Дополнительные упражнения

Упражнение 1. Выведите в первопорядковом исчислении:

i. $\exists x\, \forall y\, \Phi \to \forall y\, \exists x\, \Phi$;

ii. $\exists x\, (\Phi \wedge \Psi) \to \exists x\, \Phi \wedge \exists x\, \Psi$;

iii. $\forall x\, \Phi \vee \forall x\, \Psi \to \forall x\, (\Phi \vee \Psi)$.

Покажите, что никакая из обратных импликаций не выводима в первопорядковом исчислении.

Упражнение 2. Напоминаю, что под *сигнатурой теории абелевых групп* понимается

$$\sigma \ := \ \langle =^2; +^2, -^1; 0 \rangle;$$

$\mathcal{K}_{\mathsf{cyc}}$ обозначает класс всех циклических групп. Докажите, что у $\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_{\mathsf{cyc}})$ есть счётная модель, которая не является циклической группой.

Можно сказать, что «$\mathcal{K}_{\mathsf{cyc}}$ не аксиоматизируем даже в мощности не более $\aleph_0$».

Упражнение 3. Договоримся, что под *сигнатурой колец/полей* понимается

$$\sigma \ := \ \langle =^2; \cdot^2, \times^2, -^1; 0, 1 \rangle.$$

Для каждого $p \in \{0\} \cup \mathbb{P}$ положим

$$\mathcal{K}_p \ := \ \text{класс всех полей характеристики } p.$$

Докажите, что для любого σ-предложения Φ существует достаточно большое $N_\Phi \in \mathbb{N}$ такое, что из $\Phi \in \mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_0)$ следует $\Phi \in \mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_p)$ для всех простых $p > N_\Phi$.[1]

Стало быть, $\mathcal{K}_0$ аксиоматизируем, но не конечно аксиоматизиуем.

[1]Иными словами, всякое предложение Φ, истинное во всех полях характеристики 0, истинно и во всех полях характеристики p для достаточно больших простых p.