

## Семантика логики первого порядка (разное)

**Упражнение 1.** Посчитайте мощность множества всех автоморфизмов  $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ .

**Упражнение 2** (только если есть вопросы). Обозначим за  $\mathfrak{D}$  нестрогий ч.у.м. с носителем  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ , в котором  $\leq$  интерпретируется как отношение делимости. Покажите, что:

- всякий автоморфизм  $\mathfrak{D}$  переводит элементы  $\mathbb{P}$  в элементы  $\mathbb{P}$ ;
- каждую биекцию из  $\mathbb{P}$  на  $\mathbb{P}$  можно ед. образом расширить до автоморфизма  $\mathfrak{D}$ .

Таким образом,  $\text{Aut}(\mathfrak{D})$  фактически состоит из перестановок  $\mathbb{P}$ .

**Упражнение 3.** Опишите автоморфизмы структуры  $\langle \mathbb{N}; \perp \rangle$ , где  $\perp$  интерпретируется как отношение взаимной простоты.

**Упражнение 4.** Рассмотрим нормальную структуру  $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}; =, B \rangle$ , где трехместный предикатный символ  $B$  интерпретируется как

$$\left\{ (r_1, r_2, r_3) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^3 \mid r_2 \text{ лежит между } r_1 \text{ и } r_3 \text{ на прямой} \right\}.$$

Покажите, что автоморфизмы этой структуры суть в точности биективные аффинные преобразования  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Пусть  $=$  содержится в  $\text{Pred}_\sigma$ , и  $\Phi \in \text{Sent}_\sigma$ . Обозначим

$$\text{Fin-Spec}(\Phi) := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{сущ. норм. } \sigma\text{-структура } \mathfrak{A} \text{ такая, что } \mathfrak{A} \models \Phi \text{ и } |A| = n\}.$$

Оно называется *конечным спектром*  $\Phi$ . С конечными спектрами связано немало важных проблем в теоретической информатике и не только.

**Упражнение 5.** Для каждого из уравнений ниже найдите подходящие сигнатуру  $\sigma$  и  $\sigma$ -предложение  $\Phi$ :

- $\text{Fin-Spec}(\Phi) = \{3 \times k \mid k \in \mathbb{N} \text{ и } k \neq 0\}$ ;
- $\text{Fin-Spec}(\Phi) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 1 \pmod{3}\}$ ;
- $\text{Fin-Spec}(\Phi) = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N} \text{ и } k \neq 0\}$ ;
- $\text{Fin-Spec}(\Phi) = \mathbb{P}$ ;
- $\text{Fin-Spec}(\Phi) = \{p^k \mid p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N} \text{ и } k \neq 0\}$ ;
- $\text{Fin-Spec}(\Phi) = \{5^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

(Всё это можно сделать с помощью одного общего метода.)

**Упражнение 6.** Пусть  $\text{Func}_\sigma = \text{Const}_\sigma = \emptyset$ , и  $\text{arity}_\sigma(P) = 1$  для любого  $P \in \text{Pred}_\sigma$ . Для произвольного  $\sigma$ -предложения  $\Phi$  положим

$$\rho(\Phi) := \text{число предикатных символов в } \Phi.$$

Докажите, что для каждого  $\Phi \in \text{Sent}_\sigma$  следующие условия эквивалентны:

- существует  $\sigma$ -структура  $\mathfrak{A}$  такая, что  $\mathfrak{A} \models \Phi$ ;
- существует  $\sigma$ -структура  $\mathfrak{A}$  такая, что  $\mathfrak{A} \models \Phi$  и  $|A| \leq 2^{\rho(\Phi)}$ .