$$\frac{}{\phi}\,(\mathrm{Ax})$$

$$\frac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \phi & \psi\end{array}}{\phi\wedge\psi}\,(\wedge\mathrm{Intro}) \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi\wedge\psi\end{array}}{\phi}\,(\wedge\mathrm{Elim1}) \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi\wedge\psi\end{array}}{\psi}\,(\wedge\mathrm{Elim2})$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\phi\to\psi}\,(\to\mathrm{Intro}) \qquad \frac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \phi & \phi\to\psi\end{array}}{\psi}\,(\to\mathrm{Elim})$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi\end{array}}{\phi\vee\psi}\,(\vee\mathrm{Intro1}) \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\phi\vee\psi}\,(\vee\mathrm{Intro2}) \qquad \frac{\begin{array}{ccc} & [\phi] & [\psi]\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \phi\vee\psi & \chi & \chi\end{array}}{\chi}\,(\vee\mathrm{Elim})$$

$$\frac{\begin{array}{cc}[\phi] & [\phi]\\ \vdots & \vdots\\ \psi & \neg\psi\end{array}}{\neg\phi}\,(\neg\mathrm{Intro}) \qquad \frac{\begin{array}{cc}[\neg\phi] & [\neg\phi]\\ \vdots & \vdots\\ \psi & \neg\psi\end{array}}{\phi}\,(\neg\mathrm{Elim})$$

Под *выводом* здесь мы понимаем пару, которая состоит из конечного дерева $\langle V, E\rangle$ и функции $f$ с областью определения $V$, обладающих следующими свойствами.

1. $f$ отображает каждую $x \in V$ в тройку $(x_{\mathrm{F}}, x_{\mathrm{S}}, x_{\mathrm{R}})$, где $x_{\mathrm{F}} \in \mathrm{Form}$, $x_{\mathrm{S}} \in \{0,1\}$, а $x_{\mathrm{R}}$ — название одного из правил вывода нашей системы.

2. Для каждой $x \in V$ выполнено $\mathrm{arity}\,(x) \in \{0,1,2,3\}$.[†]

3. Допустим, что $x \in V$ и $\mathrm{arity}\,(x) = 0$. Тогда $x_{\mathrm{R}} = \mathrm{Ax}$.

4. Допустим, что $x \in V$ и $\mathrm{arity}\,(x) = 1$, и обозначим за $y$ единственного ребёнка $x$. Тогда выполнено одно из следующих условий:

   (a) $x_{\mathrm{R}} = \to\mathrm{Intro}$, причём существуют $\{\phi,\psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ такие, что

   $$y_{\mathrm{F}} \;=\; \psi \quad \text{и} \quad x_{\mathrm{F}} \;=\; (\phi\to\psi)$$

   (т.е., неформально говоря, $x_{\mathrm{F}}$ получается из $y_{\mathrm{F}}$ по $\to\mathrm{Intro}$);

[†]Через $\mathrm{arity}\,(x)$ мы будем обозначать число детей $x$.

   (b) аналогично в случае $x_{\mathrm{R}} = \wedge\mathrm{Elim1}$;
   (c) аналогично в случае $x_{\mathrm{R}} = \wedge\mathrm{Elim2}$;
   (d) аналогично в случае $x_{\mathrm{R}} = \vee\mathrm{Intro1}$;
   (e) аналогично в случае $x_{\mathrm{R}} = \vee\mathrm{Intro2}$.

5. Допустим, что $x \in V$ и $\mathrm{arity}\,(x) = 2$, и обозначим за $y^1$ и $y^2$ двух детей $x$. Тогда выполнено одно из следующих условий:

   (a) $x_{\mathrm{R}} = \to \mathrm{Elim}$, причём существуют $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ такие, что

   $$y^1_{\mathrm{F}} \;=\; \phi, \quad y^2_{\mathrm{F}} \;=\; (\phi \to \psi) \quad \text{и} \quad x_{\mathrm{F}} \;=\; \psi$$

   (иными словами, $x_{\mathrm{F}}$ получается из $y^1_{\mathrm{F}}$ и $y^2_{\mathrm{F}}$ по $\to \mathrm{Elim}$);
   (b) аналогично в случае $x_{\mathrm{R}} = \wedge\mathrm{Intro}$;
   (c) аналогично в случае $x_{\mathrm{R}} = \neg\mathrm{Intro}$;
   (d) аналогично в случае $x_{\mathrm{R}} = \neg\mathrm{Elim}$.

6. Допустим, что $x \in V$ и $\mathrm{arity}\,(x) = 3$, и обозначим через $y^1$, $y^2$ и $y^3$ трёх детей $x$. Тогда $x_{\mathrm{R}} = \vee\mathrm{Elim}$, причём существуют $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ такие, что

   $$y^1_{\mathrm{F}} \;=\; \phi \vee \psi \quad \text{и} \quad y^2_{\mathrm{F}} \;=\; y^3_{\mathrm{F}} \;=\; x_{\mathrm{F}}$$

   (иными словами, $x_{\mathrm{F}}$ получается из $y^1_{\mathrm{F}}$, $y^2_{\mathrm{F}}$ и $y^3_{\mathrm{F}}$ по $\vee\mathrm{Elim}$).

7. Допустим, что $z \in V$ и $z_{\mathrm{S}} = 0$. Тогда $\mathrm{arity}\,(z) = 0$, причём на пути от корня к $z$ существует $x \in V$ такая, что выполнено одно из следующих условий:

   — имеет место случай (4a), где $\phi = z_{\mathrm{F}}$;
   — имеет место случай (5c), где $\phi = z_{\mathrm{F}}$;
   — имеет место случай (5d), где $\neg\phi = z_{\mathrm{F}}$;
   — имеет место случай (6), где либо $\phi = z_{\mathrm{F}}$ и $y^2$ лежит на пути от $x$ к $z$, либо $\psi = z_{\mathrm{F}}$ и $y^3$ лежит на пути от $x$ к $z$.

*Заключением* этого вывода будет называться первая компонента образа корня $\langle V, E\rangle$ относительно $f$, а (*активными*) *предположениями* — первые компоненты всех таких $x \in V$, что $\mathrm{arity}\,(x) = 0$ и $x_{\mathrm{S}} = 1$.

Пусть $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$. Пишем $\Gamma \rhd \phi$, если существует вывод (в системе естественного вывода) с заключением $\phi$ и предположениями из $\Gamma$.