

# Математическая логика (I): 1/16

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

# Про формальные слова

Пусть дан алфавит  $A$ . Под  $A$ -словами, или словами в алфавите  $A$ , понимают элементы  $A^*$ . Если  $w \in A^*$ , то  $|w|$  (которое совпадает с  $\text{dom}(w)$ ) называют длиной  $w$ .

Если  $\{w_1, w_2\} \subseteq A^*$ , то их конкатенацией называют  $A$ -слово

$$w_1 w_2 : |w_1| + |w_2| \rightarrow A,$$

определённое по правилу

$$w_1 w_2(i) := \begin{cases} w_1(i) & \text{если } i < |w_1|, \\ w_2(j) & \text{если } i = |w_1| + j. \end{cases}$$

Пусть  $w, w' \in A^*$ . Говорят, что  $w'$  является **подсловом**  $w$ , и пишут  $w' \preceq w$ , если  $w = v_0 w' v_1$  для некоторых  $\{v_0, v_1\} \subseteq A^*$ . Разумеется,  $\preceq$  оказывается фундированным частичным порядком на  $A^*$ .

Если  $w = v_0 w' v_1$ , то  $\langle w', |v_0| \rangle$  называется **вхождением** подслова  $w'$  в слово  $w$ . У данного подслова может быть несколько вхождений.

В дальнейшем, говоря о подсловах, мы будем в действительности нередко подразумевать их вхождения.

Возьмём в качестве  $A$  множество всех букв английского алфавита.  
Положим

$$w := \text{mathematics} \quad \text{и} \quad w' := \text{mat.}$$

Тогда  $w' \preceq w$ . Более того, у  $w'$  имеется ровно два вхождения в  $w$ :  $\langle w', 0 \rangle$  и  $\langle w', 5 \rangle$ . Или положим

$$u := \text{alalalalalong} \quad \text{и} \quad u' := \text{ala.}$$

Тогда  $u' \preceq u$ . Более того, у  $u'$  имеется ровно четыре вхождения в  $u$ :  $\langle u', 0 \rangle$ ,  $\langle u', 2 \rangle$ ,  $\langle u', 4 \rangle$  и  $\langle u', 6 \rangle$ ; однако тут некоторые вхождения *пересекаются*, а это не всегда хорошо.

Пусть  $\langle w', k \rangle$  — вхождение  $w'$  в  $w$ , т.е.  $w = v_0 w' v_1$ , где  $\{v_0, v_1\} \subseteq A^*$  и  $|v_0| = k$ . Тогда для каждого  $u \in A^*$  можно определить

$$w[w'/u, k] := v_0 u v_1,$$

т.е.  $w[w'/u, k]$  — это результат замены данного вхождения  $w'$  в  $w$  на  $u$ . Далее, в случае, когда никакие два различных вхождения  $w'$  в  $w$  не пересекаются, мы можем определить

$$w[w'/u] := \text{результат одновременной замены всех вхождений } w' \text{ в } w \text{ на } u.$$

Например, если  $w = \text{mathematics}$ ,  $w' = \text{mat}$  и  $u = \text{tam}$ , то  $w[w'/u]$  будет равно  $\text{tamhetamics}$ .

Давайте раз и навсегда зафиксируем некоторое счётное множество  $\text{Prop}$ . Мы будем называть его элементы **пропозициональными переменными**, или же просто **переменными**; в метаязыке их роль будут играть  $p, q, r, \dots$  (возможно, с индексами).

Язык  $\mathcal{L}$  классической пропозициональной логики состоит из элементов  $\text{Prop}$ , а также:

- ▶  $\rightarrow, \wedge, \vee$  и  $\neg$  (символы связок);
- ▶  $($  и  $)$  (вспомогательные символы).

Разумеется,  $\rightarrow, \wedge, \vee$  и  $\neg$  называют **символами импликации, конъюнкции, дизъюнкции и отрицания** соответственно.

Обозначим через **Form** наименьшее множество слов в алфавите  $\mathcal{L}$ , замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- ▶ если  $p \in \text{Prop}$ , то  $p \in \text{Form}$ ;
- ▶ если  $\{\phi, \psi\} \subseteq \text{Form}$ , то  $(\phi \rightarrow \psi) \in \text{Form}$ ;
- ▶ если  $\{\phi, \psi\} \subseteq \text{Form}$ , то  $(\phi \wedge \psi) \in \text{Form}$ ;
- ▶ если  $\{\phi, \psi\} \subseteq \text{Form}$ , то  $(\phi \vee \psi) \in \text{Form}$ ;
- ▶ если  $\phi \in \text{Form}$ , то  $\neg\phi \in \text{Form}$ .

Элементы **Form** называют **формулами**.

Заметим, что формул длины 0 не бывает, а формулы длины 1 суть в точности пропозициональные переменные.

Будем говорить, что  $\psi$  является **началом**  $\phi$ , и писать  $\psi \sqsubseteq \phi$ , если  $\phi = \psi v$  для некоторого  $v \in \mathcal{L}^*$ .

### Лемма

Пусть  $\{\phi, \psi\} \subseteq \text{Form}$  таковы, что  $\psi \sqsubseteq \phi$ . Тогда  $\psi = \phi$ .

### Доказательство.

Возвратная индукция по  $|\phi|$ .

Пусть  $\phi \in \text{Prop}$ . Тогда, очевидно,  $\psi = \phi$ .

Пусть  $\phi \notin \text{Prop}$ . Возможны два случая:

1.  $\phi$  имеет вид  $(\theta \circ \chi)$ , где  $\{\theta, \chi\} \subseteq \text{Form}$  и  $\circ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$ ;
2.  $\phi$  имеет вид  $\neg\theta$ , где  $\theta \in \text{Form}$ .

...

## Доказательство (продолжение).

В первом случае  $\psi$  должно иметь вид  $(\theta' * \chi')$ , где  $\{\theta', \chi'\} \subseteq \text{Form}$  и  $*$   $\in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$ . Ясно, что

$$\theta \sqsubseteq \theta' \quad \text{или} \quad \theta' \sqsubseteq \theta,$$

откуда  $\theta = \theta'$  по и.г. Далее,  $\circ$  должно совпасть с  $*$ , а значит,  $\chi' \sqsubseteq \chi$ , откуда уже  $\chi = \chi'$  по и.г. В итоге  $\phi = \psi$ .

Во втором случае  $\psi$  должно иметь вид  $\neg\theta'$ , где  $\theta' \in \text{Form}$ . Ясно, что  $\theta' \sqsubseteq \theta$ , откуда  $\theta = \theta'$  по и.г. В итоге  $\phi = \psi$ . □

## Предложение (о единственности представления формул)

Каждую  $\phi \in \text{Form} \setminus \text{Prop}$  можно един. образом представить в виде

$$(\theta \rightarrow \chi), \quad (\theta \wedge \chi), \quad (\theta \vee \chi) \quad \text{или} \quad \neg\theta,$$

где  $\{\theta, \chi\} \subseteq \text{Form}$ .

## Доказательство.

Ясно, что нужное представление существует. Нужно лишь проверить его единственность.

Пусть  $\phi = (\theta \circ \chi) = (\theta' * \chi')$ . Тогда  $\theta = \theta'$  по лемме выше. Получаем, что  $\circ$  и  $\chi$  должны совпасть с  $*$  и  $\chi'$  соответственно.

Пусть  $\phi = \neg\theta = \neg\theta'$ . Тогда, очевидно,  $\theta = \theta'$ . □

Для каждой  $\phi \in \text{Form}$  определим

$$\text{Sub}(\phi) := \{\psi \in \text{Form} \mid \psi \preceq \phi\}.$$

Элементы  $\text{Sub}(\phi)$  называют **подформулами**  $\phi$ .

### Лемма

*Пусть  $\phi \in \text{Form}$ . Тогда каждое вхождение  $\neg$  или  $($  в  $\phi$  является началом вхождения некоторой подформулы.*

### Доказательство.

Простая возвратная индукция по  $|\phi|$ . □

## Предложение

Пусть  $\phi \in \text{Form}$ .

- ▶ Если  $\phi \in \text{Prop}$ , то  $\text{Sub}(\phi) = \{\phi\}$ .
- ▶ Если  $\phi = (\theta \circ \chi)$ , где  $\{\theta, \chi\} \subseteq \text{Form}$  и  $\circ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$ , то

$$\text{Sub}(\phi) = \text{Sub}(\theta) \cup \text{Sub}(\chi) \cup \{\phi\};$$

- ▶ Если  $\phi = \neg\theta$ , где  $\theta \in \text{Form}$ , то

$$\text{Sub}(\phi) = \text{Sub}(\theta) \cup \{\phi\}.$$

## Доказательство.

Простая возвратная индукция по  $|\phi|$ . □

# Вопросы для самоконтроля

Пусть  $\{\phi, \psi\} \subseteq \text{Form}$  и  $\psi \preceq \phi$ . Верно ли, что никакие два различных вхождения  $\psi$  в  $\phi$  не пересекаются?

Пусть  $\{\phi, \psi, \theta\} \subseteq \text{Form}$ ,  $\psi \preceq \phi$  и  $\theta \preceq \phi$ . Верно ли, что если два вхождения соответственно  $\psi$  и  $\theta$  в  $\phi$  пересекаются, то одно из них будет полностью находиться внутри другого?

Под **оценкой** мы будем понимать произвольную функцию из Prop в 2, т.е. в  $\{0, 1\}$ . Интуитивно 0 — это «ложь», а 1 — «истина».

Далее, всякую  $v : \text{Prop} \rightarrow 2$  мы можем расширить до  $v^* : \text{Form} \rightarrow 2$  с помощью следующих эквивалентностей:

$$\begin{aligned}v^*(p) = 1 &\iff v(p) = 1; \\v^*(\phi \rightarrow \psi) = 1 &\iff v^*(\phi) \neq 1 \text{ или } v^*(\psi) = 1; \\v^*(\phi \wedge \psi) = 1 &\iff v^*(\phi) = 1 \text{ и } v^*(\psi) = 1; \\v^*(\phi \vee \psi) = 1 &\iff v^*(\phi) = 1 \text{ или } v^*(\psi) = 1; \\v^*(\neg\phi) = 1 &\iff v^*(\phi) \neq 1.\end{aligned}$$

При этом вместо  $v^*(\phi) = 1$  порой пишут  $v \Vdash \phi$ .

Таким образом,  $v^*$  задается по правилам:

$$\begin{aligned}v^*(p) &:= v(p); \\v^*(\phi \rightarrow \psi) &:= \max\{1 - v^*(\phi), v^*(\psi)\}; \\v^*(\phi \wedge \psi) &:= \min\{v^*(\phi), v^*(\psi)\}; \\v^*(\phi \vee \psi) &:= \max\{v^*(\phi), v^*(\psi)\}; \\v^*(\neg\phi) &:= 1 - v^*(\phi).\end{aligned}$$

Часто всё это изображают посредством **таблиц истинности**:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p$	$q$	$p \wedge q$	...
0	0	1	0	0	0	
0	1	1	0	1	0	
1	0	0	1	0	0	
1	1	1	1	1	1	

# Выполнимость и общезначимость

Формулу  $\phi$  называют:

- ▶ **выполнимой**, если  $v \models \phi$  для некоторой оценки  $v$ ;
- ▶ **общезначимой**, если  $v \models \phi$  для всех оценок  $v$ .

Общезначимые формулы ещё называют **тождественно истинными**, или **тавтологиями**. Очевидно,

$$\phi \text{ общезначима} \iff \neg\phi \text{ не выполнима.}$$

Теорема (Кук–Левин; должно быть в курсе ТИ)

*Проблема выполнимости для проп. кл. логики NP-полна.*

Пусть  $\Gamma \subseteq \text{Form}$  и  $\phi \in \text{Form}$ . Говорят, что  $\phi$  семантически следует из  $\Gamma$ , и пишут  $\Gamma \models \phi$ , если для любой оценки  $v$ ,

$$v \Vdash \psi \quad \text{для всех } \psi \in \Gamma \quad \implies \quad v \Vdash \phi.$$

Вместо  $\emptyset \models \phi$  обычно пишут  $\models \phi$ . Очевидно,

$$\models \phi \iff \phi \text{ общезначима.}$$

Наконец, формулы  $\phi$  и  $\psi$  называют семантически эквивалентными, если  $\models \phi \leftrightarrow \psi$ ; при этом пишут  $\phi \equiv \psi$ .