

Естественная дедукция I

Для установления сильной полноты \triangleright по большей части достаточно промоделировать посредством \triangleright выводимость в гильбертовском исчислении.

Упражнение 1. Выведите в проп. исчислении естественной дедукции:

- i. схемы I1-2;
- ii. схемы C1-3;
- iii. схемы D1-3;
- iv. схемы N1-3.

Докажите, что для всех $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \text{Form}$, если $\Gamma \vdash \phi$, то $\Gamma \triangleright \phi$.

Вместе с тем полезно вручную разобраться с некоторыми важными схемами.

Упражнение 2. Выведите в проп. исчислении естественной дедукции:

- i. схему E1; *%снятие двойного отрицания*
- ii. схему E2. *%«от противного»*

(Полнота \triangleright здесь не актуальна, поскольку нужно построить явные выводы.)

Упражнение 3. Выведите в проп. исчислении естественной дедукции:

- i. схему \heartsuit ; *%перестановка посылок*
- ii. схему \diamondsuit ; *%транзитивность импликации*
- iii. схему \spadesuit ; *%слабая контрапозиция*
- iv. схему \clubsuit . *%сильная контрапозиция*

На практических занятиях подробнее поговорим о \triangleright и об используемых здесь различных стратегиях доказательства.

Естественная дедукция II

При выполнении упражнений из этого раздела полезно отмечать, в каких случаях можно обойтись без \neg Elim.

Упражнение 1. Выведите в проп. исчислении естественной дедукции:

a. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$; (4)

b. $((p \vee q) \vee r) \rightarrow (p \vee (q \vee r))$. (8)

Упражнение 2. Выведите в проп. исчислении естественной дедукции:

a. $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$; (9)

b. $((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \rightarrow (p \wedge (q \vee r))$; (10)

c. $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$; (10)

d. $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \rightarrow (p \vee (q \wedge r))$. (9)

Упражнение 3. Выведите в проп. исчислении естественной дедукции:

a. $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$; (6)

b. $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \vee q)$; (7)

c. $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$; (7)

d. $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$. (6)

Упражнение 4. Выведите в проп. исчислении естественной дедукции:

a. $(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$; (4)

b. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$; (6)

c. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$. (5)

Здесь справа (в скобках) указано ориентировочное количество горизонтальных черт, т.е. применений правил естественной дедукции (не считая Ax).