

1. Что такое *гомоморфизм из \mathfrak{A} в \mathfrak{B}* ?¹ *Вложение из \mathfrak{A} в \mathfrak{B}* ? *Эпиморфизм из \mathfrak{A} на \mathfrak{B}* ? *Изоморфизм из \mathfrak{A} на \mathfrak{B}* ?
2. Какие алгебры называют *подалгебрами \mathfrak{A}* ? Пусть ξ — гомоморфизм из \mathfrak{A} в \mathfrak{B} . Что такое *гомоморфный образ \mathfrak{A} относительно ξ* ?
3. Что такое *отношение конгруэнции на \mathfrak{A}* ? Пусть R — отношение конгруэнции на \mathfrak{A} . Что такое *фактор-алгебра \mathfrak{A} по R* ?
4. Пусть \mathfrak{A} — группа. Как отношения конгруэнции на \mathfrak{A} связаны с нормальными подгруппами \mathfrak{A} ? (Ответ обосновать.)
5. Пусть \mathfrak{A} — кольцо. Как отношения конгруэнции на \mathfrak{A} связаны с [кольцевыми] идеалами \mathfrak{A} ? (Ответ обосновать.)
6. Пусть ξ — гомоморфизм из \mathfrak{A} в \mathfrak{B} . Что такое *ядро ξ* ? Как ядра гомоморфизмов связаны с отношениями конгруэнции? (Ответ обосновать.)
7. Докажите, что класс всех отношений конгруэнции на \mathfrak{A} образует полную решётку (точнее, решёточный ч.у.м.) по включению.
8. Сформулируйте теорему о гомоморфизме; докажите её.
9. Что такое *прямое произведение индексированного семейства алгебр*? Сформулируйте базовое утверждение о гомоморфизмах, связанное с прямыми произведениями; докажите его. Как определяются *канонические проекции* для данного прямого произведения?
10. Какие формулы назывались *специальными* в нашем курсе? Сформулируйте утверждение об истинности специальных формул в прямых произведениях; докажите его.
11. Сформулируйте теорему об абстрактной характеристизации прямого произведения; приведите схему её доказательства.
12. Какие алгебры называются *прямо неразложимыми*? Сформулируйте теорему о прямом разложении конечных алгебр; докажите её.
13. Что такое *подпрямое произведение индексированного семейства алгебр*? Какие алгебры называются *подпрямо неразложимыми*?
14. Докажите, что всякая подпрямо неразложимая алгебра является прямо неразложимой.
15. Сформулируйте базовый критерий подпрямой неразложимости; приведите схему его док-ва.
16. Сформулируйте теорему о подпрямом разложении (произвольных) алгебр; приведите схему её доказательства.
17. Какие алгебры называют *универсальными для \mathcal{K} над X* ?² Что такое $\text{Term}_\sigma(X)$?
18. Что мы обозначали через $\theta_{\mathcal{K}}(X)$? Через $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X)$? Приведите схему доказательства того, что $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X)$ универсальна для \mathcal{K} над $X/\theta_{\mathcal{K}}(X)$.

¹Здесь и далее \mathfrak{A} и \mathfrak{B} суть алгебры.

²Здесь и далее \mathcal{K} — класс алгебр, а X — непустое множество.

19. Докажите, что $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X)$ вкладывается в прямое произведение некоторого семейства алгебр из \mathcal{K} .
20. Сформулируйте основное утверждение об истинности тождеств в $\mathfrak{F}_{\mathcal{K}}(X)$; докажите его.
21. Что мы обозначали через $\text{Id}(\mathcal{K}, X)$? Докажите, что если X_1 и X_2 бесконечны, то $\text{Id}(\mathcal{K}, X_1)$ и $\text{Id}(\mathcal{K}, X_2)$ имеют одни и те же модели.
22. Что такое *многообразие* [в универсальной алгебре]? Сформулируйте теорему Бирхгоффа о многообразиях; приведите схему её доказательства.
23. Выпишите аксиомы для решёток. Определите \leq в языке решёток двумя способами. Докажите, что оба способа приводят к одному и тому же результату.
24. Выведите в теории решёток, что \leq — частичный порядок.
25. Какие ч.у.м. называются *решёточными*? Как связаны решётки и решёточные ч.у.м.? (Ответ обосновать.)
26. Докажите, что решётка дистрибутивна тогда и только тогда, когда в ней истинен один из законов дистрибутивности.
27. Докажите утверждение о единственности дополнений в ограниченных дистрибутивных решётках.
28. Какие ч.у.м. называют *решёточно полными*? Сформулируйте критерий решёточной полноты; докажите его.
29. Сформулируйте теорему Кнастера–Тарского; приведите схему её доказательства.
30. Выпишите аксиомы для булевых алгебр [те, которые мы использовали по умолчанию].
31. Выведите в теории булевых алгебр законы де Моргана.
32. Сформулируйте основное утверждение о связи между истинностью в булевых алгебрах и выводимостью в проп. классической логике; приведите схему его доказательства.
33. Определите \oplus и \odot в языке булевых алгебр. Докажите, что обычные булевы операции выражаются в терминах \oplus и \odot .
34. Какие кольца (с единицей) называют *булевыми*, или *идемпотентными*? Выведите в теории булевых колец: а) $x + x = 0$; б) $x \cdot y = y \cdot x$.
35. Докажите, что во всяком булевом кольце, содержащем хотя бы три элемента, есть ненулевые делители нуля.
36. Какие группы называют *булевыми*? Докажите, что всякая булева группа коммутативна.
37. Как связаны булевы алгебры и булевы кольца? (Ответ обосновать.)
38. Покажите, что всякая прямо неразложимая булева алгебра изоморфна 1 или 2.
39. Сформулируйте «малую теорему Стоуна»; приведите схему её доказательства с помощью теорем о прямом и подпрямом разложениях.
40. Какие булевы алгебры называют *атомарными*? Уточните формулировку «малой теоремы Стоуна» в случае атомарных булевых алгебр.

41. Докажите «малую теорему Стоуна» в случае атомарных булевых алгебр (без использования прямых и подпрямых разложений).
42. Пусть \mathfrak{B} — булева алгебра. Что такое *фильтр* \mathfrak{B} ? Докажите, что множество всех фильтров \mathfrak{B} с порядком по включению образует полную решётку.
43. Пусть \mathfrak{B} — булева алгебра. Как отношения конгруэнции на \mathfrak{B} связаны с фильтрами \mathfrak{B} ? (Ответ обосновать.)
44. Пусть \mathfrak{B} — булева алгебра, $X \subseteq \mathfrak{B}$. Дайте явное описание фильтра, порождённого X . (Ответ обосновать.)
45. Пусть \mathfrak{B} — булева алгебра. Покажите, что решётка всех фильтров \mathfrak{B} дистрибутивна.
46. Пусть \mathfrak{B} — булева алгебра. Что такое *ультрафильтр* \mathfrak{B} ? Сформулируйте утверждение об альтернативных определениях ультрафильтра; приведите схему его доказательства.
47. Сформулируйте аналог леммы о расширении (часто называемой «леммой Линденбаума») в терминах фильтров и ультрафильтров; докажите его.
48. Уточните формулировку «малой теоремы Стоуна» с помощью ультрафильтров; докажите, что она верна (без использования прямых и подпрямых разложений, разумеется).
49. Что такое *булево пространство*? Пусть \mathfrak{B} — булева алгебра. Что такое \mathfrak{B}^* ?
50. Пусть \mathcal{X} — топологическое пространство. Что такое \mathcal{X}^* ? Сформулируйте теорему Стоуна (обе части; без доказательства).
51. Выпишите две системы аксиом для модальных алгебр. Докажите, что они равносильны.
52. Пусть \mathfrak{F} — модальная шкала. Что мы обозначали через $M(\mathfrak{F})$? Как истинность в моделях Крипке над \mathfrak{F} связана с означиваниями в $M(\mathfrak{F})$. (Ответ обосновать.)
53. Приведите схему доказательства следующего утверждения: для любой конечной модальной алгебры \mathfrak{A} существует модальная шкала \mathfrak{F} такая, что $\mathfrak{A} \simeq M(\mathfrak{F})$.
54. Пусть \mathfrak{A} — модальная алгебра. Что такое \square -*фильтр* \mathfrak{A} ? Покажите, что множество всех \square -фильтров \mathfrak{A} с порядком по включению образует полную решётку.
55. Пусть \mathfrak{A} — модальная алгебра. Как отношения конгруэнции на \mathfrak{A} связаны с \square -фильтрами \mathfrak{A} ? (Ответ обосновать.)
56. Пусть \mathfrak{A} — модальная алгебра, $X \subseteq \mathfrak{A}$. Дайте явное описание \square -фильтра, порождённого X . (Ответ обосновать.)
57. Пусть L — (нормальная) модальная логика. Что такое *алгебра Линденбаума–Тарского для L* , обозначаемая \mathfrak{M}_L ?
58. Сформулируйте основное утверждение об алгебрах Линденбаума–Тарского для модальных логик; докажите его.
59. Что такое K ? Что мы обозначали через $NE(K)$? Покажите, что $NE(K)$ с порядком по включению образует полную решётку.
60. Что мы обозначали через \mathcal{M} ? Через $SV(\mathcal{M})$? Определите отображения L и V .
61. Приведите схему доказательства того, что L и V индуцируют взаимно обратные дуальные изоморфизмы между $NE(K)$ и $SV(\mathcal{M})$.

62. В каком случае говорят, что модальная логика обладает *дедуктивным интерполяционным свойством*, IDP? Какие классы модальных алгебр называют *амальгамируемыми*? Какая тут имеется связь (без доказательства)?
63. Сформулируйте «локальную» версию теоремы о сильной полноте для модальных логик относительно алгебраической семантики; докажите её.
64. Сформулируйте «глобальную» версию теоремы о сильной полноте для модальных логик относительно алгебраической семантики; докажите её.
-

Обновлено: 5 мая 2022 г.