

Примеры вопросов для первого этапа

1. Что такое гомоморфизм? Изоморфизм? Автоморфизм?
2. Сколько автоморфизмов у $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$? Сколько автоморфизмов у $\langle \mathbb{N}; < \rangle$? Ответы обосновать.
3. Выведите $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q$ в исчислении естественной дедукции для PCL.¹
4. Выведите $\neg \exists x \Phi \leftrightarrow \forall x \neg \Phi$ в гильбертовском исчислении для FOCL.
5. Сформулируйте лемму о расширении (а.к.а. теорему Хенкина) для FOCL.
6. Сформулируйте теорему компактности для FOCL.
7. Что можно сказать об аксиоматизируемости класса всех конечных полей?
8. Что можно сказать об аксиоматизируемости класса всех делимых абелевых групп?
9. Что такое конгруэнция?
10. Охарактеризуйте конгруэнции в теории групп.
11. Что такое булева алгебра?
12. Охарактеризуйте конгруэнции в булевых алгебрах.
13. Сформулируйте теорему Лёвенгейма–Сколема.
14. Что такое аксиомы равенства для данной сигнатуры с равенством?
15. Пусть $\mathfrak{R}^\#$ — нестандартная модель вещественных чисел [из лекций]. Определите множества \mathbb{F} (все конечные числа) и \mathbb{I} (все инфинитезимальные) в $\mathfrak{R}^\#$.
16. Верно ли, что \mathbb{F} является идеалом в $\mathfrak{R}^\#$, рассматриваемом как кольцо?² Ответ обосновать.
17. Верно ли, что $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$? Ответ обосновать.
18. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ неограничено. Покажите, что $A^\#$ содержит нестандартные числа.
19. Теория Γ допускает (эффективную) элиминацию кванторов, если ...
20. Множество натуральных чисел называют разрешимым, если ..., и перечислимым, если ...
21. Что такое пренексная нормальная форма (п.н.ф.)? Верно ли, что всякая формула дедуктивно эквивалентна некоторой п.н.ф.?
22. Как строится сколемизация произвольной п.н.ф.
23. Что такое «метод автоморфизмов»? Приведите пример применения.
24. Сформулируйте основные свойства простых теорий в FOCL.
25. Терм t называют свободным для (подстановки вместо) переменной x в формулу Φ , если ...
26. Сформулируйте кванторные аксиомы и правила гильбертовского исчисления для FOCL.
27. Образуют ли разрешимые множества булеву алгебру? А перечислимые множества?

¹PCL — пропозициональная классическая логика, а FOCL — классическая логика первого порядка.

²Здесь подразумевается знание понятие идеала кольца, разумеется.

28. Дайте определение предела в терминах инфинитезимальных.
29. Разрешимость каких теорий доказывалась методом элиминации кванторов в курсе?
30. Пусть у теории Γ есть сколь угодно большие конечные модели. Верно ли, что у Γ есть и бесконечные модели? Ответ обосновать.
31. Посчитайте производную $\lambda x. [x^3]$ в точке $r \in \mathbb{R}$ в терминах инфинитезимальных.
32. Приведите все критерии (альтернативные определения) перечислимости из курса.
33. Опишите семантику для PCL.
34. Что такое полулинейное множество? Как это связано с арифметикой Пресбургера?
35. Приведите полную аксиоматизацию для упорядоченной группы целых чисел по сложению [в сигнатуре с единицей, но без дополнительных предикатов]. Можно ли провести элиминацию кванторов для соответствующей теории [без дополнительных предикатов]?
36. Какие подмножества \mathbb{Q} определимы в $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$?
37. Что такое конечный спектр предложения? Замкнуты ли конечные спектры относительно конечных пересечений и объединений? Ответ обосновать.
38. Опишите автоморфизмы $\langle \mathbb{N}; | \rangle$, где $|$ — отношение делимости.
39. Пусть сигнатура σ состоит из одноместных предикатных символов. Что можно сказать про выполнимость σ -формул (из упражнений)?
40. Опишите семантику для FOCL (означивания, их действие на термы и т.д.).
41. Сформулируйте утверждения о единственности представления формулы и рекурсивном определении подформулы для PCL.

.....

31.05.2020