

# Волчки и магнитные орбиты

С.П. Новиков

Целый ряд направлений были начаты мной и моими учениками в 1981–82 годах после работ [1,2]. Это направление — свойства замкнутых орбит в сфере  $S^2$  и группах  $S^3$  и  $SO_3$  было, однако, развито недостаточно. В данной статье мы ставим своей целью возродить обсуждение этих вопросов, поставить нерешённые задачи и прояснить то, что считалось ошибочным в старых работах. Магнитные орбиты вообще в литературе обсуждались слабо. Это относится к литературе по динамическим системам и теор. механике. В теоретической физике, как указал мне Гриневич, похожие ситуации встретились в теории связанной с ускорителями-протонными циклотронами и др. Интересно посмотреть книгу Ландау-Лифшица [7] главу III, где возникают ситуации математически родственные нашим, но физика совсем другая. Здесь мы имеем реальные сильные магнитные поля.

Около 40 лет назад (в 1981–82 гг.) автор произвёл факторизацию системы Клебша движения твёрдого тела в идеальной несжимаемой жидкости (конфигурационное пространство  $SO_3$  или  $S^3$ ). Автор произвёл факторизацию по интегралу движения, порождающего действие группы  $S^1$ . Мы получаем семейство систем на сфере  $S^2$  в силу главного расслоения

$$SO_3 \rightarrow S^2 \quad \text{или} \quad S^3 \rightarrow S^2$$

со слоем  $S^1$ . На двумерной сфере мы получаем фактор-систему — семейство систем с лагранжианом

$$L_\lambda = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - U(x) + \lambda A_i \dot{x}^i, \quad \lambda \geq 0,$$

где  $A = A_i dx^i$  — это 1-форма на  $S^2 \setminus (\text{point})$  такая, что  $dA$  — это 2-форма на  $S^2$  с положительной плотностью на  $\rho > 0$ ,  $dA = \rho dx dy$ . При этом  $\iint_{S^2} dA = 4\pi$ .

Автор воспользовался принципом Ферма—Мопертюи—Якоби [3], сводящем исследование траекторий (игнорируя параметризацию) к длине, зависящей от энергии  $E$ , обобщённым на включение «магнитного поля»  $dA = \rho dx dy$

$$L_\lambda^E = \sqrt{g_{ij}^E \dot{x}^i \dot{x}^j} - \lambda A_i \dot{x}^i,$$

где  $S^E = \oint_\gamma L_\lambda^E dt$ ,  $g_{ij}^E = g_{ij}(E - U)$ . Мы рассматриваем  $E > \max U(x)$  на сфере  $S^2$ , где метрика  $g_{ij}^E$  определена всюду и строго положительна. Метрика  $g_{ij}$  и потенциал  $U$  зависят от тензора инерции твёрдого тела. Это — отнюдь непостоянная, не обязательно выпуклая метрика (см. [1], [2], [3]).

После моего доклада на семинаре по теоремеханике в МГУ (Румянцев) Козлов [6] указал мне, что при  $\lambda = 0$  он и Харламов произвели

эту редукцию, но случая  $\lambda > 0$  не рассматривали, будучи не готовы к встрече с магнитным полем, да ещё монополя Дирака (неквантованного) который у меня возник. Козлов указал также, что аналогичная редукция годится и для волчка в постоянном гравитационном поле. Эта система для приложений даже более интересна. Всё также, но метрика  $g_{ij}$ , потенциал  $U$  и «магнитное поле»  $dA$  другие. Их свойства такие же — «магнитное поле» положительно.

При  $\lambda = 0$  мы имеем ситуацию проблемы Пуанкаре о 3-х несамопересекающихся замкнутых геодезических любой метрики на  $S^2$ , решённой Люстерником—Шнирельманом в 1930 году. Подробное написание этих результатов сильно задержалось (до 90 года [7]) после смерти Шнирельмана в 1937 году. Все их идеи были правильны. Около 90 года появилось и второе (аналитическое) доказательство, где градиентный спуск функционала длины был поправлен и стал корректен в классе несамопересекающихся замкнутых кривых из-за добавленного члена, препятствующего самопересечению. Автор этой работы (Грейсон) — это любопытно — указывал, что эту идею дал ему Ричард Гамильтон (применивший её позднее к трёхмерной проблеме Пуанкаре, завершённой Перельманом около 2005 года).

Мы с Таймановым получили некоторые результаты о магнитных орбитах без самопересечений в середине 80-х гг. [4, 5]. Вместе с Гриневичем [5] позднее мы исследовали случай 2-тора. В данной работе мы обсудим ещё раз системы на  $SO_3$  и  $S^3$  с интегралом площадей (выше). Возникает двумерная коммутативная группа  $G = S^1 \times \mathbb{R}$ , где компактная часть  $S^1$  действует «вертикально» вдоль слоёв расслоений  $SO_3 \rightarrow S^2$  или  $S^3 \rightarrow S^2$ . Это случай  $\lambda \approx \infty$ , где мы имеем слои как орбиты группы  $S^1$ . На факторпространстве орбиты — точки. Это — «вертикальная» часть группы  $G$ .

Мы обсудим здесь две части:

I. Свойства фактор-системы на  $S^2$ , зависящей от  $\lambda \geq 0$ , предел при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

II. Что добавляется при исследовании системы в  $SO_3$  или  $S^3$ .

**I. Фактор-системы** При  $\lambda = 0$  мы имеем некоторую метрику  $g_{ij}^E$  сферы  $S^2$  и в общем положении  $2n+1$  несамопересекающихся замкнутых экстремали,  $n \geq 1$ .

При изменении  $\lambda \geq 0$  эти экстремали деформируются. Функционал

$L_\lambda^E$  представляет собой разность длины и «магнитной площади»

$$S^E(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{g_{ij}^E \dot{x}^i \dot{x}^j} dt - \lambda \iint_D dA = I_1^E - \lambda I_2^E.$$

Это разность двух положительных чисел. Выбор правильного направления времени этим и определяется.

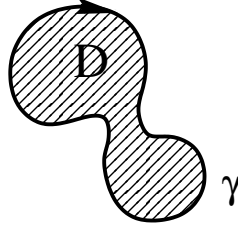


Рис. 1:

**Утверждение.** Вследствие того, что  $dA = \rho dx dy$ , где  $\rho > 0$ , «длина»  $I_1^E$  мажорирует «магнитную площадь»  $I_2^E$

$$I_1 \geq |I_2|c(\lambda)$$

для всех траекторий в компактной части  $\mathbb{R}^2 = S^2 \setminus (point)$  или  $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$ . Если граничная кривая  $\gamma$  «сильно смята», то площадь сильно меньше, чем длина.

Для больших кривых (в компактной части) максимально возможное  $c(\lambda)$  будет ограничено сверху размером компактной области в  $\mathbb{R}^2 \subset S^2$ . Поэтому вариационная задача корректна. Критическая замкнутая экстремаль существует и является гладкой при любом  $\lambda < \infty$ . При  $\lambda \rightarrow \infty$  экстремали становятся малыми и сходятся к точкам  $\infty$ .

Возможны следующие случаи.

а) зависящая от  $\lambda$  ветвь орбит утыкается в вырожденную орбиту при  $\lambda = \lambda_0 > 0$ . Здесь могут встречаться или рождаться разные ветви, идущие от начальных траекторий Люстерника—Шнирельмана—Пуанкаре.

б) Орбита приходит к самопересекающейся экстремали (см. рис. 2) при  $\lambda = \lambda_1$ .

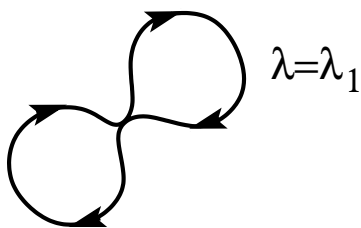


Рис. 2:

с) эта ветвь нигде не касается и при  $\lambda \rightarrow \infty$  сходится в точку.  
 В случае b) ветвь перейдет к самопересекающейся экстремали с чётным числом точек самопересечения.

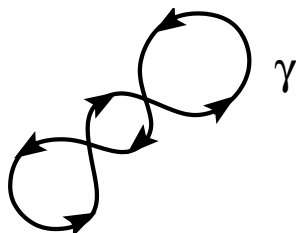


Рис. 3:

Траектории с одной точкой самопересечения не могут так появиться (деформацией из несамопересекающихся). Возможно, они могут родиться из вырожденных в ситуации а). Я это исследование не провёл. Это «правдоподобно» — см. рис. 4.

Имеется ещё один источник появления самопересечений — это деформация вырожденных кратных экстремалей при  $\lambda \geq 0$  (см. рис 4).

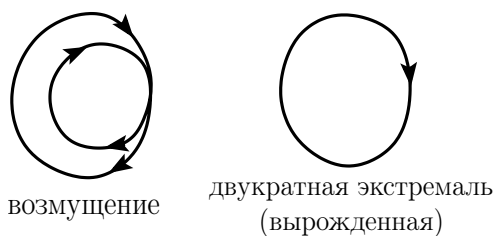


Рис. 4:

Из вырожденной двукратной экстремали может появиться при изменении  $\lambda$  самопересекающаяся с одной точкой пересечения. Повидимому, это

может происходить, если в момент расщепления двукратно пройденной кривой мы столкнулись с вырождением. Это показывает, что экстремали с одной точкой пересечения могут происходить из случая а) — выше.

Возможно и такая картинка (рис.5).

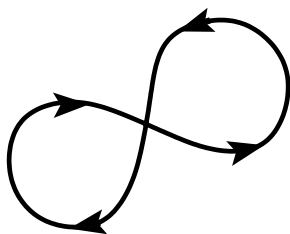


Рис. 5:

Она нуждается в отдельном анализе.

**II.** Обсудим теперь действие коммутативной группы  $G = S^1 \times \mathbb{R}$  на исходном трёхмерном пространстве  $SO_3$  или  $S^3$ . Выберем базисные системы — действие  $S^1$  вдоль слоёв расслоения («вертикальная» система) и выбранная («горизонтальная» система).

Выбор горизонтальной части определяется выбором накрытия в этом главном расслоении со слоем  $S^1$ .

Геометрия системы в пространстве расслоения  $S^3 \rightarrow S^2$  или  $SO_3 \rightarrow S^2$  со слоем  $S^1$  такова. В проекции  $S^2$  мы имеем траектории, зависящие от параметра  $\lambda$ . Они накрываются в полном пространстве расслоения  $S^3$  (или  $SO_3$ ), где имеется (правоинвариантная) метрика. Мы обсудим систему Клебша движения (медленного) твёрдого тела в идеальной жидкости. Для волчка в постоянном гравитационном поле всё аналогично. При  $\lambda = 0$  мы имеем «связность» в расслоении, где горизонтальные плоскости ортогональны слоям в трёхмерном многообразии. Эта связность  $S^1$ -инварианта.

При  $\lambda > 0$  мы имеем семейство конусов (см. рис 6) вокруг слоёв расслоения.

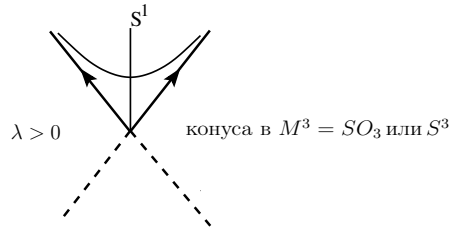


Рис. 6:

При  $\lambda \rightarrow \infty$  эти конуса суживаются и в пределе переходят в слой  $S^1$ . Решения системы при  $\lambda \gg 1$  приобретают вид

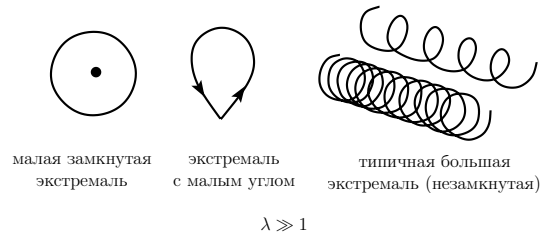


Рис. 7:

Мы видим, что в окрестности многообразия  $S^2$  односточечных кривых функционал положителен. Однако для фиксированной малой замкнутой кривой найдётся  $\lambda_0 \gg 1$ , такое что при  $\lambda > \lambda_0$  функционал отрицателен. Поэтому имеется «перевал» через холм для всего многообразия односточечных кривых  $S^2$ . Это даёт нам две критические гладкие «малые» экстремали  $\gamma_1, \gamma_2$ , но одна из них может быть кратна другой. Так что мы имеем одну. Их индекс равен 1 и 3 (индекс Морса).

Перейдем теперь к длинным траекториям – всем, а не только замкнутым.

«Быстро вращающаяся» часть зависит от «медленного» сноса (- - - -), который может быть определён усреднением по быстрым осцилляциям при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Конус, направленный вниз, описывает движение в другую сторону в проекции из 3-многообразия  $SO_3$  или  $S^3$  на  $S^2$ . У каждой периодической орбиты в базе  $S^2$  (возможно, с углом) есть инвариант: на накрывающей: при возвращении в ту же точку базы  $S^2$  траектория однако может быть незамкнута в пространстве расслоения  $S^3$  (или  $SO_3$ ). Возникает «сдвиг» на угол  $\alpha \leq 2\pi$  вдоль слоя.

Используя коммутирующий поток — действие группы  $S^1$  — мы можем подобрать его комбинацию с основным — такую, что заданная периодическая экстремаль станет периодической в  $SO_3$  или  $S^3$ . Но у всех других этого не будет (сдвиг общий для всех). Значит, набор «конечных сдвигов фазы» в пространстве расслоения для замкнутой  $\gamma$

$$\gamma \rightarrow \Delta(\gamma)$$

определён с точностью до добавления одного общего числа  $\Delta_0$ :

$$\gamma \rightarrow \Delta(\gamma) + \Delta_0 \sim \Delta'(\gamma).$$

Это же относится и ко всем замкнутым самопересекающимся экстремальям «с углами» (рис. 8),

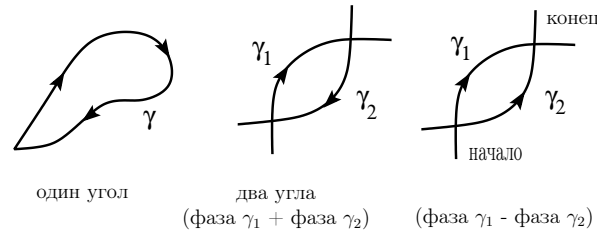


Рис. 8:

а также и к паре соседних пересечений (рис. 8), фаза  $\gamma_1 -$  фаза  $\gamma_2 = \Delta(\gamma_1) - \Delta(\gamma_2)$ .

Для двух траекторий в точке их пересечения (рис. 9)

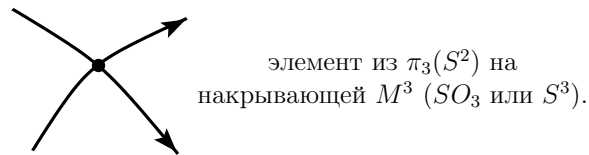


Рис. 9:

имеется в  $S^3$  (или  $SO_3$ ) прообраз точки пересечения — слой  $S^1 \subset S^3$  — и два трансверсальных к нему (и друг другу) векторных поля, касательных к подходящим траекториям. Это даёт оснащённое многообразие в  $S^3$  или элемент Понтрягина  $\varkappa \in \Pi_3(S^2) = Z$  ( $\varkappa = \pm 1$ ).

Для двух кусков траекторий с конечным числом пересечений мы получаем сумму  $\sum \varkappa_i \in \Pi_3(S^2)$ . Впрочем, это число то же самое, что и индекс пересечения двух траекторий в  $S^2$ . Мы рассматриваем и незамкнутые траектории. Для замкнутых эта сумма всегда равна нулю.

Нам остаётся ещё вычислить *усреднённую траекторию по быстрым осцилляциям* в  $S^2$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Это мы сделаем в следующей работе.

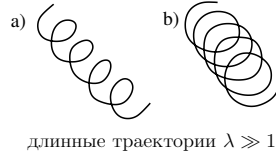


Рис. 10:

Рассмотрим траектории (в т.ч. незамкнутые) размером сильно больше локальной «касательной» циклической орбиты замороженного магнитного поля и метрики в точке. Они являются многократно пересекающимися, и число самопересечений (см. рис. 10) пропорционально длине (или больше).

Кроме того, на каждой осцилляции  $\varkappa_k$  имеется (см. рис. 8) сдвиг по слою в пространстве расслоения  $S^3$  или  $SO_3$  — —  $\Delta(\varkappa_k)$ . Полный сдвиг есть сумма сдвигов по малым осцилляциям

$$\gamma \sim \varkappa_1 \circ \dots \circ \varkappa_N$$

$$\Delta(\gamma) = \sum \Delta(\varkappa_j)$$

(если орбита периодическая).

Размер осцилляции  $\ell(\lambda)$  определяется из условия (по порядку величины)

$$\lambda \ell^2 \ll \ell$$

(магнитная площадь меньше длины края), т.е.  $1/\ell \gg \lambda$ .

Примерно  $\ell \sim \lambda^{-1}$ . Если витки не пересекаются мы имеем порядка  $\lambda$  витков, но они могут «накладываться» на соседей. Тогда витков больше.

При  $\lambda \rightarrow \infty$  экстремаль сводится к усреднённой траектории на  $S^2$ . Естественная гипотеза состоит в том, что предел есть просто траектории системы при  $\lambda = 0$ . На это указывают геометрические соображения — особенно на «накрывающей»  $S^3 \rightarrow S^2$ , где усреднение похоже на «связность», ортогональную слоям  $S^1 \subset S^3$  (для системы Клебша).



Это, однако, строго не доказано. Если это правильно, то предел «больших» замкнутых экстремалей соответствует ситуации <Люстерника—Шнирельмана>. Это — интересный вопрос.

Примечание: Как указано в начале (см Ландау-Лифшиц [6]) это похоже на ситуацию в циклотронной физике, но сильное магнитное поле там реальное, все происходит в области  $R^3$ , ни о каких монополях естественно не говорится и источником медленного дрейфа является неоднородность магнитного поля. В нашем случае источником является неоднородность метрики сферы  $S^2$  для Клебша и неоднородность обоих для волчка после редукции к семейству систем в  $S^2$ . Кстати, сильное эффективное магнитное поле в случае волчка в постоянном гравитационном поле соответствует тому, что он крутится очень быстро.

### Литература

[1] Новиков С. П. Многозначные функции и функционалы. Аналог теории Морса // ДАН СССР, 260:1 (1981), 31—35.

[2] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН, 37:5(227) (1982), 3—49.

[3] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы теории гомологии. Т. 1. — М.: Наука, 1984.

[4] Новиков С. П., Тайманов И. А. Периодические экстремали многозначных или не всюду положительных функционалов // Докл. АН СССР, 274:1 (1984), 26—28.

[5] Grinevich P. G., Novikov S. P. Nonselfintersecting magnetic orbits on the plane. Proof of the overthrowing of cycles principle, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 170, 59-82 (1995) [Topics in Topology and Mathematical Physics, Edited by: S. P. Novikov, 1995; 206 pp.]

[6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: т.2: теория поля, — М.: Наука, 1988.

[7] Козлов В. В., Онищенко Д. А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // ДАН СССР, 266:6 (1982), 1298—1300