Примеры задач ко второму коллоквиуму по МЛ

. . . .

1. Докажите следующее:

i. если $\vdash \Phi \to \Psi$, то $\vdash \forall x\, \Phi \to \forall x\, \Psi$;

ii. если $\vdash \Phi \to \Psi$, то $\vdash \exists x\, \Phi \to \exists x\, \Psi$.

2. Выведите в предикатном гильбертовском исчислении:

i. $(\Phi \to \forall x\, \Psi) \leftrightarrow \forall x\, (\Phi \to \Psi)$, где $x \notin \mathrm{FV}\,(\Phi)$;

ii. $(\Phi \to \exists x\, \Psi) \leftrightarrow \exists x\, (\Phi \to \Psi)$, где $x \notin \mathrm{FV}\,(\Phi)$;

iii. $(\forall x\, \Phi \to \Psi) \leftrightarrow \exists x\, (\Phi \to \Psi)$, где $x \notin \mathrm{FV}\,(\Psi)$;

iv. $(\exists x\, \Phi \to \Psi) \leftrightarrow \forall x\, (\Phi \to \Psi)$, где $x \notin \mathrm{FV}\,(\Psi)$.

3. Выведите в предикатном гильбертовском исчислении:

- $\exists x\, (\Phi \to \forall x\, \Phi)$.

4. Докажите, что для любого класса $\mathcal{K}$ σ-структур,

$$\mathcal{K} \text{ аксиоматизируем} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{K} \;=\; \mathrm{Mod}\,(\mathrm{Th}\,(\mathcal{K})).$$

5. Докажите, что для любого класса $\mathcal{K}$ σ-структур,

$$\mathcal{K} \text{ конечно аксиоматизируем} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{K} \text{ и } \overline{\mathcal{K}} \text{ аксиоматизируемы},$$

где $\overline{\mathcal{K}}$ обозначает класс всех σ-структур, не лежащих в $\mathcal{K}$.

6. Докажите, что класс всех абелевых групп без кручения аксиоматизируем, однако не конечно аксиоматизируем.

7. Докажите, что у теории класса всех циклических групп имеется счётная модель, которая не является циклической группой. Иными словами, класс всех циклических групп не аксиоматизируем даже в мощностях не более, чем $\aleph_0$.

8. В качестве «сигнатуры теории колец и полей» возьмём

$$\sigma \;:=\; \langle =^2; +^2, \times^2, -^1; 0, 1 \rangle.$$

Докажите, что любое σ-предложение Φ, истинное во всех полях характеристики 0, истинно и во всех полях характеристики p для достаточно больших p (точнее, для p, бо́льших некоторого n_Φ, зависящего от Φ). В результате класс всех полей характеристики 0 не будет конечно аксиоматизируем, хотя он и будет, конечно, аксиоматизируем.

9. Пусть σ — сигнатура теории колец (см. предыдущую задачу). Далее под *кольцами* мы всюду будем понимать коммутативные кольца с 1. Возьмём

$$\sigma' \;:=\; \sigma \cup \{I\},$$

где I — новый одноместный предикатный символ. Для всякой σ-структуры $\mathfrak{A}$ и каждого $B \subseteq A$ обозначим σ'-обогащение $\mathfrak{A}$, в котором I интерпретируется как B, через $\langle \mathfrak{A}, B \rangle$.

i. Докажите, что класс всех колец конечно аксиоматизируем.

ii. Постройте σ-предложение Φ такое, что для любых кольца $\mathfrak{A}$ и $B \subseteq A$,

$$\langle \mathfrak{A}, B \rangle \Vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad B \text{ — идеал } \mathfrak{A}.$$

iii. Постарайтесь придумать σ-предложение Φ такое, что для любых кольца $\mathfrak{A}$ и $B \subseteq A$,

$$\langle \mathfrak{A}, B \rangle \Vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad B \text{ — максимальный идеал } \mathfrak{A}.$$

(тут стоит вспомнить о факторизации колец по идеалам).

. . . .

29.04.2019