

О конгруэнциях

Пусть дана некоторая σ -структура \mathfrak{A} . Мы будем называть $R \subseteq A \times A$ *отношением конгруэнции* (или просто *конгруэнцией*) на \mathfrak{A} , если оно обладает следующими свойствами:

- a. R является эквивалентностью на A ;
- b. для каждого $f^n \in \text{Func}_\sigma$ и любых $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\} \subseteq A$,

$$a_1 R b_1, \dots, a_n R b_n \implies f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) R f^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_n);$$

- c. для каждого $P^n \in \text{Pred}_\sigma \setminus \{=\}$ и любых $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\} \subseteq A$,

$$a_1 R b_1, \dots, a_n R b_n \text{ и } P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \implies P^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_n).$$

Главным образом нас будут интересовать «алгебры», т.е. нормальные структуры в сигнатурах, в которых единственным предикатным символом является выделенный символ равенства $=$; поэтому (с) можно будет опустить.

Упражнение 1. Пусть σ — сигнатура булевых алгебр, т.е. $\langle =, \wedge, \vee, \neg; 0, 1 \rangle$, и пусть \mathfrak{A} — некоторая булева алгебра в этой сигнатуре. Будем называть непустое $I \subseteq A$ *идеалом* \mathfrak{A} , если оно обладает следующими свойствами:

- a. для любых $a_1, a_2 \in I$ верно $a_1 \vee a_2 \in I$;
- b. для любых $a_1 \in I$ и $a_2 \in A$ верно $a_1 \wedge a_2 \in I$.

Докажите, что для $R \subseteq A^2$ следующие условия эквивалентны:

- i. R является конгруэнцией на \mathfrak{A} ;
- ii. существует идеал $I \subseteq A$ такой, что

$$R = \{(a_1, a_2) \in A^2 \mid \text{существует } a_3 \in I \text{ такой, что } a_1 \vee a_3 = a_2 \vee a_3\}.$$

Упражнение 2. Пусть σ — это стандартная сигнатура теории групп, т.е. $\langle =, *, (\cdot)^{-1}; e \rangle$, и пусть \mathfrak{G} — некоторая группа в этой сигнатуре. Для удобства мы будем отождествлять подгруппы \mathfrak{G} с их носителями. Докажите, что для $R \subseteq G^2$ следующие условия эквивалентны:

- i. R является конгруэнцией на \mathfrak{G} ;
- ii. существует нормальная подгруппа $H \subseteq G$ такая, что

$$R = \{(g_1, g_2) \in G^2 \mid g_1 H = g_2 H\},$$

где gH обозначает $\{g * h \mid h \in H\}$.

Первопорядковая выводимость

Дедуктивно эквивалентные формулы можно заменять друг на друга в любом контексте:

Упражнение 1. Пусть $\vdash \Phi \leftrightarrow \Psi$. Тогда для всякой $\Theta \in \text{Form}_\sigma$ верно $\vdash \Theta \leftrightarrow \Theta[\Phi/\Psi]$.

При надобности связанные переменные можно переименовывать:

Упражнение 2. Выведите в первопорядковом исчислении:

$\exists x \Phi \leftrightarrow \exists y \Phi(x/y)$, где y — переменная, не входящая в Φ . *%на лекции было для \forall*

(Разумеется, здесь речь идёт о схеме формул, причём Φ может иметь свободные переменные, отличные от x , а потому $\exists x \Phi$ не обязана быть предложением.)

Далее, можно получить «кванторные аналоги законов де Моргана»:

Упражнение 3. Выведите в первопорядковом исчислении:

i. $\neg \exists x \Phi \leftrightarrow \forall x \neg \Phi$;

ii. $\neg \forall x \Phi \leftrightarrow \exists x \neg \Phi$.

%обратная импликация была на лекции

Стоит также отметить, что в определённом смысле \forall ведёт себя дистрибутивно относительно \wedge , а \exists — относительно \vee ; впрочем по природе это скорее ассоциативность.

Упражнение 4. Выведите в первопорядковом исчислении:

i. $(\forall x \Phi \wedge \forall x \Psi) \leftrightarrow \forall x (\Phi \wedge \Psi)$;

ii. $(\exists x \Phi \vee \exists x \Psi) \leftrightarrow \exists x (\Phi \vee \Psi)$;

Вместе с тем на практике более полезным оказывается трюк с последовательным вынесением кванторов:

Упражнение 5. Выведите в первопорядковом исчислении:

i. $(\forall x \Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow \forall x (\Phi \wedge \Psi)$, где $x \notin \text{FV}(\Psi)$;

%фактически частный случай 4(i)

ii. $(\exists x \Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow \exists x (\Phi \wedge \Psi)$, где $x \notin \text{FV}(\Psi)$;

iii. $(\forall x \Phi \vee \Psi) \leftrightarrow \forall x (\Phi \vee \Psi)$, где $x \notin \text{FV}(\Psi)$;

iv. $(\exists x \Phi \vee \Psi) \leftrightarrow \exists x (\Phi \vee \Psi)$, где $x \notin \text{FV}(\Psi)$.

%фактически частный случай 4(ii)

Упражнения 1–3, 5 лежат в основе синтаксической версии алгоритма приведения первопорядковых формул к пренексным нормальным формам.

Упражнение 6. Для всякой σ -формулы Φ найдется п.н.ф. Φ' такая, что $\vdash \Phi \leftrightarrow \Phi'$.

09.04.2019