal{M}$ не является моделью в смысле расширенной сигнатуры: некоторые из условий $w(p_i^{\mathrm{R}}) = w(p_i)^{\mathrm{R}}$ могут не выполняться.

Обозначим через Φ множество всех подтипов секвенции $F \to G$ (включая сами F и G). Конструкция $\mathcal{M}$ такова (см. [31]), что $w(A) \neq \varnothing$ для любого $A \in \Phi$. Других особых свойств модели $\mathcal{M}$ нам не потребуется.

Определим счётчик $f(A)$, $A \in \Phi$, индукцией по построению типа A: $f(p_i) \leftrightharpoons 1$, $f(p_i^{\mathrm{R}}) \leftrightharpoons 1$, $f(A \cdot B) \leftrightharpoons f(A) + f(B) + 10$, $f(A \setminus B) \leftrightharpoons f(B)$, $f(B \mathbin{/} A) \leftrightharpoons f(B)$. Пусть $K \leftrightharpoons \max\{f(A) \mid A \in \Phi\}$ и $N \leftrightharpoons 2K + 25$ (N выбирается нечётным, бóльшим K и достаточно большúм само по себе).

Положим $\Sigma_1 \leftrightharpoons \Sigma \times \{1, \ldots, N\}$. Пару $\langle a, j \rangle \in \Sigma_1$ будем обозначать $a^{(j)}$. Элементы Σ и Σ_1 условимся называть *буквами* и *символами* соответственно. Символ будем называть *чётным* или *нечётным* в зависимости от чётности его верхнего индекса.

Рассмотрим гомоморфизм $h \colon \Sigma^+ \to \Sigma_1^+$, определяемый следующим образом: $h(a) \leftrightharpoons a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(N)}$ $(a \in \Sigma)$, $h(a_1 \ldots a_n) \leftrightharpoons h(a_1) \ldots h(a_n)$. Положим $P \leftrightharpoons h(\Sigma^+) = \{a_1^{(1)} \ldots a_1^{(N)} \ldots a_n^{(1)} \ldots a_n^{(N)} \mid n \geqslant 1, a_i \in \Sigma\}$. Отображение h является взаимно-однозначным соответствием между Σ^+ и P.

Лемма 4.4. *Для любых $M, N \subseteq \Sigma^+$ имеют место соотношения:*

1. $h(M \cdot N) = h(M) \cdot h(N)$;
2. *если* $M \neq \varnothing$, *то* $h(M \setminus N) = h(M) \setminus h(N)$ *и* $h(N \,/\, M) = h(N) \,/\, h(M)$.

Доказательство.

1. По определению гомоморфизма.
2. $\boxed{\subseteq}$ Пусть $u \in h(M \setminus N)$. Тогда $u = h(u')$ для некоторого $u' \in M \setminus N$. Для всех $v' \in M$ имеем $v'u' \in N$. Возьмём произвольное $v \in h(M)$, $v = h(v')$ для некоторого $v' \in M$. Поскольку $u' \in M \setminus N$, $v'u' \in N$, следовательно, $vu = h(v')h(u') = h(v'u') \in h(N)$. Значит, $u \in h(M) \setminus h(N)$.

   $\boxed{\supseteq}$ Пусть $u \in h(M) \setminus h(N)$. Сначала покажем, что $u \in P$. Предположим противное: $u \notin P$. Возьмём $v' \in M$ (множество M непусто по условию). Поскольку $v = h(v') \in P$, $vu \notin P$. С другой стороны, $vu \in h(N) \subseteq P$, что приводит нас к противоречию.

   Поскольку $u \in P$, $u = h(u')$ для некоторого $u' \in \Sigma^+$. Для произвольного $v' \in M$ и $v \leftrightharpoons h(v')$ имеем $h(v'u') = vu \in h(N)$, откуда $v'u' \in N$. Следовательно, $u' \in M \setminus N$. Значит, $u = h(u') \in h(M \setminus N)$.

   Случай / рассматривается аналогичным образом.

$\square$

Построим новую модель $\mathcal{M}_1 = \langle \Sigma_1, w_1 \rangle$, где $w_1(z) \leftrightharpoons h(w(z))$ ($z \in \mathrm{Pr}'$). В силу леммы 4.4 $w_1(A) = h(w(A))$ для всех $A \in \Phi$, поэтому $w_1(F) = h(w(F)) \not\subseteq h(w(G)) = w_1(G)$ (иначе говоря, $\mathcal{M}_1$, как и $\mathcal{M}$ является контрмоделью для секвенции $F \to G$ в сигнатуре без связки $^{\mathrm{R}}$).

Пример 4.1. Рассмотрим для примера невыводимую в L' (и, следовательно, в L^{R}) секвенцию $(p \,/\, p^{\mathrm{R}}) \cdot p \to p^{\mathrm{R}}$. В данном случае $\Phi = \{p, p^{\mathrm{R}}, p \,/\, p^{\mathrm{R}}, (p \,/\, p^{\mathrm{R}}) \cdot p\}$. Пусть контрмодель $\mathcal{M} = \langle \Sigma, w \rangle$ такова, что

$w(p) = \{ba\}$, $w(p^{\mathrm{R}}) = \{a\}$ $(\Sigma = \{a, b\})$. Тогда $w(p\,/\,p^{\mathrm{R}}) = \{ba\}/\{a\} = \{b\}$, $w((p\,/\,p^{\mathrm{R}})\cdot p) = \{b\}\cdot\{ba\} = \{bba\}$; действительно, $\{bba\} \not\subseteq \{a\}$, т. е. в модели $\mathcal{M}$ секвенция ложна. Разумеется, конструкция из [31] даст другую контрмодель, но, как отмечалось выше, для нас это несущественно, поскольку и в приведённой здесь модели интерпретации всех типов из Φ непусты.

Вычислим N. Имеем $f(p) = f(p^{\mathrm{R}}) = 1$, $f(p\,/\,p^{\mathrm{R}}) = f(p) = 1$, $f((p\,/\,p^{\mathrm{R}}) \cdot p) = f(p\,/\,p^{\mathrm{R}}) + f(p) + 10 = 12$. Следовательно, $K = 12$, $N = 49$.

Модель $\mathcal{M}_1 = \langle \Sigma_1, w_1 \rangle$ будет устроена следующим образом: $\Sigma_1 = \{a^{(1)}, \ldots, a^{(49)}, b^{(1)}, \ldots, b^{(49)}\}$, $w_1(p) = \{b^{(1)} \ldots b^{(49)} a^{(1)} \ldots a^{(49)}\}$, $w_1(p^{\mathrm{R}}) = \{a^{(1)} \ldots a^{(49)}\}$. Модель $\mathcal{M}_1$ также опровергает рассматриваемую секвенцию, однако не удовлетворяет условию $w_1(p^{\mathrm{R}}) = w_1(p)^{\mathrm{R}}$.

Введём в рассмотрение несколько дополнительных подмножеств Σ_1^+. Через $\mathrm{Subw}(M)$ обозначим множество всех непустых подслов слов из M, т. е. $\mathrm{Subw}(M) \leftrightharpoons \{u \in \Sigma_1^+ \mid (\exists v_1, v_2 \in \Sigma_1^*)\, v_1 u v_2 \in M\}$. Положим
$T_1 \leftrightharpoons \{u \in \Sigma_1^+ \mid u \notin \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})\}$;
$T_2 \leftrightharpoons \{u \in \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}}) \mid$ первый или последний символ слова u чётен$\}$;
$E \leftrightharpoons \{u \in \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}}) - (P \cup P^{\mathrm{R}}) \mid$ первый и последний символы слова u нечётны$\}$.

Множество Σ_1^+ разбито на пять непересекающихся подмножеств P, P^{R}, T_1, T_2 и E. Например, $a^{(1)} b^{(10)} a^{(2)} \in T_1$, $a^{(N)} b^{(1)} \ldots b^{(N-1)} \in T_2$, $a^{(7)} a^{(6)} a^{(5)} \in E$ $(a, b \in \Sigma)$.

Положим $T \leftrightharpoons T_1 \cup T_2$, $T_i(k) \leftrightharpoons \{u \in T_i \mid |u| \geqslant k\}$ $(i = 1, 2$, через $|u|$ обозначена длина слова $u)$, $T(k) \leftrightharpoons T_1(k) \cup T_2(k) = \{u \in T \mid |u| \geqslant k\}$.

Заметим, что если первый или последний символы слова u чётен, то это слово лежит в T независимо от того, лежит ли оно в $\mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$.

Буква k (возможно, с нижними индексами) далее будет обозначать натуральное число от 1 до K. Для всех таких k имеем $T(k) \supseteq T(K)$.

Лемма 4.5. *Рассматриваемые множества обладают следующими свойствами:*

1. $P \cdot P \subseteq P$, $P^{\mathrm{R}} \cdot P^{\mathrm{R}} \subseteq P^{\mathrm{R}}$;
2. $T^{\mathrm{R}} = T$, $T(k)^{\mathrm{R}} = T(k)$;
3. $P \cdot P^{\mathrm{R}} \subseteq T(K)$, $P^{\mathrm{R}} \cdot P \subseteq T(K)$;
4. $P \cdot T \subseteq T(K)$, $T \cdot P \subseteq T(K)$;
5. $P^{\mathrm{R}} \cdot T \subseteq T(K)$, $T \cdot P^{\mathrm{R}} \subseteq T(K)$;
6. $T \cdot T \subseteq T$;

Доказательство.

1. Очевидно.
2. Непосредственно следует из определения.
3. Любой элемент $P \cdot P^{\mathrm{R}}$ или $P^{\mathrm{R}} \cdot P$ не принадлежит множеству $\mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$ и имеет длину хотя бы $2N > K$. Следовательно, он принадлежит $T_1(K) \subseteq T(K)$.
4. Пусть $u \in P$ и $v \in T$. Если $v \in T_1$, то uv также лежит в T_1. Пусть $v \in T_2$. Если последний символ v чётен, то $uv \in T$. В противном случае чётен первый символ v, поэтому $uv \notin \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$, следовательно, $uv \in T_1 \subseteq T$. Поскольку $|uv| > |u| \geqslant N > K$, получаем, что $uv \in T(K)$.

   Утверждение $T \cdot P \subseteq T$ доказывается симметричным образом.
5. $P^{\mathrm{R}} \cdot T = P^{\mathrm{R}} \cdot T^{\mathrm{R}} = (T \cdot P)^{\mathrm{R}} \subseteq T(K)^{\mathrm{R}} = T(K)^{\mathrm{R}}$; $T \cdot P^{\mathrm{R}} = T^{\mathrm{R}} \cdot P^{\mathrm{R}} = (P \cdot T)^{\mathrm{R}} \subseteq T(K)^{\mathrm{R}} = T(K)$.
6. Пусть $u, v \in T$. Если хотя бы одно из этих двух слов лежит в T_1, то $uv \in T_1$. Пусть $u, v \in T_2$. Если первый символ u или последний символ v чётен, то $uv \in T$. В противном случае последний символ u и первый символ v чётны, и в слове uv встречаются два чётных символа подряд. Значит, $uv \notin \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$, т. е. $uv \in T_1 \subseteq T$.

$\square$

Назовём слова вида $a^{(i)}a^{(i+1)}a^{(i+2)}$, $a^{(N-1)}a^{(N)}b^{(1)}$ и $a^{(N)}b^{(1)}b^{(2)}$ ($a, b \in \Sigma$, $1 \leqslant i \leqslant N-2$) *допустимыми тройками типа I*, а обращённые допустимые тройки типа I (а именно, слова вида $a^{(i+2)}a^{(i+1)}a^{(i)}$, $b(1)a^{(N)}a^{(N-1)}$ и $b^{(2)}b^{(1)}a^{(N)}$) *допустимыми тройками типа II.* Допустимые тройки типа I (типа II) в точности являются возможными трёхбуквенными подсловами слов из P (соответственно, P^{R}).

Лемма 4.6. *Пусть* $|u| \geqslant 3$. *Тогда* $u \in \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$ *в том и только в том случае, когда все трёхбуквенные подслова́ сло́ва* u *являются допустимыми тройками типа I или II.*

Доказательство. Нетривиальна импликация справа налево. Рассуждаем индукцией по длине слова u. База индукции ($|u| = 3$) очевидна. Пусть теперь u — слово длины $m+1$, удовлетворяющее условию и пусть $x \in \Sigma_1$ — последний его символ ($u = u'x$). По индуктивному предположению $u' \in \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$. Пусть $u' \in \mathrm{Subw}(P)$ (второй случай симметричен), иначе говоря, u' является подсловом некоторого слова $v \in P$. Рассмотрим три последних символа u. Поскольку первые два из них принадлежат также u' и, следовательно, v, это трёхсимвольное слово является допустимой тройкой типа I, а не типа II. Если она имеет вид $a^{(i)}a^{(i+1)}a^{(i+2)}$) или $a^{(N)}b^{(1)}b^{(2)}$, то x совпадает с символом, следующим за вхождением u' в v, следовательно, слово $u = u'x$ также является подсловом v. Если же эта тройка имеет вид $a^{(N-1)}a^{(N)}b^{(1)}$, то, представив слово v в виде $v_1u'v_2$, мы видим, что $v'u$ также лежит в P, и слово $v_1u'b^{(1)}b^{(2)}\dots b^{(N)} \in P$ содержит слово $u = u'b^{(1)}$ в качестве подслова. Итак, во всех случаях $u \in \mathrm{Subw}(P)$. Индуктивный переход обоснован. □

Построим ещё одну модель — $\mathcal{M}_2 = \langle \Sigma_1, w_2 \rangle$, где $w_2(p_i) \leftrightharpoons w_1(p_i) \cup w_1(p_i^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}} \cup T$, $w_2(p_i^{\mathrm{R}}) \leftrightharpoons w_1(p_i)^{\mathrm{R}} \cup w_1(p_i^{\mathrm{R}}) \cup T$. Эта модель, в отличие от $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_1$, удовлетворяет условиям $w_2(A^{\mathrm{R}}) \leftrightharpoons w_2(A)^{\mathrm{R}}$, т. е. является L-моделью в смысле расширенной сигнатуры. Для завершения доказательства теоремы 28 достаточно показать, что $\mathcal{M}_2 \not\models F \to G$.

Лемма 4.7. *Для любого* $A \in \Phi$ *верны следующие утверждения:*

1. $w_2(A) \subseteq P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T$;

2. $w_2(A) \supseteq T(f(A))$*;*

3. $w_2(A) \cap P = w_1(A)$ *(в частности,* $w_2(A) \cap P \neq \varnothing$*);*

4. $w_2(A) \cap P^{\mathrm{R}} = w_1(tr(A^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}}$ *(в частности,* $w_2(A) \cap P^{\mathrm{R}} \neq \varnothing$*).*

Пример 4.2. Продолжим пример 4.1. Модель $\mathcal{M}_2 = \langle \Sigma_1, w_2 \rangle$ задаётся соотношением $w_2(p) = \{b^{(1)} \dots b^{(49)} a^{(1)} \dots a^{(49)}, a^{(49)} \dots a^{(1)}\} \cup T$. Соответственно, $w_2(p^{\mathrm{R}}) = w_2(p)^{\mathrm{R}} = \{a^{(49)} \dots a^{(1)} b^{(49)} \dots b^{(1)}\} \cup T$ (модель $\mathcal{M}_2$ является моделью в смысле расширенной сигнатуры). Кроме того, $b^{(1)} \dots b^{(49)} \in w_2(p \,/\, p^{\mathrm{R}})$ и $b^{(1)} \dots b^{(49)} b^{(1)} \dots b^{(49)} a^{(1)} \dots a^{(49)} \in w_2((p \,/\, p^{\mathrm{R}}) \cdot p)$, однако это слово не лежит в $w_2(p^{\mathrm{R}})$. Следовательно, $\mathcal{M}_2 \not\models (p \,/\, p^{\mathrm{R}}) \cdot p \to p^{\mathrm{R}}$, т. е. $\mathcal{M}_2$ является искомой контрмоделью.

Доказательство леммы 4.7. Будем доказывать эти четыре утверждения совместной индукцией по построению типа A. База индукции тривиальна. В дальнейшем мы будем обозначать i-е утверждение из предположения индукции через «ИП-i».

1. Рассмотрим три случая:

а) $A = B \cdot C$. Тогда $w_2(A) = w_2(B) \cdot w_2(C) \subseteq (P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T) \cdot (P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T) \subseteq P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T$ (лемма 4.5).

б) $A = B \setminus C$. Предположим противное: в $w_2(A)$ есть элемент $u \in E$. Тогда $vu \in w_2(C)$ для любого $v \in w_2(C)$. Рассмотрим несколько подслучаев, и в каждом из них получим противоречие.

i) $u \in \mathrm{Subw}(P)$, причём верхний индекс первого символа слова u не равен 1. Пусть первый символ u есть $a^{(i)}$. Заметим, что i нечётно. Возьмём $v = a^{(3)} \dots a^{(N)} a^{(1)} \dots a^{(i-1)}$. Длина слова v не меньше $N \geqslant K$, и слово v оканчивается нечётным символом. Следовательно, $v \in T(K) \subseteq T(f(B)) \subseteq w_2(B)$ (ИП-2). С другой стороны, $vu \in \mathrm{Subw}(P)$, и первый и последний символы vu нечётны. Значит, $vu \in E$ и $vu \in w_2(C)$. Противоречие: $w_2(C) \cap E = \varnothing$ (ИП-1).

ii) $u \in \mathrm{Subw}(P)$, и первый символ слова u есть $a^{(1)}$. Значит, верхний индекс последнего символа u не равен N, потому что иначе $u \in P$. Возьмём произвольное слово $v \in w_2(B) \cap P$ (это множество непусто в силу ИП-3). Первый и последний символы слова vu нечётны, и $vu \in \mathrm{Subw}(P) - P$, следовательно, $vu \in E$. Противоречие.

iii) $u \in \mathrm{Subw}(P^{\mathrm{R}})$, верхний индекс первого символа u не равен N (первый символ u есть $a^{(i)}$, i нечётно). Возьмём $v = a^{(N-2)} \dots a^{(1)} a^{(N)} \dots a^{(i+1)}$. $vu \in E$.

iv) $u \in \mathrm{Subw}(P^{\mathrm{R}})$ и u начинается с $a^{(N)}$. Возьмём $v \in w_2(B) \cap P^{\mathrm{R}}$ (непусто по ИП-4). $vu \in E$.

в) $A = C \,/\, B$. Симметрично.

2. Рассмотрим три случая.

а) $A = B \cdot C$. Пусть $k_1 \leftrightharpoons f(B)$, $k_2 \leftrightharpoons f(C)$, $k \leftrightharpoons k_1 + k_2 + 10 = f(A)$. По ИП-2 $w_2(B) \supseteq T(k_1)$, $w_2(C) \supseteq T(k_2)$. Возьмём $u \in T(k)$. Докажем, что $u \in w_2(A)$. Рассмотрим несколько подслучаев.

i) $u \in T_1(k)$. По лемме 4.6 ($|u| \geqslant k > 3$ и $u \notin \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$) в u есть трёхсимвольное подслово xyz, не являющееся допустимой тройкой типа I или II. Разделим слово u на две части, $u = u_1 u_2$, таким образом, что $|u_1| \geqslant k_1 + 5$ и $|u_2| \geqslant k_2 + 5$. При необходимости сдвинем границу между частями u_1 и u_2 на один символ влево или вправо, чтобы подслово xyz оказалось целиком в одной из частей (после этого $|u_1| \geqslant k_1 + 4$, $|u_2| \geqslant k_2 + 4$). Пусть это будет часть u_2 (другой случай рассматривается симметричным образом). Тогда $u_2 \in T_1(k_2)$. Если u_1 также лежит в T_1, доказательство на этом заканчивается. Рассмотрим другой случай: $u_1 \in \mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$. Заметим, что среди любых трёх подряд идущих символов слова из $\mathrm{Subw}(P \cup P^{\mathrm{R}})$ есть хотя бы один чётный. Сдвинем границу частей u_1 и u_2 влево на 0, 1 или 2 символа так, чтобы последний символ u_1 оказался чётным. После этого слово u_2 останется в $T_1(k_2)$ (оно не укоротится и по-прежнему содержит подслово xyz), а слово u_1 окажется в $T(k_1)$, потому что его последний символ чётен. Значит, $u = u_1 u_2 \in T(k_1) \cdot T(k_2) \subseteq w_2(B) \cdot w_2(C) = w_2(A)$.

ii) $u \in T_2(k)$. Пусть u оканчивается чётным символом (второй случай симметричен). Разделим u на две части, $u = u_1 u_2$, $u_1 \geqslant k_1 + 5$,

$u_2 \geqslant k_2 + 5$, и сдвинем границу так, чтобы u_1 заканчивалось чётным символом. Тогда оба слова u_1 и u_2 оканчиваются чётными символами, поэтому $u_1 \in T(k_1)$ и $u_2 \in T(k_2)$. Значит, $u = u_1 u_2 \in T(k_1) \cdot T(k_2) \subseteq w_2(B) \cdot w_2(C) = w_2(A)$.

б) $A = B \setminus C$. Пусть $k \leftrightharpoons f(C) = f(A)$. В силу ИП-2 $w_2(C) \supseteq T(k)$. Возьмём $u \in T(k)$ и произвольное $v \in w_2(B) \subseteq P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T$. Имеем $vu \in (P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T) \cdot T \subseteq T$ (лемма 4.5), а поскольку $|vu| > |u| \geqslant k$, $vu \in T(k) \subseteq w_2(C)$. Значит, $u \in w_2(A)$.

в) $A = C \,/\, B$. Симметрично.

3. Рассмотрим три случая.

а) $A = B \cdot C$.

$\boxed{\supseteq}$ $u \in w_1(A) = w_1(B) \cdot w_1(C) \subseteq w_2(B) \cdot w_2(C) = w_2(A)$ (ИП-3); $u \in P$.

$\boxed{\subseteq}$ Пусть $u \in P$, $u \in w_2(A) = w_2(B) \cdot w_2(C)$. Тогда $u = u_1 u_2$, где $u_1 \in w_2(B)$, $u_2 \in w_2(C)$. Сначала докажем, что $u_1 \in P$. Предположим противное: $u_1 \notin P$. Тогда $u_1 \in P^{\mathrm{R}} \cup T$ (ИП-1), $u_2 \in P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T$, откуда $u = u_1 u_2 \in (P^{\mathrm{R}} \cup T) \cdot (P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T) \subseteq P^{\mathrm{R}} \cup T$ (лемма 4.5). Противоречие ($u \in P$). Значит, $u_1 \in P$, а потому и $u_2 \in P$, и по ИП-3 получаем, что $u_1 \in w_1(B)$, $u_2 \in w_1(C)$, откуда $u = u_1 u_2 \in w_1(A)$.

б) $A = B \setminus C$.

$\boxed{\supseteq}$ Пусть $u \in w_1(B \setminus C)$. Значит, для любого $v \in w_1(B)$ имеем $vu \in w_1(C)$. Покажем, что $u \in w_2(B \setminus C)$. Возьмём $v \in w_2(B) \subseteq P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T$ (ИП-1).

Если $v \in P$, то $v \in w_1(B)$ (ИП-3), поэтому $vu \in w_1(C) \subseteq w_2(C)$.

Если же $v \in P^{\mathrm{R}} \cup T$, то (поскольку $u \in P$) $vu \in (P^{\mathrm{R}} \cup T) \cdot P \subseteq T(K) \subseteq w_2(C)$ (лемма 4.5 и ИП-2).

$\boxed{\subseteq}$ Если $u \in w_2(B \setminus C)$ и $u \in P$, то для любого $v \in w_1(B) \subseteq w_2(B)$ имеем $vu \in w_2(C)$. Поскольку $v, u \in P$, то $vu \in P$, откуда $vu \in w_1(C)$ (ИП-3). Значит, $u \in w_1(B \setminus C)$.

в) $A = C \,/\, B$. Симметрично.

4. Рассмотрим три случая:

а) $A = B \cdot C$. Тогда $tr(A^{\mathrm{R}}) = tr(C^{\mathrm{R}}) \cdot tr(B^{\mathrm{R}})$.

$\boxed{\supseteq}$ $u \in w_1(tr(A^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}} = w_1(tr(C^{\mathrm{R}}) \cdot tr(B^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}} = \bigl(w_1(tr(C^{\mathrm{R}})) \cdot w_1(tr(B^{\mathrm{R}}))\bigr)^{\mathrm{R}} = w_1(tr(B^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}} \cdot w_1(tr(C^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}} \subseteq w_2(B) \cdot w_2(C) = w_2(A)$ (ИП-4); $u \in P^{\mathrm{R}}$.

$\boxed{\subseteq}$ Пусть $u \in P^{\mathrm{R}}$, $u \in w_2(A) = w_2(B) \cdot w_2(C)$. Тогда $u = u_1 u_2$, где $u_1 \in w_2(B)$, $u_2 \in w_2(C)$. Докажем, что $u_1 \in P^{\mathrm{R}}$. Пусть $u_1 \notin P^{\mathrm{R}}$. Тогда $u_1 \in P \cup T$ (ИП-1), $u_2 \in P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T$, откуда $u = u_1 u_2 \in (P^{\mathrm{R}} \cup T) \cdot (P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T) \subseteq P \cup T$. Противоречие ($u \in P^{\mathrm{R}}$). Значит, $u_1 \in P^{\mathrm{R}}$, а потому и $u_2 \in P^{\mathrm{R}}$, и по ИП-4 получаем, что $u_1 \in w_1(tr(B^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}}$, $u_2 \in w_1(tr(C^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}}$, откуда $u = u_1 u_2 \in w_1(tr(B^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}} \cdot w_1(tr(C^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}} = \bigl(w_1(tr(C^{\mathrm{R}})) \cdot w_1(tr(B^{\mathrm{R}}))\bigr)^{\mathrm{R}} = w_1(tr(C^{\mathrm{R}}) \cdot tr(B^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}} = w_1(tr(A^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}}$.

б) $A = B \setminus C$. Тогда $tr(A^{\mathrm{R}}) = tr(C^{\mathrm{R}}) \,/\, tr(B^{\mathrm{R}})$.

$\boxed{\subseteq}$ Пусть $u \in w_1(tr(C^{\mathrm{R}}) \,/\, tr(B^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}} = w_1(tr(B^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}} \setminus w_1(tr(C^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}}$. Значит, для любого $v \in w_1(tr(B^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}}$ имеем $vu \in w_1(tr(C^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}}$. Покажем, что $u \in w_2(B \setminus C)$. Возьмём $v \in w_2(B) \subseteq P \cup P^{\mathrm{R}} \cup T$ (ИП-1).
Если $v \in P^{\mathrm{R}}$, то $v \in w_1(tr(B^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}}$ (ИП-4), поэтому $vu \in w_1(tr(C^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}} \subseteq w_2(C)$.
Если же $v \in P \cup T$, то (поскольку $u \in P^{\mathrm{R}}$) $vu \in (P \cup T) \cdot P^{\mathrm{R}} \subseteq T(K) \subseteq w_2(C)$ (лемма 4.5 и ИП-2).

$\boxed{\subseteq}$ Если $u \in w_2(B \setminus C)$ и $u \in P^{\mathrm{R}}$, то для любого $v \in w_1(tr(B^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}} \subseteq w_2(B)$ имеем $vu \in w_2(C)$. Поскольку $v, u \in P^{\mathrm{R}}$, то $vu \in P^{\mathrm{R}}$, откуда $vu \in w_1(tr(C^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}}$ (ИП-4). Значит, $u \in w_1(tr(B^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}} \setminus w_1(tr(C^{\mathrm{R}}))^{\mathrm{R}} = w_1(A^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}}$.

в) $A = C \,/\, B$. Симметрично. $\square$

Поскольку $w_1(F) \not\subseteq w_1(G)$, существует такое слово u_0, что $u_0 \in w_1(F)$ и $u_0 \notin w_1(G)$. Кроме того, $u_0 \in P$, поэтому (в силу только что доказанной леммы) $u_0 \in w_2(F)$ и $u_0 \notin w_2(G)$. Следовательно, $w_2(F) \not\subseteq w_2(G)$, т.е. $\mathcal{M}_2 \not\models F \to G$. Поскольку $F_0 \leftrightarrow F$, $G_0 \leftrightarrow G$ и исчисление L^{R} корректно относительно L-моделей, $\mathcal{M}_2 \not\models F_0 \to G_0$. Теорема 28 доказана: $\mathcal{M}_2$ является искомой контрмоделью.

Заметим, что мы построили контрмодель (в смысле расширенной сигнатуры) не только для секвенций, невыводимых в исчислении L^{R}, но и для секвенций в нормальной форме, невыводимых в a priori более слабом исчислении L'. Отсюда получается следующее утверждение:

Предложение 4.8. $\mathrm{L}^{\mathrm{R}} \vdash A_1 \dots A_n \to B$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{L}' \vdash tr(A_1) \dots tr(A_n) \to tr(B)$.

4.5 Исчисление L^{R}: грамматики и сложность

Теорема 29. *Класс L^{R}-языков совпадает с классом контекстно-свободных языков, не содержащих пустого слова.*

Доказательство. Включение класса контекстно-свободных языков без пустого слова в класс L^{R}-языков следует из теоремы 2 и консервативности L^{R} над $\mathrm{L}(\backslash)$.

Обратное включение следует из предложения 4.8: заменив в L^{R}-грамматике все типы C на $tr(C)$, получим грамматику, основанную на исчислении L (точнее говоря, на L', отличающемся от L только обозначениями примитивных типов), задающую тот же язык — и этот язык является контекстно-свободным по теореме 3. □

Фрагменты исчисления L^{R} с ограниченными наборами связок и/или примитивных типов определяются так же, как и для L.

Теорема 30. *Проблемы выводимости в исчислениях $\mathrm{L}^{\mathrm{R}}(\backslash; p_1)$, L^{R}, а также всех промежуточных исчислениях, являющихся фрагментами L^{R} и консервативными расширениями $\mathrm{L}^{\mathrm{R}}(\backslash; p_1)$, NP-полны.*

Доказательство. Принадлежность проблемы выводимости в исчислении L^{R} к классу NP следует из предложения 4.8 и того факта, что проблема выводимости в L лежит в NP.

NP-полнота проблемы выводимости в исчислении $\mathrm{L}^{\mathrm{R}}(\backslash; p_1)$ следует из эквивалентности $B \,/\, A \leftrightarrow_{\mathrm{L}^{\mathrm{R}}} (A^{\mathrm{R}} \setminus B^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}}$, сводящей к выводимости в $\mathrm{L}^{\mathrm{R}}(\backslash; p_1)$ выводимость в $\mathrm{L}(\backslash, /; p_1)$, и NP-полноты проблемы выводимости для последнего (теорема 25). $\square$

Литература

[1] A. V. Aho, R. Sethi, J. D. Ullman. Compilers: principles, techniques and tools. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1985.

Русский перевод: А. В. Ахо, Р. Сети, Дж. Д. Ульман. Компиляторы: принципы, технологии, инструменты. — М.: «Вильямс», 2003.

[2] Y. Bar-Hillel, C. Gaifman, E. Shamir. On the categorial and phrase-structure grammars. *Bulletin of the Research Council of Israel, Section F.* **9F**, 1960. — P. 1–16.

[3] W. Buszkowski. Compatibility of a categorial grammar with an associated category system. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik.* **28**, 1982. — P. 229–238.

[4] W. Buszkowski. Some decision problems in the theory of syntactic categories. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik.* **28**, 1982. — P. 539–548.

[5] W. Buszkowski. The equivalence of unidirectional Lambek categorial grammars and context-free grammars. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik.* **31**, 1985. — P. 369–384.

[6] B. Carpenter. Type-logical semantics. — Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1997.

[7] N. Chomsky. Three models for the description of language. *IRE Transactions on Information Theory.* **I T-2**, No. 3, 1956. — P. 113–124.

Русский перевод: Н. Хомский. Три модели описания языка. *Кибернетический сборник*, вып. 2. — М.: ИЛ, 1961. — С. 237—266.

[8] M. Dekhtyar, A. Dikovsky. Generalized categorial dependency grammars. *Trakhtenbrot/Festschrift,* ed. by A. Avron et al. *Lecture*

Notes in Computer Science, Vol. **4800**. Berlin etc.: Springer, 2008. — P. 230–255.

[9] T. A. D. Fowler. A polynomial time algorithm for parsing with the bounded order Lambek grammars. *The Mathematics of Language: proceedings of the 10-th and 11-th Biennial Conference, MOL 2010 and MOL 2011,* ed. by Ch. Ebert, G. Jäger and J. Michaelis. *Lecture Notes in Computer Science,* Vol. **6149**. Berlin etc.: Springer, 2009. — P. 36–43.

[10] T. A. D. Fowler. Parsing CCGBank with the Lambek calculus. *Parsing with Categorial Grammar Workshop, ESSLLI 2009.* Bordeaux, 2009. — P. 38–42.

[11] J.-Y. Girard. Linear Logic. *Theoretical Computer Science,* **50**, No. 1, 1987. — P. 1–102.

[12] Ph. de Groote. A dynamic programming approach to categorial deduction. *Proceedings of the 16th International Conference on Automated Deduction,* ed. by H. Ganzinger. *Lecture Notes in Artificial Intelligence,* Vol. **1632**. Berlin etc.: Springer, 1999. — P. 1–15.

[13] H. Hendriks. Studied flexibility. *ILLC Dissertation Series,* DS-1993-05, Amsterdam, 1993.

[14] G. Jäger. On the generative capacity of multi-modal categorial grammars. *Research on Language and Computation,* **1**, No. 1–2, 2003. — P. 105–125.

[15] M. Kanazawa. The Lambek calculus enriched with additional connectives. *Journal of Logic, Language and Information,* **1**, 1992. — P. 141–171.

[16] J. Lambek. The mathematics of sentence structure. *American Mathematical Monthly.* **65**, No. 3, 1958. — P. 154–170.

Русский перевод: И. Ламбек. Математической исследование структуры предложений. *Математическая лингвистика:* сборник переводов, под ред. Ю. А. Шрейдера и др. — М.: Мир, 1964. — С. 47—68.

[17] J. Lambek. Deductive systems and categories II: Standard constructions and closed categories. *Category Theory, Homology Theory and Their Applications I,* ed. by P. Hilton. *Lecture Notes in Mathematics,* Vol. **86**. Berlin: Springer, 1969. — P. 76–122.

[18] J. Lambek. From categorial grammar to bilinear logic. *Substructural Logics,* ed. by K. Došen and P. Schroeder-Heister. *Studies in Logic and Computation*, Vol. **2**. Oxford: Clarendon Press, 1993. — P. 128–139.

[19] F. Métayer. Polynomial equivalence among systems LLNC, LLNC_a and LLNC_0. *Theoretical Computer Science.* **227**, No. 1, 1999. — P. 221–229.

[20] M. Moortgat. Multimodal linguistic inference. *Journal of Logic, Language and Information,* **5**, No. 3–4, 1996. — P. 349–385.

[21] M. Moortgat. Categorial type logic. *Handbook of Logic and Language,* ed. by J. van Benthem and A. ter Meulen. Elsevier, 1997.

[22] G. Morrill. Categorial grammar: logical syntax, semantics and processing. Oxford: Oxford University Press, 2011.

[23] M. Pentus. Equivalent types in Lambek calculus and linear logic. *Серия математическая логика и теоретическая информатика,* № 2 (препринт). Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, отдел математической логики. М., 1992. — 21 с.

[24] M. Pentus. Free monoid completeness of the Lambek calculus allowing empty premises. *Proceedings of Logic Colloquium '96,* ed. by J. M. Larrazabal, D. Lascar and G. Mints. *Lecture Notes in Logic,* Vol. **12**. Berlin etc.: Springer, 1998. — P. 171–209.

[25] M. Pentus. Lambek calculus is NP-complete. *Theoretical Computer Science,* **357**, No. 1–3, 2006. — P. 186–201.

[26] M. Pentus. A polynomial-time algorithm for Lambek grammars of bounded order. *Linguistic Analysis.* **36**, No. 1–4, 2010. — P. 441–471.

[27] M. Pentus. Complexity of the Lambek calculus and its fragments. *Advances in Modal Logic,* Vol. **8**, ed. by L. Beklemishev, V. Goranko and V. Shehtman. — London: College Publications, 2010. — P. 310–329.

[28] D. N. Yetter. Quantales and noncommutative linear logic. *Journal of Symbolic Logic,* **55**, No. 1, 1990. — P. 41–64.

[29] В. А. Минина. Полнота синтаксического исчисления Ламбека с операцией инволюции. Дипломная работа, кафедра математической логики и теории алгоритмов МГУ им. Ломоносова. — М., 2001. — 13 с.

[30] М. Р. Пентус. Исчисление Ламбека и формальные грамматики. *Фундаментальная и прикладная математика.* Том 1, № 3, 1995. — С. 729—751.

[31] М. Р. Пентус. Полнота синтаксического исчисления Ламбека. *Фундаментальная и прикладная математика.* Том 5, № 1, 1999. — С. 193—219.

[32] Ю. В. Саватеев. Алгоритмическая сложность фрагментов исчисления Ламбека. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, специальность 01.01.06, защищена 11.12.2009. — М., 2009. — 75 с.

[33] А. Н. Сафиуллин. Выводимость допустимых правил с простыми посылками в исчислении Ламбека. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика.* № 4, 2007. — С. 73—77.

Работы автора по теме диссертации

[34] С. Л. Кузнецов. Об исчислении Ламбека с одним делением и одним примитивным типом, допускающем пустые антецеденты. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика.* № 2, 2009. — С. 62—65.

[35] S. Kuznetsov. Lambek grammars with one division and one primitive type. *Logic Journal of the IGPL.* **20**, No. 1, 2011. — P. 207–221.

[36] С. Л. Кузнецов. Об исчислении Ламбека с единицей и одним делением. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика.* № 4, 2011. — С. 58—61.

[37] С. Л. Кузнецов. Исчисление Ламбека с операцией обращения. Деп. в ВИНИТИ 17.04.2012, № 152-В2012. — 17 с.