Пара упражнений по конгруэнциям

Пусть дана некоторая σ-структура $\mathfrak{A}$. Мы будем называть $R \subseteq A \times A$ *отношением конгруэнции* (или просто *конгруэнцией*) на $\mathfrak{A}$, если оно обладает следующими свойствами:

a. R является эквивалентностью на A;

b. для каждого $f^n \in \mathrm{Func}_\sigma$ и любых $\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\} \subseteq A$,

$$a_1 R b_1, \quad \ldots, \quad a_n R b_n \quad \Longrightarrow \quad f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)\, R f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n);$$

c. для каждого $P^n \in \mathrm{Pred}_\sigma \setminus \{=\}$ и любых $\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\} \subseteq A$,

$$a_1 R b_1, \quad \ldots, \quad a_n R b_n \quad \text{и} \quad P^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \quad \Longrightarrow \quad P^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Главным образом нас будут интересовать «алгебры», т. е. нормальные структуры в сигнатурах, в которых единственным предикатным символом является выделенный символ равенства $=$; поэтому (c) можно будет опустить.

Упражнение 1. Пусть σ — сигнатура булевых алгебр, т. е. $\{\wedge, \vee, \neg, 0, 1, =\}$, и пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая булева алгебра в этой сигнатуре. Будем называть непустое $I \subseteq A$ *идеалом* $\mathfrak{A}$, если оно обладает следующими свойствами:

a. для любых $a_1, a_2 \in I$ верно $a_1 \vee a_2 \in I$;

b. для любых $a_1 \in I$ и $a_2 \in A$ верно $a_1 \wedge a_2 \in I$.

Докажите, что для $R \subseteq A^2$ следующие условия эквивалентны:

i. R является конгруэнцией на $\mathfrak{A}$;

ii. существует идеал $I \subseteq A$ такой, что

$$R \;=\; \bigl\{(a_1, a_2) \in A^2 \mid \text{существует } a_3 \in I \text{ такой, что } \; a_1 \vee a_3 = a_2 \vee a_3\bigr\}.$$

Упражнение 2. Пусть σ — это стандартная сигнатура теории групп, т. е. $\{*, (\cdot)^{-1}, e, =\}$, и пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая группа в этой сигнатуре. Для удобства мы будем отождествлять подгруппы $\mathfrak{G}$ с их носителями. Докажите, что для $R \subseteq G^2$ следующие условия эквивалентны:

i. R является конгруэнцией на $\mathfrak{G}$;

ii. существует нормальная подгруппа $H \subseteq G$ такая, что

$$R \;=\; \bigl\{(g_1, g_2) \in G^2 \mid g_1 H = g_2 H\bigr\},$$

где gH обозначает $\{g * h \mid h \in H\}$.

продолжение на след. стр.

`Четыре упражнения по первопорядковой выводимости`

На лекциях было установлено, что $\vdash \forall x\, \Phi \leftrightarrow \forall y\, \Phi\,[x/y]$, где y — переменная, не входящая в Φ. То же самое верно и для $\exists$.

Упражнение 1. Выведите в первопорядковом гильбертовском исчислении:

$\exists x\, \Phi \leftrightarrow \exists y\, \Phi\,[x/y]$, где y — переменная, не входящая в Φ.

(Разумеется, здесь речь идёт о схеме формул, причём Φ может иметь свободные переменные, отличные от x, а потому $\exists x\, \Phi$ не обязана быть предложением.)

Как нетрудно понять, в классической логике первого порядка между $\forall$ и $\exists$ есть определенная дуальность, подобная дуальности между $\wedge$ и $\vee$.

Упражнение 2. Выведите в первопорядковом гильбертовском исчислении:

i. $\neg\exists x\, \Phi \leftrightarrow \forall x\, \neg\Phi$;

ii. $\neg\forall x\, \Phi \leftrightarrow \exists x\, \neg\Phi$;

Стоит также отметить, что в определённом смысле $\forall$ ведёт себя «дистрибутивно» относительно $\wedge$, а $\exists$ — относительно $\vee$.

Упражнение 3. Выведите в первопорядковом гильбертовском исчислении:

i. $(\forall x\, \Phi \wedge \forall x\, \Psi) \leftrightarrow \forall x\ (\Phi \wedge \Psi)$;

ii. $(\exists x\, \Phi \vee \exists x\, \Psi) \leftrightarrow \exists x\ (\Phi \vee \Psi)$;

Однако на практике более полезным оказывается следующее.

Упражнение 4. Выведите в первопорядковом гильбертовском исчислении:

i. $(\forall x\, \Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow \forall x\ (\Phi \wedge \Psi)$, где $x \notin \mathrm{FV}\,(\Psi)$;

ii. $(\exists x\, \Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow \exists x\ (\Phi \wedge \Psi)$, где $x \notin \mathrm{FV}\,(\Psi)$;

iii. $(\forall x\, \Phi \vee \Psi) \leftrightarrow \forall x\ (\Phi \vee \Psi)$, где $x \notin \mathrm{FV}\,(\Psi)$;

iv. $(\exists x\, \Phi \vee \Psi) \leftrightarrow \exists x\ (\Phi \vee \Psi)$, где $x \notin \mathrm{FV}\,(\Psi)$.

Упражнения 3, 4 и 6 лежат в основе синтаксического алгоритма приведения первопорядковых формул к *пренексным нормальным формам*. Последние позволяют определить более тонкую семантику логики первого порядка в терминах *сколемовских функций*. Эта семантика, в свою очередь, очень тесно связана с *теоретико-игровой семантикой* логики первого порядка. Всё это мы обсудим на практике и/или лекциях.[†]

`17.04.2019`

[†]С философской точки зрения «бóльшая тонкость» альтернативных семантик заключается в том, что они являются «интенсиональными», т.е. позволяют говорить не просто об истинности данной формулы, а о способах реализации этой истинности; стандартная же семантика, восходящая к одному из основателей теории моделей Альфреду Тарскому, называется «экстенсиональной».