[3] Хайкович И. М., Халфин Л. А. Об эффективных динамических параметрах упругих сред при распространении плоской поперечной поляризованной волны// Изв. АН СССР.— Сер. геофиз.— 1959, № 6.— С. 815—826.
[4] De Rujula A., Glashow S. L., Wilson R. R., Charpak G. Neutrino exploration of the Earth.//Phys. Reports.— 1983.— V. 99.— P. 342.
[5] Khalfin L. A. A new (old) approach to the homogenezation problem//Abstracts of reports on XVI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics.— August 1984.— Denmark.

5 марта 1986 г., первое заседание

1. С. П. Новиков, М. А. Шубин «Теория Морса и неймановские инварианты неодносвязных многообразий».

Вещественные числа Бетти $\bar{b}_p(X)$ впервые введены Атьей [1] для компактного неодносвязного n-мерного многообразия X через L^2-когомологии его универсального накрытия M. Более общие числа $\bar{b}_p^\chi$ определены Зингером [2] для любого представления $\chi\colon \pi_1(X) \to \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана с конечным нормированным следом (числа Атьи $\bar{b}_p$ соответствуют регулярному представлению группы $\Gamma = \pi_1(X)$ в $l^2(\Gamma)$). Можно показать [3], что в классических неравенствах Морса на X вместо обычных чисел Бетти можно поставить числа $\bar{b}_p^\chi$ при любом χ. Получающиеся неймановские неравенства Морса в некоторых случаях сильнее классических. Иногда они позволяют установить нетривиальность L^2-когомологий накрытий неодносвязных многообразий.

В работах [4], [5] установлено, что если $M = H^n$ (пространство Лобачевского) или если M — строго псевдовыпуклая область с метрикой Бергмана, то $\bar{b}_p(X) = 0$ при $p \neq n/2$. В случае, когда спектры лапласианов Δ_p на p-формах на M отделены от 0, определен неймановский аналог кручения Рэя — Зингера $\bar{R}$.

Факт примыкания спектра Δ_p к 0 не зависит от метрики на X. При $p = 0$ такое примыкание имеет место тогда и только тогда, когда Γ аменабельна [6]. Для $M = H^{2k+1}$ спектр Δ_p примыкает к 0 при $p = k$ и $p = k + 1$ (см. [4]). Не зависит от метрики на X и показатель степенного убывания при $t \to +\infty$ для $\theta_p(t) = \mathrm{Tr}_\Gamma \exp(-t\Delta_p)$ или показатель степени в степенной асимптотике при $\lambda \to +0$ для плотности состояний $N_p(\lambda) = \mathrm{Tr}_\Gamma E_\lambda(\Delta_p)$, где $E_\lambda(\Delta_p)$ — спектральный проектор оператора Δ_p, а след Tr_Γ определяется согласно [1] интегрированием диагонали ядра по фундаментальной области. Точнее, с помощью вариационного принципа, аналогичного [7], доказывается

Теорема. *Если N_p, θ_p и N'_p, θ'_p соответствуют разным метрикам g и g' на X, то*

$$N_p(C^{-1}\lambda) \leqslant N'_p(\lambda) \leqslant N_p(C\lambda), \qquad C^{-1}\theta_p(Ct) \leqslant \theta'_p(t) \leqslant C\theta_p(C^{-1}t).$$

Если $\theta_p(t) = o(t^{-\varepsilon_p})$ при $t \to +\infty$, где $\varepsilon_p > 0$ при всех $p = 0, 1, \ldots, n$, то определено кручение $\bar{R}$.

Гипотеза. *Оценки $\theta_p(t) = o(t^{-\varepsilon_p})$, $\varepsilon_p > 0$, верны всегда, если $\bar{b}_p = 0$.*

При $M = H^3$ имеем $\theta_1(t) \sim ct^{-1/2}$ (см.[8]), что позволяет определить $\bar{R}$ для трехмерных многообразий отрицательной кривизны. Однако, как сообщил С. М. Вишик, в этом случае $\bar{R} = 0$. По-видимому, нетривиальное неймановское кручение может возникнуть при использовании представлений, отличных от регулярного.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Atiyah M. F. Elliptic operators, discrete groups and von Neuman algebras//Astérisque. —1976. — V. 32—33. — P. 43—72.
[2] Singer I. M. Some remarks on operator theory and index theory//Lect. Notes Math., 1977. — V. 575. — P. 128—137.

[3] Новиков С. П., Шубин М. А. Неравенства Морса и алгебры фон Неймана// УМН. — 1986. —Т. 41, Вып. 4.
[4] Donnelly H. The differential form spectrum of hyperbolic space//Manuscripta Math. — 1980—1981. — V. 33, № 3/4. — P. 365—385.
[5] Donnelly H., Fefferman Ch. L^2-cohomology and index theorem for the Bergman metric//Ann. Math. — 1983. — V. 118, № 3. — P. 593—618.
[6] Brooks R. The fundamental group and the spectrum of the Laplacian.//Comm. Math. Helv. — 1981. — V. 56. — P. 581—598.
[7] Богородская Т. Е., Шубин М. А. Вариационный принцип для плотности состояний случайных псевдодифференциальных операторов и его приложения// Функцион. анализ и его прил. — 1983. — Т. 17, вып. 2. — С. 66—67.
[8] Вишик С. М. Некоторые аналоги ζ-функции Сельберга//Функцион. анализ и его прил. — 1975. — Т. 9, вып. 3. — с. 85—86.

5 марта 1986 г., второе заседание

Заседание проводилось совместно с Московским математическим обществом.

1. Ж. Л. Лионс (Франция, Париж) «Точная управляемость в распределенных системах: замечания об общей теории и приложениях».

1°. Введение: слабая и сильная управляемость. Рассмотрим сначала формально систему, *состояния* которой $y = y(t; v) = y(v)$ описываются решениями уравнения

$$y'' + Ay = 0 \text{ в цилиндре } \Omega \times]0, T[, \tag{1.1}$$

где $y'' = \partial^2 y/\partial t^2$, A — неограниченный симметрический оператор в соответствующем гильбертовом пространстве. (Все рассматриваемые гильбертовы пространства считаются действительными, хотя это и не очень существенно для наших задач.) *Начальные условия* имеют вид

$$y(0) = y(0; v) = y^0, \quad y'(0) = y'(0; v) = y^1, \tag{1.2}$$

где $\{y^0, y^1\}$ — заданный элемент некоторого гильбертова пространства G; управление *сосредоточено на границе* Γ области Ω:

$$By = v \text{ на } \Gamma \times]0, T[= \Sigma_T. \tag{1.3}$$

Граничный оператор B в (1.3) таков, что оператор A при условии $B\varphi = 0$ на Γ является самосопряженным, а соответствующая задача (1.1) — (1.3) *корректна в* G: равенства (1.1) — (1.3) однозначно определяют $y(t; v)$ и функция $t \to \{y(t; v), y'(t,v)\}$ непрерывно отображает $[0, T]$ в G.

Замечание 1.1. Число граничных условий в (1.3) зависит от порядка A. Если A — оператор второго порядка (гиперболический случай), то задается *одно* условие; ниже мы рассмотрим простейшие возможности: $By = y$ (управление типа Дирихле) и $By = \partial y/\partial \nu$ (управление типа Неймана; ν — внешняя нормаль к Γ). Если порядок A равен четырем (ситуация, возникающая, например, при управлении гибкими структурами), то (1.3) содержит *два* условия.

Указываемый ниже метод остается в силе, если A состоит из системы скалярных операторов, например является оператором теории упругости. ■

Замечание 1.2. Мы рассматриваем здесь только *граничное управление*. Однако излагаемый метод является общим и может быть применен, например, в случае *точечного управления* (см. Ж. Л. Лионс [4]). ■

Пусть v изменяется в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{U}$.

Говорят, что имеет место *слабая управляемость*, если, когда v пробегает $\mathcal{U}$, соответствующий элемент

$$\{y(T; v) - y(T; 0), \quad y'(T; v) - y'(T; 0)\} \tag{1.4}$$

пробегает множество, плотное в G. ■