Аксиоматизируемые классы

Упражнение 1. Пусть σ — сигнатура теории колец/полей. Здесь под *кольцами* мы будем всюду понимать коммутативные кольца с единицей. Возьмём

$$\sigma' \;:=\; \sigma \cup \{I\},$$

где I — новый одноместный предикатный символ. Для всякой σ-структуры $\mathfrak{A}$ и каждого $B \subseteq A$ обозначим σ'-обогащение $\mathfrak{A}$, в котором I интерпретируется как B, через $\langle \mathfrak{A}, B \rangle$.

a. Докажите, что класс всех колец конечно аксиоматизируем.

b. Постройте σ'-предложение Φ такое, что для любых кольца $\mathfrak{A}$ и $B \subseteq A$,

$$\langle \mathfrak{A}, B \rangle \Vdash \Phi \quad\Longleftrightarrow\quad B \text{ — идеал } \mathfrak{A}.$$

c. Постройте σ'-предложение Φ такое, что для любых кольца $\mathfrak{A}$ и $B \subseteq A$,

$$\langle \mathfrak{A}, B \rangle \Vdash \Phi \quad\Longleftrightarrow\quad B \text{ — максимальный идеал } \mathfrak{A}.$$

Напоминаю, под *кольцом главных идеалов* понимают такое кольцо, каждый идеал которого является главным.

Упражнение 2. Докажите, что класс всех колец главных идеалов не аксиоматизируем.

Инфинитезималы

Упражнение 1. Вычислите производную $f := \lambda x.\left[x^3\right]$ с помощью инфинитезималов.

Упражнение 2. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и $s \in \mathbb{R}$. Покажите, что следующие условия эквивалентны:

i. f сходится к s в обычном смысле;[1]

ii. для любого бесконечного $a \in \mathbb{N}^\sharp$ верно $f^\sharp(a) \approx s$.

Упражнение 3. Пусть $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ сходятся к соответственно $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Покажите, что

$$f_1 + f_2 \;:=\; \lambda n.[f_1(n) + f_2(n)] \quad \text{и} \quad f_1 \cdot f_2 \;:=\; \lambda n.[f_1(n) \cdot f_2(n)]$$

сходятся к соответственно $s_1 + s_2$ и $s_1 \cdot s_2$.

Упражнение 4. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ и $s \in \mathbb{R}$. Покажите, что следующие условия эквивалентны:

i. s является предельной точкой A в обычном смысле;[2]

ii. существует $a \in A^\sharp$ такая, что $a \approx s$ и $a \neq s$.

Замечание. Предельная точка A не обязана лежать в самом A.

Упражнение 5 (один из вариантов теоремы Больцано–Вейерштрасса)**.** Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ бесконечно и ограничено (одновременно сверху и снизу). Покажите, что у A есть предельная точка.

---

[1] Иными словами, для всякого положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$ найдётся $k \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$,

$$n \;>\; k \quad \Longrightarrow \quad |f(n) - s| \;<\; \varepsilon.$$

[2] Иными словами, для всякого положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$ найдётся $r \in A$ такое, что $0 < |r - s| < \varepsilon$.