

ANALOGUES HERMITIENS DE LA K -THÉORIE

PAR S. P. NOVIKOV

1. Le développement rapide de l'algèbre stable, ces dernières années, est un fait bien connu. Ce développement est dû, surtout, à trois facteurs : aux succès de la K -théorie en théorie de l'homotopie (et à ses applications), à la brillante application de la K -théorie algébrique (pure) à la théorie des variétés non simplement connexes, et, enfin, aux liens avec l'algèbre et la théorie des nombres. Les notions fondamentales de la K -théorie algébrique sont les groupes $K^0(A)$ et $K^1(A)$ pour un anneau A , leurs propriétés, et leurs extensions $K_i(A)$ ($i \geq 2$).

On ne pourra pas donner ici une présentation de ce vaste thème ; son histoire et ses résultats sont l'œuvre de beaucoup de mathématiciens remarquables appartenant à des domaines différents.

Néanmoins, je vais attirer l'attention sur une lacune de la K -théorie algébrique dans son état actuel : il n'y a pas d'analogue algébrique de la théorie des classes caractéristiques (Pontryaguine et Chern) qui sont l'un des objets importants de la K -théorie habituelle (topologique). Ceci n'est pas un hasard. Je ne connais aucun exemple de problème naturel, ou de théorème, qui fasse appel à un foncteur du type Chern–Pontryaguine, défini sur le groupe de Grothendieck $K^0(A)$, ou sur les groupes de Dieudonné–Whitehead $K^1(A)$ ou sur ceux de Milnor $K^2(A)$.

Une autre lacune, moins évidente, est l'absence d'un analogue algébrique de la périodicité de Bett. C'est une lacune assez compréhensible, vu que, déjà dans le cas topologique, la périodicité n'est pas une conséquence des propriétés homotopiques générales de la K -théorie, mais un théorème difficile qu'on démontre après, séparément.

2. On va s'occuper maintenant de l'aspect algébrique des problèmes de classification en topologie (différentielle ou P.L.), liés à la technique de chirurgie (surtout dans le cas non simplement connexe).

Déjà, dans les années 1965–66, on avait remarqué (Novikov [3], [7], Wall [5]) que le formalisme général des obstructions pour la chirurgie, dans le cas des dimensions paires, conduit à des analogues du groupe $K^0(A)$, construits avec des formes hermitiennes ou hermitiennes-gauches (skew-hermitian) sur des modules libres (ou pro-jectifs) avec la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

comme objet trivial ; ces formes sont à valeurs dans l'anneau à involution $A = Z[\pi]$. Les groupes obtenus sont respectivement $K_H^0(A)$ et $K_{SH}^0(A)$. L'involution sur A est liée à "l'orientation" $\pi \rightarrow Z_2$, nous ne mentionnons pas l'invariant d'Arf ; le groupe K_H^0 apparaît dans le cas des dimensions $4k$ et K_{SH}^0 apparaît dans le cas des dimensions $4k + 2$. Essentiellement, K_H^0 et K_{SH}^0 sont des objets très classiques (les classes stables de formes quadratiques).

Une belle découverte géométrique (qui est justifiée a posteriori, de manière naturelle, du point de vue algébrique) est faite par Wall [6] en 1968 : la théorie de la chirurgie pour les variétés de dimension impaire conduit, pour $4k + 1$ (resp. pour $4k + 3$) à des groupes du type K_H^1 , K_{SH}^1 , construits pour $A = Z[\pi]$, à partir d'automorphismes qui conservent un certain produit scalaire (il est nécessaire de multiplier A par $Z[\frac{1}{2}]$ puisqu'on ne parle pas de 1 invariant de Arf).

On savait déjà qu'en général un problème de chirurgie se présente plus ou moins de la même façon pour toutes les dimensions congruentes mod. 4. Serait-ce ici un analogue de la périodicité de Bett ? Dans les problèmes de chirurgie, il y a un mélange de concepts algébriques de deux types différents : les objets "hermitiens" K_H^0 , K_H^1 et les objets "hermitiens-gauches" K_{SH}^0 , K_{SH}^1 . D'autre part, ces objets sont définis, pas directement sur les variétés, mais à partir de $A = Z[\pi]$. On devrait se demander s'il existe un formalisme algébrique dans le cadre des analogues hermitiens de la K -théorie, utilisant la suite des dimensions (croissantes), et qui donnerait une relation entre K_{SH}^0 et l'objet hermitien " K_H^2 " qui reste à construire. La collection K_H^i ($i = 0, 1, 2, 3$) devrait être une "théorie homologique". On devrait au moins pouvoir faire ce qui suit. On s'intéresse à $A = Z[\pi]$ et "l'extension de Laurent" $A \rightarrow A[Z, Z^{-1}]$ conserve la classe des algèbres de groupe $Z[\pi] \rightarrow Z[\pi \times Z]$; on devrait donc construire un opérateur de Bass, reliant $K_{SH}^{i+1}(A[Z, Z^{-1}])$ et $K_{SH}^i(A)$, $K_H^{i+1}(A[Z, Z^{-1}]) \cong K_H^i(A)$ dans un certain cadre algébrique, en particulier pour $i = 1$, où $K_H^2(A)$ devrait coïncider essentiellement avec $K_{SH}^0(A)$ (comme le montre la théorie de la chirurgie).

Notons tout de suite qu'un énoncé sur un "théorème d'existence" non effectif pour un opérateur du type Bass peut être extrait des travaux de Browder (1966, $\pi_1 = Z$) et de Shaneson (1968, $\pi_1 = G \times Z$), quoiqu'il n'y ait pas de constructions algébriques dans ces travaux ni de définition algébrique de l'obstruction à la chirurgie non simplement connexe.

Dans le travail récent [4], l'auteur a étudié le problème de la construction algébrique d'un analogue hermitien à la K -théorie, sur un anneau avec involution A du point de vue de ce qu'on appelle le formalisme hamiltonien. En parlant de façon plutôt vague (puisque, par exemple, dans [4] on introduit plusieurs K -théories hermitiennes U^* , V^* , W^*), l'auteur a réussi à construire l'opérateur de Bass dans le cas crucial

$$K_{SH}^0(A[Z, Z^{-1}]) \underset{\bar{B}}{\overset{B}{\cong}} K_H^1(A)$$

et

$$K_H^0(A[Z, Z^{-1}]) \underset{\bar{B}}{\overset{B}{\cong}} K_{SH}^1(A),$$

où

$$K_H^2 \cong K_{SH}^0, \quad K_{SH}^2 \cong K_H^0,$$

C'est plus facile de comprendre la construction de l'"opérateur de Bass"

$$\begin{aligned} K_{SH}^1(A[Z, Z^{-1}]) &\underset{\bar{B}}{\overset{B}{\cong}} K_{SH}^0(A) \\ K_H^1(A[Z, Z^{-1}]) &\underset{\bar{B}}{\overset{B}{\cong}} K_H^0(A), \end{aligned}$$

par analogie avec la construction classique (de Bass). Par contre, en ce qui concerne les opérateurs

$$K_H^0(A[Z, Z^{-1}]) \rightarrow K_{SH}^1(A)$$

et

$$K_H^0(A[Z, Z^{-1}]) \rightarrow K_{SH}^1(A)$$

leur construction est faite de manière algébrique et elle est difficile à deviner par des considérations de topologie différentielle. Toujours par voie algébrique, on montre que si $K^0(A[Z, Z^{-1}]) = K^0(A)$, alors on a

$$K_H^0(A[Z, Z^{-1}]) = K_H^0(A) + \bar{B}K_{SH}^1(A)$$

et

$$K_{SH}^0(A[Z, Z^{-1}]) = K_{SH}^0(A) + \bar{B}K_H^1(A)$$

C'est montré seulement pour l'une des K -théories hermitiennes de [4]; mais pour nos autres K -théories hermitiennes, on peut définir des homomorphismes naturels (qui "changent la symétrie") $K_H^2 \rightarrow K_{SH}^0$, $K_{SH}^2 \rightarrow K_H^0$. Cela permet d'affirmer que, du point de vue algébrique, dans la catégorie des modules avec produit scalaire hermitien, le rôle des "éléments de K_H^2 " est joué par les modules avec produit scalaire hermitien-gauche. En fait, tous les résultats de [4] sont dans la théorie $\otimes Z[\frac{1}{2}]$. Si on ne multiplie pas (tensoriellement) par $Z[\frac{1}{2}]$, le formalisme hamiltonien de l'auteur doit être remanié d'une manière assez délicate.

Encore une remarque. Quand on a plusieurs variables $z_1, \dots, z_k \in \pi_1 = G \times Z^k$, la composition des opérateurs de Bass

$$B(z_1) \cdot \dots \cdot B(z_k)$$

dépend seulement du produit extérieur $z_1^* \wedge \dots \wedge z_k^* \in \bigwedge^k \pi_1^*$. Il en résulte, en particulier, une construction algébrique de l'"homomorphisme de la haute signature" :

$$\sigma = \sum \sigma_q : K_H^i(A) \rightarrow \sum_q \bigwedge^{i-4q} \pi_1^{**} = \sum H_{i-4q}(\pi_1^{**}), \quad \pi^* = \text{Hom}_Z(\pi, Z),$$

où $\pi_1^{**} = Z^k$ (abélien libre) et

$$\bigwedge^* \pi_1^{**} = H^*(\pi_1^{**}, Q),$$

Q ensemble des rationnels. Il s'agit du fait que, ici, $\pi_1^{**} = \pi_1 = Z^k$ et l'homomorphisme $\sigma : K_H^{4q} \rightarrow Z$ induit un produit scalaire symétrique sur $M \otimes_A R$ (où $A = Z[\pi]$). Par définition

$$\langle \sigma_q(x), z_{j_1}^* \wedge \dots \wedge z_{j_{i-4q}}^* \rangle = \sigma \cdot B(z_{j_1}^* \wedge \dots \wedge z_{j_{i-4q}}^*)[x].$$

L'existence de cet "homomorphisme des hautes signatures" (pour i pair) a été établie par l'auteur dans [3], [7] tandis que le fait que σ est un isomorphisme (quand on tensorise par $Z[\frac{1}{2}]$) est démontré, dans un autre langage, par Shaneson [8]. Tout ceci étant fait comme un théorème non effectif "d'existence et unicité" sans constructions algébriques.

4. Ayant montré le formalisme des théories hermitiennes et ayant construit l'opérateur de Bass, on peut dire que le problème d'un analogue de la périodicité de Bett a un sens pour les K -théories hermitiennes sur un anneau à involution.

Essayons de comprendre la relation de la périodicité hermitienne avec celle de la K -théorie habituelle $K(X)$. Dans [1], Gelfand et Mischenko ont montré que, dans l'anneau des fonctions complexes $A = C(X)$, les groupes $K_H^0(A) = K_{SH}^0(A)$ (on a $i = \sqrt{-1} \in A$) sont canoniquement isomorphes aux groupes habituels $K^0(X)$. Ils ont montré aussi que, pour π commutatif, les groupes $K_H^0(A)$ et $K_{SH}^0(A)$ se ramènent, par le passage $X = \text{char } \pi$, au foncteur $K(X)$ habituel (on plonge $A \rightarrow C(X)$ où $X = \text{char } \pi$, ramenant ainsi $K_H^0(A)$ à $K(X)$).

Voici quelques résultats simples et importants qui ne sont pas mentionnés dans [1] :

a) En appliquant l'homomorphisme de Gelfand–Mischenko : $K_H^0 \rightarrow K(X)$ et le caractère de Chern $\text{ch} : K(X) \rightarrow H^*(X, Q)$, on obtient, précisément l'homomorphisme des “hautes signatures” pour $X = \text{char } \pi$, $\pi = Z^k$. Ceci m'a été communiqué par Mischenko.

b) Il est utile de remarquer que $K_H^0(A) = K^0(X)$, $A = Z[\pi]$ (modulo $\otimes Z[\frac{1}{2}]$). Dans la théorie habituelle, on a $\tilde{K}^0(A) = 0$, $\tilde{K}^0(X) \neq 0$. Ici

$$A = Z[\pi], \quad X = \text{char } \pi = T^k.$$

Tout ce qu'on vient de dire sur $K_H^0(A)$ et $K^0(x)$ (pour $A = C(X)$) reste vrai quand on passe à $K_H^1(A) = K^1(X)$.

Dans le cas réel, $A = R(X)$, on a aussi l'égalité $K_H^*(A) = KO^*(X)$ module $\otimes Z[\frac{1}{2}]$.

Ainsi, l'examen des anneaux de fonctions montre que les théories hermitiennes K_H^* se présentent comme une autre forme de la K -théorie classique où, dans une certaine mesure, on a la périodicité de Bett.

Il est difficile de juger ici dans quelle mesure l'auteur a réussi (ou pas) avec son formalisme hamiltonien, et on renvoie à [4] pour plus d'information. Dans le même travail, on montre les relations entre les constructions algébriques et la topologie différentielle, ainsi que les notions d'analyse qui entrent en jeu.

Remarquons que la bonne présentation des notions fondamentales du formalisme hamiltonien (la classe des variétés lagrangiennes, les particularités de la projection sur X , l'index de Maslov et ses relations avec la théorie de Morse, le rôle du hessien dans la théorie lagrangienne) a été donnée pour la première fois par Maslov [9] ; elle a beaucoup influencé l'auteur.

5. Revenons au problème des classes caractéristiques. Existe-t-il un foncteur du type “caractère de Chern” pour les anneaux à involution A , défini dans $K_H^*(A)$ ou $K_{SH}^*(A)$? (et où prendrait-il ses valeurs ?). Dans quels problèmes serait-il nécessaire ?

Pour l'anneau $A' = C(X)$ ou $A'' = R(X)$, il existe un tel “caractère de Chern–Pontryaguine” vu les isomorphismes

$$K_H^*(A') = K_{SH}^*(A') = K(X)$$

$$K_H^*(A'') \stackrel{1/2}{=} KO^*(X)$$

et prend ses valeurs dans $H^*(X, Q)$. De même $\text{ch} : K_H^*(A) \rightarrow H^*(X, Q)$ pour $A = C(X)$.

Pour l'anneau de groupe $A = Z[\pi]$ (où $\pi = Z^k$), on a l'homomorphisme des hautes signatures

$$\sigma : K_H^*(A) \rightarrow H_*(\pi, Q),$$

qui, comme l'a montré Mischenko, devient D . ch quand on passe à $K(X)$, pour $X = \text{char } \pi = T^k$.

Hypothèse : Il existe un homomorphisme généralisé des signatures

$$\sigma : K_H^*(A) \rightarrow H_*(\pi, Q),$$

pour tout $A = Z[\pi]$, où π est un groupe de représentation finie (l'auteur ne sait pas s'il faut se limiter au cas où l'homologie est de type fini ou même, peut-être, au cas où $K(\pi, 1)$ est une variété compacte).

Une telle construction introduirait les classes caractéristiques en algèbre.

Pour certains π (par exemple les groupes abéliens libres), un tel "caractère de Chern–Pontryaguine" existe et peut être construit par voie algébrique. Il est facile de faire la même construction pour les groupes fondamentaux des nil-variétés ou des solv-variétés. Néanmoins le formalisme général d'une telle construction n'apparaît pas clairement à l'auteur.

Un tel "homomorphisme de la signature généralisée" σ , ou un "caractère de Chern–Pontryaguine" ch pour $A = Z[\pi]$, jouent un rôle fondamental dans la topologie des variétés non simplement connexes. Pour Z^k , l'auteur l'avait déjà rencontré, pour la première fois, en 1965–66. Un problème d'actualité, comme celui des "formules de Hirzebruch non-simplement connexes" ou de la classification des invariants homotopiques issus des classes de Pontryaguine, peut se formuler comme suit : Si $L = \sum_k L_k(p_1, \dots, p_k)$ est un polynôme de Hirzebruch, M^n une variété fermée de groupe fondamental π_1 , on définit l'homomorphisme naturel

$$H^*(\pi_1, Q) \xrightarrow{\phi} H^*(M^n, Q),$$

et la forme linéaire $(DL(M^n), \times)$, $\times = \phi(y)$, sur $H^*(\pi_1, Q)$; c'est un élément de $H_*(\pi_1, Q)$ désigné par $\langle L, M^n \rangle$. Cette quantité $\langle L, M^n \rangle$ est-elle un invariant homotopique? comment peut-on la calculer?

Récemment, Mischenko [2] a trouvé la construction d'un invariant homotopique qui associe à M^n un élément $\tau(M^n)$ de $K_H^n(A)$ ($A = Z[\pi]$), déterminé modulo $\otimes Z \left[\frac{1}{2} \right]$. Cette construction définit une représentation de la théorie du SO -bordisme (comme pour $\pi = 1$) :

$$\Omega_*(\pi_1) \xrightarrow{\tau} K_H^*(A) \otimes Z \left[\frac{1}{2} \right].$$

Si l'homomorphisme

$$\sigma : K_H^*(A) \rightarrow H_*(\pi, Q)$$

existait, alors la "formule de Hirzebruch non simplement connexe" serait

$$\sigma \cdot \tau[M^n] = \langle L, M^n \rangle.$$

Pour $\pi = Z^k$, une telle formule a été établie par l'auteur.

Notons que, par le passage de $A = Z[\pi]$ à $A = R(X)$, l'homomorphisme r de Mischenko s'identifie à la transformation bien connue de Riemann–Roch :

$$\Omega^*(X) \xrightarrow{1/2} KO^*(X),$$

construite à partir de l'isomorphisme spécial de Thom en $KO^* \otimes Z \left[\frac{1}{2} \right]$ -théorie, lié au L -genre (ou à un élément de $KO^*(MSO)$). On sait aussi que a devient ch. La seule existence de l'homomorphisme

$$\sigma : K_H^*(A) \rightarrow H_*(\pi, Q)$$

implique déjà que

- (1) Si $K(\pi, 1)$ est une variété compacte, toutes les classes caractéristiques sont formellement définies par π .
- (2) Si a est monomorphe (modulo des groupes finis, le nombre des variétés compactes (lisses ou P.L.) du type d'homotopie de $K(\pi, 1)$ est fini.
- (3) Si la structure de la cohomologie $H^*(M^n, Q)$ est telle que toutes les classes de Pontryaguine rationnelles se calculent par la "formule de Hirzebruch" non simplement connexe, et si

$$H^{n-4k-1}(\pi, Q) \rightarrow H^*(M^n, Q)$$

est un monomorphisme, alors il n'y a qu'un nombre fini de variétés du même type d'homotopie que M^n (en suppose que $\sigma \otimes Q$ est injectif).

Pour $\pi = Z^k$ les classes caractéristiques sont toujours des invariants d'homotopie (Novikov [3], [7]). et le théorème de finitude a été démontré en 1969 par Wall et Hsiang-Shaneson (à paraître). Dans [7], l'auteur a montré que tous ces résultats sont des exemples d'un analogue non-simplement connexe de la formule de Hirzebruch. Pour $\pi = 1$, le théorème de finitude correspondant (quand $b_{4k} = 0$, $0 < 4k < n$) était déjà un exemple connu.

En conclusion, toute une série de problèmes sur les classes caractéristiques des variétés différentiables conduisent à la nécessité de la construction d'un analogue du caractère de Chern (la haute signature) pour les K -théories hermitiennes sur les anneaux de groupes.

RÉFÉRENCES

- [1] Gelfand, Mischenko. — *Funct. Anal.*, 1969, t. 3, no. 4.
- [2] Mischenko. — *Izv. AN*, 1970, t. 34, no. 3.
- [3] Novikov. — *Izv. AN*, 1966, t. 30, no. 1.
- [4] Novikov. — *Izv. AN*, 1970, t. 34, no. 2, 3.
- [5] Wall. — *Ann. of Math.*, 1966, t. 82, p. 217–276.
- [6] Wall. — *Surgery of compact manifolds*, 1968.
- [7] Novkov. — *Ess. on Top. and Rel. Topics* (Mémoires dédiés a Georges de Rham).
- [8] Shaneson. — *Bull of A.M.S.*, 1968, 74, No. 3.
- [9] Maslov. — 1965, Moscou, *Izd-vo MGU*.