Вопросы по математической логике (I)

. . . .

$\boxed{1}$ Формальные слова. Конкатенация слов. Подслова и их вхождения. Замены в словах. Язык пропозициональной классической логики, PCL. Формулы в PCL и их подформулы. Утверждения о:

a. единственности представления формулы в PCL;

b. рекурсивном определении подформул в PCL.

Семантика PCL. Выполнимость и общезначимость в PCL. Семантические следование и эквивалентность в PCL. Основные эквивалентности в PCL. Доказательство теоремы о приведении формул в PCL к д.н.ф./к.н.ф. без явного построения таблиц истинности (с обоснованием всех шагов); то же для с.д.н.ф./с.к.н.ф.

. . . .

$\boxed{2}$ Гильбертовское исчисление для PCL. Выводимость в этом исчислении и простейшие её свойства. Примеры:

a. $\vdash p \vee q \to q \vee p$;

b. $\{p \wedge q\} \vdash q \wedge p$.

Теорема о дедукции для гильбертовского PCL-исчисления [и её обобщение на гильбертовские исчисления особого сорта]. Теорема о корректности для PCL. Простые теории в PCL и их основные свойства.

. . . .

$\boxed{3}$ Все упражнения из раздела «Пропозициональная выводимость».

. . . .

$\boxed{4}$ Эквивалентные подходы к описанию простых теорий в PCL: максимальные непротиворечивые теории и полные непротиворечивые теории. Лемма о расширении в PCL для произвольного бесконечного Prop с двумя доказательствами:

a. с помощью трансфинитной рекурсии;

b. с помощью леммы Цорна.

Теорема о сильной полноте для PCL [здесь мы считаем известными основные свойства простых теорий в PCL].

. . . .

$\boxed{5}$ Следствия теоремы о сильной полноте для PCL. Пример применения теоремы о компактности в PCL: локализация задачи о раскраске бесконечной карты. Альтернативное доказательство этой теоремы с помощью теоремы Тихонова. Исчисление естественной дедукции для PCL [неформальное, но подробное описание]. Выводимость в этом исчислении и простейшие её свойства. Примеры:

a. $\{p \wedge (q \wedge r)\} \vartriangleright (r \wedge p) \wedge q$ и наоборот;

b. $\{(p \wedge q) \to r\} \vartriangleright p \to (q \to r)$ и наоборот;

c. $\{(p \to q) \wedge (p \to r)\} \vartriangleright p \to (q \wedge r)$ и наоборот;

d. $\{p \to q\} \vartriangleright (p \wedge r) \to (q \wedge r)$.

. . . .

$\boxed{6}$ Теорема о дедукции для PCL-исчисления естественной дедукции. Все упражнения из раздела «Естественная дедукция: I и II». Сведение выводимости в гильбертовском PCL-исчислении к выводимости в PCL-исчислении естественной дедукции.

. . . .

$\boxed{7}$ Сигнатуры и структуры (с примерами). Язык классической логики первого порядка, FOCL. Термы и их подтермы. Формулы и их подформулы. Утверждения о:

a. единственности представления терма;

b. рекурсивном определении подтермов;

c. единственности представления формулы;

d. рекурсивном определении подформул.

Области действия кванторов в формулах. Свободные и связанные вхождения переменных в формулах. Замкнутые формулы [предложения]. Подстановка терма в формулу; условие адекватности такой подстановки. Семантика FOCL. Модели. Выполнимость и общезначимость в FOCL. Семантические следование и эквивалентность в FOCL.

. . . .

$\boxed{8}$ Все упражнения из раздела «Булевы алгебры». Определимость отношений, функций и элементов в структурах. Примеры:

a. определение отношения «быть больше нуля» в кольце целых чисел;

b. определение отношения «быть больше нуля» в поле вещественных чисел;

c. определение отношения «прямые xx' и yy' параллельны» в обеднении стандартной модели элементарной геометрии, не содержащем отношения соразмерности, а также сопутствующая формулировка аксиомы о параллельных.

Все упражнения из раздела «Определимость в структурах».

. . . .

$\boxed{9}$ Гомоморфизмы, вложения, изоморфизмы. Предложение о сохранении истинностных значений формул при изоморфизме. Автоморфизмы. Упр. 1–4 из раздела «Семантика логики первого порядка». Метод доказательства неопределимости с помощью автоморфизмов и причины его ограниченности. Простые примеры применения:

a. неопределимость отношения порядка в группе целых чисел по сложению;

b. неопределимость функции сложения в упорядоченном множестве целых чисел.

Конгруэнции. Оба упражнения из раздела «О конгруэнциях».

. . . .

$\boxed{10}$ Нормальные структуры. Аксиомы равенства, Eq. Утверждение о том, что у теории $\Gamma \cup \mathrm{Eq}$ есть модель тогда и только тогда, когда у Γ есть нормальная модель. Конечные спектры (для предложений в сигнатурах с равенством). Утверждение о том, что пересечение и объединение двух конечных спектров снова является конечным спектром. Упр. 5–6 из раздела «Семантика логики первого порядка».

. . . .

$\boxed{11}$ Гильбертовское исчисление для FOCL. Выводимость в этом исчислении и простейшие её свойства. Опровержимые и независимые относительно данной теории формулы. Правило обобщения. Примеры:

- $\vdash \mathrm{Q}x\,\Phi \leftrightarrow \mathrm{Q}y\,\Phi\,(x/y)$, где y не входит в Φ;
- если $\vdash \Psi \to \Theta$, то $\vdash \mathrm{Q}x\,\Psi \to \mathrm{Q}x\,\Theta$.

Использование тавтологий в FOCL (с обоснованием). Упр. 1 из раздела «Первопорядковая выводимость». Пренексные нормальные формы. Упр. 3–6 из того же раздела.

. . . .

$\boxed{12}$ Теорема о дедукции для гильбертовского FOCL-исчисления. Противоречивые и непротиворечивые теории. Теорема о корректности для FOCL [с аккуратным обоснованием общезначимости кванторных аксиом] и основные её следствия. Пример:

- независимость $\forall x\,\mathsf{s}\,(x) \neq x$ относительно

$$\{\forall x\,\mathsf{s}\,(x) \neq 0,\ \ \forall x\,\forall y\,(\mathsf{s}\,(x) = \mathsf{s}\,(y) \to x = y),\ \ \forall x\,(x \neq 0 \to \exists y\,x = \mathsf{s}\,(y))\}.$$

Упр. 1 из «Дополнительных упражнений».

. . . .

$\boxed{13}$ Использование новых констант в гильбертовском FOCL-исчислении. Простые теории в FOCL и их основные свойства. Лемма о расширении в FOCL в случае $|\sigma| \leqslant \aleph_0$.

. . . .

$\boxed{14}$ Лемма о расширении в FOCL в общем случае. Теорема о сильной полноте для FOCL [включая версию со структурами ограниченной мощности].

. . . .

$\boxed{15}$ Основные следствия теоремы о сильной полноте для FOCL:

- теорема о консервативности отношения выводимости;
- теорема о слабой полноте для FOCL;
- теорема о компактности для FOCL (локальная теорема Гёделя–Мальцева);

- теорема Лёвенгейма–Сколема.

Утверждение о том, что если у теории есть сколь угодно большие конечные модели, то у неё есть и бесконечная модель. Операторы Th и Mod. Аксиоматизируемые и конечно аксиоматизируемые классы структур. Утверждение о «наибольшей аксиоматизации» и простейший критерий конечной аксиоматизируемости.

. . . .

$\boxed{16}$ Утверждения про (не)аксиоматизируемость, касающиеся:

i. класса всех конечных абелевых групп;

ii. класса всех бесконечных абелевых групп;

iii. класса всех абелевых групп мощности κ, где $\kappa \in \mathrm{Card}$.

Утверждения про (не)аксиоматизируемость, касающиеся:

a. класса всех циклических групп;

b. класса всех (абелевых) групп кручения;

c. класса всех (абелевых) групп без кручения;

d. класса всех делимых абелевых групп.

Упр. 2–3 из раздела «Дополнительные упражнения».

. . . .

$\boxed{17}$ «Замкнутые» структуры: определение и сопутствующее утверждение. Вложение $\mathfrak{N}$ в модели $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N})$, где $\mathfrak{N}$ — это стандартная модель арифметики. Утверждение о том, что у $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N})$ есть счётные нестандартные модели. Критерий (не)стандартности для моделей $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N})$. Описание того, как устроен порядок в нестандартных моделях $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N})$.

. . . .

$\boxed{18}$ Стандартная модель $\mathfrak{R}$ вещественных чисел в «наибольшей сигнатуре». Вложение $\mathfrak{R}$ в модели $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{R})$. Утверждение о том, что у $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{R})$ есть (континуальные) нестандартные модели. Нестандартная модель $\mathfrak{R}^\sharp$, в которой $\mathfrak{R}$ является подструктурой. Утверждение о «консервативности» расширенных интерпретаций функциональных и предикатных символов. Можество конечных гипервещественных чисел, $\mathbb{F}$, и множество инфинитезималов, $\mathbb{I}$; основные алгебраические свойства $\mathbb{F}$ и $\mathbb{I}$. Бинарное отношение «бесконечной близости» и его основные свойства. Утверждение о том, что для любого $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$A^\sharp \;=\; A \quad \Longleftrightarrow \quad |A| \;<\; \aleph_0.$$

. . . .

$\boxed{19}$ Выделение стандартной части гипервещественного числа. Основные алгебраические свойства соответствующего оператора. Сходимость в терминах инфинитезималов: само определение и его эквивалентность современному определению. Непрерывность в точке в терминах инфинитезималов. Простой пример применения:

a. определение производной в терминах инфинитезималов;

b. вычисление производных $\lambda x. [x^2]$ и $\lambda x. [x^3]$.

c. непрерывность как следствие дифференцируемости;

d. цепное правило дифференцирования.

Упр. 2–3 из раздела «Инфинитезималы».

. . . .

$\boxed{20}$ Упр. 4–5 из раздела «Инфинитезималы». Сколемизация: определение, сопутствующее утверждение и примеры. Реализации п.н.ф. (формул) в структурах: определение, сопутствующая теорема и примеры. Теоретико-игровая семантика FOCL [неформальное описание и формулировки сопуствующих результатов].

. . . .

$\boxed{21}$ Разрешимые и перечислимые множества. Альтернативные определения перечислимых множеств. Основные свойства разрешимых и перечислимых множеств (включая связь между разрешимостью и перечислимостью). Сводимость и её основные свойства. Степени. Кодирование # термов и формул (в сигнатуре арифметики). Инъективность #. Разрешимость # [Term] и # [Form]. Канторовская нумерующая функция.

. . . .

$\boxed{22}$ Перечислимость дедуктивного замыкания перечислимой теории. Утверждение о том, что если непротиворечивая теория перечислима и полна, то она разрешима. Метод элиминации кванторов: определение и сопутствующие утверждения. Эффективная элиминация кванторов в теории упорядоченного множества рациональных чисел. Основные следствия этого результата [включая «альтернативные рассуждения»].

. . . .

$\boxed{23}$ Эффективная элиминация кванторов в подходящем «дефинициальном обогащении» упорядоченной группы целых чисел по сложению. Основные следствия этого результата.

. . . .

$\boxed{24}$ Явная аксиоматика для теории обогащенной упорядоченной группы целых чисел по сложению (с обоснованием). Две явные аксиоматики для теории упорядоченной группы целых чисел по сложению [с единицей] (с обоснованием).

. . . .

$\boxed{25}$ Полулинейные подмножества $\mathbb{Z}$. Утверждение о том, что $S \subseteq \mathbb{Z}$ полулинейно тогда и только тогда, когда S определимо в упорядоченной группе целых чисел по сложению. Теория PrA (арифметика Пресбургера над $\mathbb{N}$) и связанное с ней *упражнение.*

. . . .

Некоторые ссылки на литературу

I. Алгоритмы приведения пропозициональных формул к д.н.ф./к.н.ф. и с.д.н.ф./с.к.н.ф., изоженные на первом практическом занятии, можно найти, например, тут:

http://www.mi-ras.ru/ bekl/HSE-Logic/lectures1-8.pdf

II. Некоторую дополнительную информацию о (пропозициональном) исчислении естественной дедукции можно найти, например, в:

Chiswell, I., and W. Hodges. *Mathematical Logic.* Oxford University Press, 2007.

Однако в нашем курсе была задействована немного другая версия исчисления, без $\perp$.

III. Материал, касающийся инфинитезималов, базируется на соответствующей главе из:

Enderton, H.B. *A Mathematical Introduction to Logic.* 2^{nd} ed. Academic Press, 2001.

Разница в изложении несущественная. Больше материала содержится в:

Goldblatt, R. *Lectures on the Hyperreals.* Springer, 1998.

IV. Узнать больше о первой теореме Гёделя о неполноте можно здесь.

18.05.2020