Два упражнения по булевым алгебрам

Пусть σ содержит двухместный предикатный символ $=$, который называют *символом равенства*. Говорят, что σ-структура $\mathfrak{A}$ *нормальна*, если $=^{\mathfrak{A}}$ совпадает с id_A.

Рассмотрим сигнатуру σ, состоящую из:

- двухместных функциональных символов $\wedge$ и $\vee$;
- одноместного функционального символа $\neg$;
- константных символов 0 и 1;
- символа равенства $=$.[†]

Под *булевой алгеброй* понимают нормальную σ-структуру $\mathfrak{A}$ такую, что в ней для любых $\{a, b, c\} \subseteq A$ верно следующее:

$$\begin{array}{rcl|rcl}
a \wedge (b \wedge c) & = & (a \wedge b) \wedge c & a \vee (b \vee c) & = & (a \vee b) \vee c \\
a \wedge b & = & b \wedge a & a \vee b & = & b \vee a \\
a \wedge (b \vee c) & = & (a \wedge b) \vee (a \wedge c) & a \vee (b \wedge c) & = & (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
a \wedge \neg a & = & 0 & a \vee \neg a & = & 1 \\
a \wedge 1 & = & a & a \vee 0 & = & a
\end{array}$$

Зафиксируем произвольную булеву алгебру $\mathfrak{A}$. Если для $\{a, b\} \subseteq A$ верно

$$a \wedge b = 0 \quad \text{и} \quad a \vee b = 1,$$

то b называют *дополнением* a. Очевидно, $\neg$ сопоставляет каждому элементу A некоторое его дополнение.

Упражнение 1 (о единственности дополнений). Для любых $\{a, b\} \subseteq A$,

$$a \wedge b = 0 \quad \text{и} \quad a \vee b = 1 \quad \Longrightarrow \quad b = \neg a.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\neg 0 = 1 \quad \text{и} \quad \neg 1 = 0,$$

а потому 0 и 1 ведут себя подобно логическим константам «истинна» и «ложь» в классической логике. Кроме того, мы легко получаем $\neg\neg a = a$ для всех $a \in A$.

Упражнение 2. Для любых $\{a, b, c\} \subseteq A$ верно следующее:

$$\begin{array}{rcl|rcl}
a \wedge a & = & a & a \vee a & = & a \\
a \wedge 0 & = & 0 & a \vee 1 & = & 1 \\
a \vee (a \wedge b) & = & a & a \wedge (a \vee b) & = & a \\
\neg (a \wedge b) & = & \neg a \vee \neg b & \neg (a \vee b) & = & \neg a \wedge \neg b
\end{array}$$

Используя эти упражнения, нетрудно доказать, что пропозициональная классическая логика сильно полна относительно естественной «булевозначной» семантики.

продолжение на след. стр.

[†]Здесь возникает некоторая путаница, поскольку функциональные символы нужно отличать от логических. Однако из контекста всегда будет понятно, о какого рода символах идёт речь.

`Четыре упражнения по различным «семантическим» темам`

Начнём с простого утверждения про автоморфизмы:

Упражнение 1. Посчитайте мощность множества всех автоморфизмов $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$.

Затем обратимся к определимости в элементарной геометрии:

Упражнение 2. Пусть σ состоит из трёхместного предикатного символа C и символа равенства $=$. Обозначим за $\mathfrak{A}$ нормальную σ-структуру такую, что

$$\mathrm{C}^{\mathfrak{A}} \;=\; \big\{(a,b,c) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})^3 \mid \text{длины отрезков } ac \text{ и } bc \text{ равны}\big\}.$$

Для каждого из следующих отношений найдите σ-формулу, определяющую его в $\mathfrak{A}$:

i. $R_1 := \big\{(a,b,c) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})^3 \mid a, b \text{ и } c \text{ попарно различны и лежат на одной прямой}\big\}$;

ii. $R_2 := \big\{(a,b,c,d) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})^4 \mid a \neq b,\ c \neq d \text{ и отрезки } ab \text{ и } cd \text{ параллельны}\big\}$;

iii. $R_3 := \big\{(a,b,c,d) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})^4 \mid \text{длины отрезков } ab \text{ и } cd \text{ равны}\big\}$.

(Пункты даны в естественном порядке.)

Пусть σ содержит $=$. Под *конечным спектром* σ-предложения Φ понимают

$$\text{Fin-Spec}\,(\Phi) \;:=\; \{n \in \mathbb{N} \mid \text{сущ. норм. } \sigma\text{-структура } \mathfrak{A} \text{ такая, что } \mathfrak{A} \Vdash \Phi \text{ и } |A| = n\}.$$

С конечными спектрами связано немало важных проблем.

Упражнение 3. Для каждого из следующих уравнений постройте подходящее σ-предложение Φ:

a. $\text{Fin-Spec}\,(\Phi) = \{3 \times k \mid k \in \mathbb{N} \text{ и } k \neq 0\}$;

b. $\text{Fin-Spec}\,(\Phi) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 1 \pmod 3\}$;

c. $\text{Fin-Spec}\,(\Phi) = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N} \text{ и } k \neq 0\}$;

d. $\text{Fin-Spec}\,(\Phi) = \mathbb{P}$; `%множество всех простых чисел`

e. $\text{Fin-Spec}\,(\Phi) = \big\{p^k \mid p \in \mathbb{P},\ k \in \mathbb{N} \text{ и } k \neq 0\big\}$;

f. $\text{Fin-Spec}\,(\Phi) = \{5^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(Всё это можно сделать с помощью одного общего метода.)

Напоследок обратимся к монадической логике первого порядка:

Упражнение 4. Пусть σ состоит из одноместных предикатных символов $U_0, \ldots, U_n$. Докажите, что для каждого σ-предложения Φ следующие условия эквивалентны:

i. существует σ-структура $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$;

ii. существует σ-структура $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$ и $|A| \leqslant 2^{n+1}$.

07.04.2018