Булевы алгебры

Пусть σ содержит двухместный предикатный символ $=$, который называют *символом равенства*. Говорят, что σ-структура $\mathfrak{A}$ *нормальна*, если $=^{\mathfrak{A}}$ совпадает с id_A.

Рассмотрим сигнатуру σ, состоящую из:

- двухместных функциональных символов $\wedge$ и $\vee$;
- одноместного функционального символа $\neg$;
- константных символов 0 и 1;
- символа равенства $=$.[†]

Под *булевой алгеброй* понимают нормальную σ-структуру $\mathfrak{A}$ такую, что в ней для любых $\{a,b,c\} \subseteq A$ верно следующее:

$$\begin{array}{rcl|rcl}
a \wedge (b \wedge c) & = & (a \wedge b) \wedge c & a \vee (b \vee c) & = & (a \vee b) \vee c \\
a \wedge b & = & b \wedge a & a \vee b & = & b \vee a \\
a \wedge (b \vee c) & = & (a \wedge b) \vee (a \wedge c) & a \vee (b \wedge c) & = & (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
a \wedge \neg a & = & 0 & a \vee \neg a & = & 1 \\
a \wedge 1 & = & a & a \vee 0 & = & a
\end{array}$$

Зафиксируем произвольную булеву алгебру $\mathfrak{A}$. Если для $\{a,b\} \subseteq A$ верно

$$a \wedge b \;=\; 0 \quad \text{и} \quad a \vee b \;=\; 1,$$

то b называют *дополнением* a. Очевидно, $\neg$ сопоставляет каждому элементу A некоторое его дополнение.

Упражнение 1 (о единственности дополнений). Для любых $\{a,b\} \subseteq A$,

$$a \wedge b \;=\; 0 \quad \text{и} \quad a \vee b \;=\; 1 \quad \Longrightarrow \quad b \;=\; \neg a.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\neg 0 \;=\; 1 \quad \text{и} \quad \neg 1 \;=\; 0,$$

а потому 0 и 1 ведут себя подобно логическим константам «истинна» и «ложь» в классической логике. Кроме того, мы легко получаем $\neg\neg a = a$ для всех $a \in A$.

Упражнение 2. Для любых $\{a,b,c\} \subseteq A$ верно следующее:

$$\begin{array}{rcl|rcl}
a \wedge a & = & a & a \vee a & = & a \\
a \wedge 0 & = & 0 & a \vee 1 & = & 1 \\
a \vee (a \wedge b) & = & a & a \wedge (a \vee b) & = & a \\
\neg (a \wedge b) & = & \neg a \vee \neg b & \neg (a \vee b) & = & \neg a \wedge \neg b
\end{array}$$

Используя эти упражнения, нетрудно доказать, что пропозициональная классическая логика сильно полна относительно естественной «булевозначной» семантики.

[†]Здесь возникает некоторая путаница, поскольку функциональные символы нужно отличать от логических. Однако из контекста всегда будет понятно, о какого рода символах идёт речь.

Определимость в структурах

Упражнение 1. Рассмотрим структуру $\langle \mathbb{N}; | \rangle$, в которой $|$ интерпретируется как отношение делимости. Покажите, что ней определимы:

a. 0 и 1;

b. отношение равенства на $\mathbb{N}$;

c. $\mathbb{P}$ и $\widehat{\mathbb{P}}$ (множество всех степеней простых чисел);

d. отношение взаимной простоты на $\mathbb{N}$; %двухместное

e. функция «наименьшее общее кратное» на $\mathbb{N}$. %двухместная

Упражнение 2. Рассмотрим структуру $\langle \mathbb{N}; \perp \rangle$, в которой $\perp$ интерпретируется как отношение взаимной простоты. Покажите, что $\widehat{\mathbb{P}}$ определимо в этой структуре.

Упражнение 3. Рассмотрим структуру $\langle \mathbb{N}; \| \rangle$, в которой $\|$ интерпретируется как

$$\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ делит } y \text{ или } y \text{ делит } x\}$$

Покажите, что отношение делимости на $\mathbb{N}$ определимо в этой структуре.

Упражнение 4. Рассмотрим нормальную структуру $\langle \mathbb{N}; =, \mathrm{Sq}; + \rangle$, в которой $+$ интерпретируется как функция сложения на $\mathbb{N}$, а одноместный предикатный символ Sq — как

$$\left\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Покажите, что функция умножения на $\mathbb{N}$ определима в этой структуре.

Упражнение 5. Рассмотрим нормальную структуру $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}; =, \mathrm{C} \rangle$, где трёхместный предикатный символ C интерпретируется как

$$\left\{(a, b, c) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^3 \mid \text{длины отрезков } ac \text{ и } bc \text{ равны}\right\}.$$

Покажите, что в ней определимы:

a. $R_1 := \left\{(a, b, c) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^3 \mid a, b \text{ и } c \text{ лежат на одной прямой}\right\}$;

b. $R_2 := \left\{(a, b, c, d) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^4 \mid a \neq b,\ c \neq d \text{ и отрезки } ab \text{ и } cd \text{ параллельны}\right\}$;

c. $R_3 := \left\{(a, b, c, d) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^4 \mid \text{длины отрезков } ab \text{ и } cd \text{ равны}\right\}$.

(Пункты даны в естественном порядке.)

$\boxed{12.03.2018}$