

Пропозициональная выводимость

Напомним, что в нашем гильб. исчислении за основу взяты следующие схемы аксиом:

- I1. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$;
- I2. $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$;
- C1. $\phi \wedge \psi \rightarrow \phi$;
- C2. $\phi \wedge \psi \rightarrow \psi$;
- C3. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi \wedge \psi)$;
- D1. $\phi \rightarrow \phi \vee \psi$;
- D2. $\psi \rightarrow \phi \vee \psi$;
- D3. $(\phi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \vee \psi \rightarrow \chi))$;
- N1. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\phi)$;
- N2. $\neg\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$;
- N3. $\phi \vee \neg\phi$.

Первые восемь или даже девять из них считаются «стандартными», однако с последними двумя схемами дела обстоят сложнее: разные авторы приводят разные варианты аксиом для отрицания. В связи с этим давайте рассмотрим дополнительно:

- E1. $\neg\neg\phi \rightarrow \phi$;
- E2. $(\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \phi)$.

Кроме того, отметим ещё пять вспомогательных схем:

- ♡. $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$;
- ◇. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$;
- ♠. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$;
- ♣. $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$;
- ★. $\phi \rightarrow \neg\neg\phi$.

Упражнение 1. Докажите, что:

- i. ♡ можно вывести из I1-2 с помощью MP;
- ii. ◇ можно вывести из I1-2 с помощью MP;
- iii. ♠ можно вывести из I1-2, N1 с помощью MP;
- iv. ♣ можно вывести из I1-2, E2 (или I1-2, N1, E1) с помощью MP;
- v. ★ можно вывести из I1-2, N1 с помощью MP.

На самом деле, схема \clubsuit тесно связана со схемами E1 и E2.

Упражнение 2. Докажите, что:

- i. E1 можно вывести из I1-2, \clubsuit с помощью MP;
- ii. E2 можно вывести из I1-2, \clubsuit с помощью MP.

Упражнение 3. Докажите, что:

- i. E1 можно вывести из I1-2, E2 с помощью MP;
- ii. E2 можно вывести из I1-2, N1, E1 с помощью MP.

Упражнение 4. Докажите, что:

- i. N1 можно вывести из I1-2, E2 с помощью MP;
- ii. N2 можно вывести из I1-2, E2 с помощью MP;
- iii. N3 можно вывести из I1-2, D1-2, E2 с помощью MP.

Следовательно, N1-3 можно вывести из I1-2, D1-2, \clubsuit с помощью MP.

Упражнение 5. Докажите, что:

- i. E1 можно вывести из I1-2, D3, N2-3 с помощью MP;
- ii. E2 можно вывести из I1-2, D3, N1-3 с помощью MP.

Здесь стоит отметить, что если в рассматриваемом гильбертовском исчислении среди схем аксиом есть I1-2, а единственное правило — MP, то для этой системы (как нетрудно убедиться) верна теорема дедукции, и в упражнениях 1–5 этим можно пользоваться.

Упражнение 6. Без использования теоремы дедукции докажите, что:

- i. $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow r$;
- ii. $\vdash p \rightarrow \neg\neg p$.

17.02.2020