Математическая логика (I): 10/16

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

О порядке в моделях арифметики

Пусть $\mathfrak{A}$ — нестандартная модель $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$.

Сегодня мы дадим довольно подробное описание того, как устроено отношение, определяемое формулой $x < y$ в $\mathfrak{A}$.

Некоторые общие свойства этого отношения легко получить из условия $\mathfrak{A} \Vdash \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Например, в $\mathfrak{A}$ истинны:

- $\forall x\, x \not< x$;
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x < y \wedge y < z \to x < z)$;
- $\forall x\, \forall y\, (x \neq y \to x < y \vee y < x)$;
- $\forall x\, (x \neq 0 \to 0 < x)$;
- $\forall x\, \exists y\, (x < y)$;
- $\forall x\, (x < \mathrm{s}(x) \wedge \neg \exists u\, (x < u \wedge u < \mathrm{s}(x)))$.

С другими свойствами дела обстоят сложнее.

Напоминаю, что $\mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$ обозначает множество всех значений нумералов в $\mathfrak{A}$; его элементы называют стандартными. Мы знаем, что:

- $\mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$ образует начальный сегмент, изоморфный $\mathfrak{N}$;
- всякий нестандартный элемент больше всех стандартных.

Рассуждая *внутри* $\mathfrak{A}$, мы будем отождествлять:

- символы σ с их интерпретациями в $\mathfrak{A}$;
- формулы с определяемыми ими в $\mathfrak{A}$ отношениями.

Так, запись $a < b$ будет означать $\mathfrak{A} \Vdash a < b$ — или более формально, $\mathfrak{A} \Vdash x < y\,[x/a, y/b]$. Мы будем писать $a + b$ вместо $a +^{\mathfrak{A}} b$, и т.д.

При этом мы будем свободно пользоваться свойствами, *выразимыми посредством σ-предложений*. Например, в $\mathfrak{A}$ истинны:

- $\forall x \, \forall y \, \forall z \, ((x + y) + z = x + (y + z))$;
- $\forall x \, \forall x \, x + y = y + x$.

Значит, $+^{\mathfrak{A}}$ ассоциативно и коммутативно. С другой стороны, нельзя использовать аналоги свойств вроде

«Во всяком непустом $S \subseteq \mathbb{N}$ есть минимальный элемент».

На самом деле, его непосредственный аналог

«Во всяком непустом $S \subseteq A$ есть минимальный элемент».

опровергается, поскольку можно взять $S := \overline{\mathrm{St}}^{\mathfrak{A}}$. Тем не менее,

$$\mathfrak{A} \Vdash \exists x \, \Phi(x) \to \exists x \, (\Phi(x) \wedge \neg \exists u \, (\Phi(u) \wedge u < x)),$$

т.е. для S, определимых в $\mathfrak{A}$, принцип минимального элемента верен.

Чтобы лучше разобраться в свойствах $<$, зададим на A специальное бинарное отношение $\approx$:

$$a \approx b \quad := \quad \text{найдутся } n, m \in \mathbb{N} \text{ такие, что } a + \underline{n} = b + \underline{m}.$$

Стоит отметить, что это «метаопределение», т.е. $\approx$ не определимо в самой $\mathfrak{A}$; основная причина в том, что St не определимо в $\mathfrak{A}$.

Замечание

В арифметике $a + \underline{n} = b + \underline{m}$ равносильно $a = b + \underline{m - n}$, если $n \leqslant m$, и $a + \underline{n - m} = b$ в противном случае. Значит,

$$a \approx b \quad \Longleftrightarrow \quad \text{найдётся } n \in \mathbb{N} \text{ т., ч. } a = b + \underline{n} \text{ или } a + \underline{n} = b.$$

К слову, это можно переписать без явного использования $+$, так как

$$\mathfrak{A} \Vdash \forall x \forall y \, (x + \underline{n} = \underbrace{s \ldots s}_{n \text{ штук}}(x)).$$

Предложение

$\approx$ является отношением эквивалентности на A.

Доказательство.

Рефлексивность и симметричность $\approx$ очевидны. Остаётся проверить, что $\approx$ тразитивно. Пусть $a \approx b$ и $b \approx c$, т.е.

$$a + \underline{n} \;=\; b + \underline{m} \quad \text{и} \quad b + \underline{k} \;=\; c + \underline{l}.$$

для некоторых $n, m, k, l \in \mathbb{N}$. Как нетрудно убедиться,

$$a + \underline{n} + \underline{k} \;=\; b + \underline{m} + \underline{k} \;=\; b + \underline{k} + \underline{m} \;=\; c + \underline{l} + \underline{m}.$$

Отсюда $a + \underline{n + k} = c + \underline{l + m}$. Стало быть, $a \approx c$. $\square$

Теперь A разбивается на классы эквивалентности по $\approx$, называемые галактиками, а роль вселенной достаётся фактор-множеству A по $\approx$, которое мы для удобства обозначим через $\mathscr{U}$.

Замечание

Легко видеть, что для любого $a \in A$,

$$a \approx 0 \iff a \in \mathrm{St}.$$

Стало быть, St является галактикой.

Доказательство замечания.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $a \approx 0$, т.е. $a + \underline{n} = 0 + \underline{m}$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$. Тогда $a \leqslant \underline{m}$, откуда $a \in \mathrm{St}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $a \in \mathrm{St}$, т.е. $a = \underline{n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $0 + \underline{n} = a$, откуда $a \approx 0$. $\square$

Теорема

Пусть $G \in \mathscr{U}$.

i. *Если* $0 \in G$, *то* $G = \mathrm{St}$ *и* $\langle G, < \cap\, G^2 \rangle \simeq \langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$.

ii. *Если* $0 \notin G$, *то* $G \neq \mathrm{St}$ *и* $\langle G, < \cap\, G^2 \rangle \simeq \langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} \rangle$.

(Здесь $<_{\mathbb{N}}$ *и* $<_{\mathbb{Z}}$ *суть естественные строгие порядки на* $\mathbb{N}$ *и* $\mathbb{Z}$*.)*

Доказательство.

$\boxed{\text{i.}}$ Очевидно.

$\boxed{\text{ii.}}$ Пусть $0 \notin G$. Ясно, что $G \cap \mathrm{St} = \varnothing$. Осталось показать, что

$$\langle G, < \cap\, G^2 \rangle \;\simeq\; \langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} \rangle.$$

...

Доказательство (продолжение).

Заметим, что

$$\mathfrak{A} \Vdash \forall x \, \forall y \, (x \leqslant y \to \exists! z \; x + z = y).$$

Если $a \leqslant b$, за $b - a$ мы будем обозначать единственное c такое, что $a + c = b$. В частности, если $a \in G$ и $n \in \mathbb{N}$, то $\underline{n} < a$, и запись $a - \underline{n}$ осмыслена; при этом $a - \underline{n} \approx a$, откуда $a - \underline{n} \in G$.

Теперь зафиксируем какое-нибудь $a_0 \in G$. Ясно, что

$$G \;=\; \{a_0 \pm \underline{n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Кроме того, мы имеем следующую цепочку строгих неравенств:

$$\ldots \;<\; a_0 - \underline{2} \;<\; a_0 - \underline{1} \;<\; a_0 \;<\; a_0 + \underline{1} \;<\; a_0 + \underline{2} \;<\; \ldots$$

Стало быть, $\langle G, < \cap \, G^2 \rangle$ изофорфно $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} \rangle$. □

Наконец, зададим на $\mathscr{U}$ глобальный строгий порядок $\sqsubset$:

$$G_1 \sqsubset G_2 \quad := \quad a < b \quad \text{для любых } a \in G_1 \text{ и } b \in G_2,$$

Легко убедиться, что это бинарное отношение действительно иррефлексивно и транзитивно.

Лемма

Для любых $G_1, G_2 \in \mathscr{U}$ следующие условия эквивалентны:

i. $G_1 \sqsubset G_2$;

ii. $G_1 \neq G_2$, *и* $a < b$ *для некоторых* $a \in G_1$ *и* $b \in G_2$.

Доказательство.

$\boxed{\text{i.} \Longrightarrow \text{ii.}}$ Очевидно.

...

Доказательство (продолжение).

ii. $\Longrightarrow$ i. Пусть $G_1 \neq G_2$ и $a < b$ для некоторых $a \in G_1$ и $b \in G_2$. Мы покажем следующее:

1. $a' < b$ для всех $a' \in G_1$;
2. $a < b'$ для всех $b' \in G_2$.

Пусть $a' \in G_1$. Поскольку $a' \approx a$, найдётся $n \in \mathbb{N}$ такое, что $a = a' + \underline{n}$ или $a' = a + \underline{n}$. Отдельно рассмотрим эти два случая.

- Пусть $a = a' + \underline{n}$. Тогда $a' \leqslant a < b$, откуда $a' < b$.
- Пусть $a' = a + \underline{n}$. Заметим, что для каждого $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \forall x\, \forall y\, ((x \leqslant y \leqslant x + \underline{m}) \leftrightarrow (y = x \vee \cdots \vee y = x + \underline{m})).$$

  Поэтому $b \nleqslant a'$, так как иначе $a < b \leqslant a + \underline{n}$, откуда $a \approx b$ — это противоречит $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Стало быть, $a' < b$.

Аналогично для (2). Наконец, из (1–2) легко получить $G_1 \sqsubset G_2$. $\square$

Достаточно полное описание строения $\sqsubset$ даёт:

Теорема

i. $\sqsubset$ *линеен (как порядок на* $\mathscr{U}$*).*

ii. St *является наименьшим элементом в* $\langle \mathscr{U}, \sqsubset \rangle$.

iii. *в* $\langle \mathscr{U}, \sqsubset \rangle$ *нет наибольшего элемента.*

iv. $\sqsubset$ *плотен.*

Доказательство.

i–ii. Очевидно.

...

Доказательство (продолжение).

iii. Пусть $G \in \mathscr{U}$.

Предположим, что $G = \mathrm{St}$. Возьмём произвольный $a \in \overline{\mathrm{St}}$. Очевидно, $G \sqsubset [a]$, где $[a]$ — класс эквивалентности a по $\approx$.

Предположим, что $G \neq \mathrm{St}$. Зафиксируем какой-нибудь $a \in G$. Тогда:

- $a < a + a$, поскольку $a \neq 0$;
- $a \not\approx a + a$, так как иначе найдётся $n \in \mathbb{N}$ такое, что $a + a = a + \underline{n}$, откуда $a = \underline{n}$ — противоречие с $G \cap \mathrm{St} = \varnothing$.

Стало быть, $G = [a] \sqsubset [a + a]$.

...

Доказательство (продолжение).

iv. Рассмотрим понятие «быть чётным»:

$$\mathrm{Even}(x) \;:=\; \exists u\, x = u + u.$$

Заметим, что $\mathfrak{A} \Vdash \forall x\,(\mathrm{Even}(x) \leftrightarrow \neg\mathrm{Even}(\mathrm{s}(x)))$. Стало быть, в любой галактике есть как чётные, так и нечётные элементы.

Пусть $G_1 \sqsubset G_2$. Возьмём $a \in G_1$ и $b \in G_2$ одинаковой чётности. Тогда $a + b$ четно, а потому существует (единственное) c такое, что

$$a + b \;=\; c + c.$$

Далее, используя известные свойств неравенств, мы получаем

$$a + a \;<\; a + b \;=\; c + c \;=\; a + b \;<\; b + b,$$

откуда $a < c < b$. Теперь давайте проверим, что $c \not\approx a$ и $c \not\approx b$.

...

Доказательство (продолжение).

Пусть $c \approx a$. Значит, найдётся $n \in \mathbb{N}$ такое, что $c = a + \underline{n}$. Тогда

$$a + b \;=\; a + \underline{n} + a + \underline{n} \;=\; a + a + \underline{n} + \underline{n} \;=\; a + a + \underline{2n},$$

откуда $b = a + \underline{2n}$. Следовательно, $a \approx b$ — противоречие с $G_1 \neq G_2$. Стало быть, $c \not\approx a$. Аналогичным образом $c \not\approx b$.

В итоге $G_1 = [a] \sqsubset [c] \sqsubset [b] = G_2$. □

XVII век

- 1684: Лейбниц

  Первая публикация по дифференциальному исчислению.

  «Найти касательную — значит провести прямую, соедин. две точки кривой, расстояние между которыми бескон. мало».

- 1696: Лопиталь (в контакте с Бернулли ст.)

  Первый учебник мат. анализа: «Анализ бесконечно малых». В основе — научное наследие Лейбница и Ньютона.

  Лейбниц: «Бесконечно малое — количество, меньшее любого могущего быть заданным количества».

  Ньютон: «Бесконечно близкие — количества с исчезающей разностью, стремящиеся к равенству».

XVIII век

Постоянное, эффективное применение бесконечно малых.

Вместе с тем на протяжении многих лет и Эйлера, и Лагранжа критиковали за «неверное обоснование анализа».

1734: Теолог эпископ Беркли критиковал тогдашних аналитиков, соглашаясь с их выводами, но не с методами.

1759: Д'Аламбер: «Бесконечно малые на самом деле не существуют ни в природе, ни в допущениях геометров».

XIX век

Больцано, Коши, Вейерштрасс.

Обоснование анализа с помощью теории пределов.

Эти достижения изложены во всяком современном уч. анализа.

Больцано ввел новый канон строгости в анализе.

Коши: «Бесконечно малая — это функция с нулевым пределом»; однако в своём определении предела Коши использовал не ε-δ, а специальные «переменные количества».

Вейерштрассом была разработана *эпсилон-дельта техника*.

Начало XX века

Недоверие к идее (актуального) бесконечно малого усиливается переустройством математики на основе теории множеств.

1934: Лузин выражал противоречивые взгляды:

«Не отрицая форм. возможности определить идею постоянного беск. малого, современный анализ рассматривает эту идею как совершенно бесплодную, *так как ввести такое бесконечно малое в исчисление оказывается невозможным*».

«Имеются какие-то глубоко скрытые причины, ещё до сих пор не выясненные полностью, которые заставляют наш ум быть расположенным к актуальным бесконечно малым».

«Актуально [бесконечно] малые будут совершенно реабилитированы с полной научной точки зрения».

1961 год

Абрахам Робинсон публикует свой «Нестандартный анализ».

В этой книге даётся современное обоснование метода (актуальных) бесконечно малых. В основе — теоретико-модельный подход.

Здесь бесконечно малые суть актуальные математические объекты, но всё же отделённые от «обычных чисел» и живущие в специальном расширении «стандартной модели».

Замечание

В 1977 году публикуется статья

> Nelson, E. Internal set theory: A new approach to nonstandard analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.* 3:3, 11650–1198, 1977.

Под внутренней теорией множеств — сокращенно IST — понимается специальная теория в сигнатуре

$$\langle =^2, \in^2, \mathrm{St}^1 \rangle,$$

вдохновлённая подходом Робинсона. При этом IST оказывается *консервативным расширением* ZFC: для любого $\langle =, \in \rangle$-предложения Φ,

$$\mathrm{IST} \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{ZFC} \vdash \Phi.$$

Значит, можно свободно пользоваться «нестандартными множествами» из IST в ходе получения результатов об «обычных множествах» из ZFC. Это полностью легитимизирует беск. большие и малые.

Замечание

Ещё Лейбниц — чьими обозначениями dx и $\int$ мы пользуемся по сей день — предсказывал, что метод бесконечно малых будет полностью легитимизирован в будущем.

Кроме того, Лейбниц мечтал об универсальных языке и исчислении, с помощью которых можно решать разнообразные задачи, в связи с чем уместно упомянуть:

- сильно полные исчисления для логики первого порядка;
- универсальные машины Тьюринга (своего рода ОС);
- современные разработки систем автоматического поиска доказательств и proof-ассистентов.

Основы нестандартного анализа (Робинсон)

Чтобы не размениваться на мелочи, зафиксируем «мегаломанскую сигнатуру» σ, где

$$\mathrm{Pred}_\sigma \;:=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} \{\underline{P} \mid P \subseteq \mathbb{R}^n\},$$

$$\mathrm{Func}_\sigma \;:=\; \bigcup_{m\in\mathbb{N}_+} \{\underline{f} \mid f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\} \quad \text{и} \quad \mathrm{Const}_\sigma \;:=\; \{\underline{c} \mid c \in \mathbb{R}\},$$

причём arity_σ задаётся естественным образом; будем считать, что

$$0,\;\; 1,\;\; +,\;\; -,\;\; \cdot,\;\; |\cdot|,\;\; < \;\; \text{и} \;\; =$$

содержатся в σ (или точнее, отождествляются с подходящими символами в σ). Обозначим σ-структуру с носителем $\mathbb{R}$, в которой все символы σ интерпретируются обычным образом, через $\mathfrak{R}$.

Действуя по аналогии с арифметикой, возьмём

$$\sigma' \; := \; \sigma \cup \{c\},$$

где c — новый константый символ. Рассмотрим σ'-теорию

$$\Gamma \; := \; \mathrm{Th}\,(\mathfrak{N}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Легко видеть, что Γ локально выполнима. Значит, у Γ есть модель $\mathfrak{A}$; при этом мы можем считать, что $|A| \leqslant |\mathrm{Sent}_\sigma| = 2^{2^{\aleph_0}}$. Обозначим σ-обеднение $\mathfrak{A}$ через $\mathfrak{N}^\sharp$. Ясно, что:

- $\mathfrak{N}^\sharp$ является моделью $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N})$;
- $\lambda r.[\underline{r}^{\mathfrak{N}^\sharp}]$ вкладывает $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}^\sharp$ (ввиду замкнутости $\mathfrak{N}$).

В частности, $|A| = 2^{2^{\aleph_0}}$, т.е. $\mathfrak{N}^\sharp$ имеет мощность $2^{2^{\aleph_0}}$; однако для нас это обстоятельство несущественно.

Замечание

$\mathfrak{R}^\sharp$ и $\mathfrak{R}$ не изоморфны.

Доказательство замечания.

Пусть ξ — изоморфизм из $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{R}^\sharp$. Возьмём

$$\mathbf{r} \ := \ c^{\mathfrak{A}}$$

(см. выше). Тогда $\mathbf{r} = \xi(r)$ для некот. $r \in \mathbb{R}$. Существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $r \leqslant n$, т.е. $\mathfrak{R} \Vdash r \leqslant \underline{n}$. Отсюда $\mathfrak{R}^\sharp \Vdash \mathbf{r} \leqslant \underline{n}$ — противоречие. $\square$

Немного повозившись, в носителе $\mathfrak{R}^\sharp$ можно заменить каждое $\underline{r}^{\mathfrak{R}^\sharp}$ на r . Отныне будем считать, что $\underline{r}^{\mathfrak{R}^\sharp} = r$ для всех $r \in \mathbb{R}$.

Замечание

В $\mathfrak{R}^\sharp$ у ненулевых элементов есть обратные:

$$\mathfrak{R}^\sharp \Vdash \forall x\, (x \neq 0 \to \exists! y\; x \cdot y = 1).$$

Интуитивно **r** является бесконечно большим (относительно обычных натуральных, а значит, и вещественных чисел). Поэтому обратный к **r** оказывается ненулевым бесконечно малым. Кроме того, если архимедовость понимается как

«для всякого $x > 0$ найдётся $n \in \mathbb{N}$ такое, что $nx > 1$»,

то $\mathfrak{R}^\sharp$ как поле, разумеется, не является архимедовым.

Для удобства введём сокращения

$$P^\sharp \;:=\; \underline{P}^{\mathfrak{R}^\sharp} \quad \text{и} \quad f^\sharp \;:=\; \underline{f}^{\mathfrak{R}^\sharp},$$

где $\underline{P} \in \mathrm{Pred}_{\underline{\sigma}}$ и $\underline{f} \in \mathrm{Func}_{\underline{\sigma}}$. При этом мы считаем, что

$$+^\sharp \;:=\; +^{\mathfrak{R}^\sharp} \quad -^\sharp \;:=\; -^{\mathfrak{R}^\sharp} \quad \cdot^\sharp \;:=\; \times^{\mathfrak{R}^\sharp}$$

$$|\cdot|^\sharp \;:=\; |\cdot|^{\mathfrak{R}^\sharp} \quad \text{и} \quad <^\sharp \;:=\; <^{\mathfrak{R}^\sharp};$$

вместо $=^{\mathfrak{R}^\sharp}$ пишем $=$. С константами ничего не делаем, так как

$$\underline{r}^{\mathfrak{R}^\sharp} \;=\; r \quad \text{для каждого} \quad r \in \mathbb{R}.$$

Элементы $\mathbb{R}^\sharp$ иногда называют гипервещественными числами; те из них, что лежат в $\mathbb{R}$, стандартны, а остальные — нестандартны.

Замечание

Множество $\mathbb{R}$ можно рассматривать как одноместный предикат на $\mathbb{R}$. Тогда, поскольку $\mathfrak{R} \Vdash \forall x\, \underline{\mathbb{R}}\,(x)$, мы имеем $\mathfrak{R}^\sharp \Vdash \forall x\, \underline{\mathbb{R}}\,(x)$, т.е.

$$\underbrace{\text{носитель } \mathfrak{R}^\sharp}_{A} = \underline{\mathbb{R}}^{\mathfrak{R}^\sharp} = \mathbb{R}^\sharp.$$

Хотя мы будем пользоваться свойствами, выразимыми посредством σ-предложений, тут нельзя использовать аналоги свойств вроде

«У всякого ограниченного $S \subseteq \mathbb{R}$ есть супремум».

На самом деле, его непосредственный аналог

«У всякого ограниченного $S \subseteq \mathbb{R}^\sharp$ есть супремум».

опровергается, поскольку можно взять $S := \mathbb{R}$. Тем не менее, для S, определимых в $\mathfrak{R}^\sharp$, этот принцип верен.

Замечание

Нетрудно убедиться, что для всех $P \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$P^\sharp \cap \mathbb{R}^n \;=\; P \quad \text{и} \quad f^\sharp \cap \mathbb{R}^{m+1} \;=\; f.$$

Действительно, для любого $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} (r_1, \dots, r_n) \;\in\; P \quad & \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{R} \Vdash \underline{P}\,(\underline{r_1}, \dots, \underline{r_n}) \\ & \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{R}^\sharp \Vdash \underline{P}\,(\underline{r_1}, \dots, \underline{r_n}) \\ & \Longleftrightarrow \quad (r_1, \dots, r_n) \;\in\; P^\sharp, \end{aligned}$$

и для любого $(r_1, \dots, r_m, r_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$,

$$\begin{aligned} f\,(r_1, \dots, r_m) \;=\; r_{m+1} \quad & \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{R} \Vdash \underline{f}\,(\underline{r_1}, \dots, \underline{r_m}) = \underline{r_{m+1}} \\ & \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{R}^\sharp \Vdash \underline{f}\,(\underline{r_1}, \dots, \underline{r_m}) = \underline{r_{m+1}} \\ & \Longleftrightarrow \quad f^\sharp\,(r_1, \dots, r_m) \;=\; r_{m+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, P и f расширяются до $P^\sharp$ и $f^\sharp$ соответственно.

Инфинитезималы

Ключевые роли в дальнейшем будут играть

$$\mathbb{F} \;:=\; \left\{a \in \mathbb{R}^\sharp \mid |a|^\sharp <^\sharp r \text{ для некоторого } r \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{и}$$
$$\mathbb{I} \;:=\; \left\{a \in \mathbb{R}^\sharp \mid |a|^\sharp <^\sharp r \text{ для всех положительных } r \in \mathbb{R}\right\}.$$

Элементы $\mathbb{F}$ называются конечными, а $\mathbb{I}$ — бесконечно малыми, или инфинитезималами. Очевидно, $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{F}$ и $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{F}$.

Разумеется, $\mathbb{I} \cap \mathbb{R} = \{0\}$. Кроме того, $\mathbb{R}^\sharp \setminus \mathbb{F} \neq \varnothing$ по построению, т.е. бесконечные элементы существуют, причём среди них есть как положительные, так и отрицательные.

Рассуждая *внутри* $\mathfrak{R}^\sharp$, из соображений наглядности мы будем часто писать $a < b$ вместо $a <^\sharp b$, $|a|$ вместо $|a|^\sharp$, и т.д.

В $\mathfrak{R}^\sharp$, как и в $\mathfrak{R}$, можно делить на ненулевые элементы:

$$\mathfrak{R}^\sharp \Vdash \forall x\, \forall y\, (y \neq 0 \to \exists! z\, x \cdot z = y).$$

Для любых $a \in \mathbb{R}^\sharp$ и $b \in \mathbb{R}^\sharp \setminus \{0\}$ обозначим через a/b единственное $c \in \mathbb{R}^\sharp$ такое, что

$$b \cdot c \;=\; a;$$

Легко убедиться, что $a/b \in \mathbb{R}$ для $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Предложение

Пусть $a \in \mathbb{R}^\sharp \setminus \mathbb{F}$. *Тогда* $1/a \in \mathbb{I}$.

Доказательство.

Пусть r — положительное вещественное число. По условию $|a| \not< 2/r$, т.е. $2/r \leqslant |a|$, откуда $|1/a| = 1/\,|a| \leqslant r/2 < r$. $\square$

Замечание

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}$ неограничено (сверху). Тогда $\mathfrak{R} \Vdash \forall x\, \exists y\, (\underline{S}\,(y) \wedge x < y)$, а значит,

$$\mathfrak{R}^\sharp \Vdash \forall x\, \exists y\, (\underline{S}\,(y) \wedge x < y).$$

Стало быть, каждый (положительный) бесконечный элемент меньше какого-нибудь элемента $S^\sharp$. Следовательно,

$S^\sharp$ содержит бесконечные элементы.

В частности, бесконечные элементы найдутся в $\mathbb{N}^\sharp$ и $\mathbb{Q}^\sharp$. Более того, в $\mathbb{Q}^\sharp$ есть бесконечно малые.

Предложение

i. $\mathbb{F}$ *замкнуто относительно* $+^\sharp$, $-^\sharp$ *и* $\cdot^\sharp$.

ii. $\mathbb{I}$ *замкнуто относительно* $+^\sharp$ *и* $-^\sharp$. *Кроме того,*

$$a \cdot b \;\in\; \mathbb{I} \quad \text{для всех } a \in \mathbb{I} \text{ и } b \in \mathbb{F}.$$

Доказательство.

$\boxed{\text{i.}}$ Пусть $a, b \in \mathbb{F}$, т.е. $|a| < r$ и $|b| < s$ для некоторых $r, s \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|a \pm b| \;\leqslant\; |a| + |b| \;<\; r + s \quad \text{и} \quad |a \cdot b| \;\leqslant\; |a| \cdot |b| \;<\; r \cdot s.$$

Стало быть, $a \pm b \in \mathbb{F}$ и $a \cdot b \in \mathbb{F}$.

$\boxed{\text{ii.}}$ Пусть $a, b \in \mathbb{I}$. Для любого положительного $r \in \mathbb{R}$ верно $|a| < r/2$ и $|b| < r/2$, а потому $|a \pm b| < r/2 + r/2 = r$. Значит, $a \pm b \in \mathbb{I}$.

...

Доказательство (продолжение).

Наконец, пусть $a \in \mathbb{I}$ и $b \in \mathbb{F}$. Найдётся $s \in \mathbb{R}$ такое, что $|b| < s$. Для любого положительного $r \in \mathbb{R}$ верно $|a| < r/s$, а потому

$$|a \cdot b| \ < \ r/s \cdot s \ = \ r.$$

Значит, $a \cdot b \in \mathbb{I}$. $\square$

Говорят, что a и b **бесконечно близки**, и пишут $a \approx b$, если $a - b \in \mathbb{I}$.

Предложение

$\approx$ является отношением эквивалентности на $\mathbb{R}^\sharp$. $\square$

Замечание

Для любых $a, b \in \mathbb{R}^\sharp$:

i. если $a \approx b$ и $a \in \mathbb{F}$, то $b \in \mathbb{F}$.

ii. если $a \approx b$ и $a \in \mathbb{I}$, то $b \in \mathbb{I}$.

Далее, $\approx$ согласовано с $+^\sharp$, $-^\sharp$ и $\cdot^\sharp$ в определённом смысле:

Предложение

Для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}^\sharp$:

i. *если $a \approx b$ и $c \approx d$, то $a + c \approx b + d$ и $-a \approx -b$;*

ii. *если $a \approx b$ и $c \approx d$, причём $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{F}$, то $a \cdot c \approx b \cdot d$.*

Доказательство.

$\boxed{\text{i.}}$ Пусть $a \approx b$ и $c \approx d$. Тогда

$$\begin{aligned} (a+c)-(b+d) &= (a-b)+(c-d) \in \mathbb{I} \\ \text{и} \quad (-a)-(-b) &= -(a-b) \in \mathbb{I}, \end{aligned}$$

т.е. $a+c \approx b+d$ и $-a \approx -b$.

$\boxed{\text{ii.}}$ Пусть $a \approx b$ и $c \approx d$, причём $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{F}$. Тогда

$$\begin{aligned} (a \cdot c)-(b \cdot d) &= \\ (a \cdot c)+(a \cdot d)-(a \cdot d)-(b \cdot d) &= \\ a \cdot (c-d)-(a-b) \cdot d &\in \mathbb{I}, \end{aligned}$$

т.е. $a \cdot c \approx b \cdot d$. $\square$

Анонс

На следующей лекции мы рассмотрим простые применения инфинитезималов, связанные с непрерывностью и производными.

Здесь будет важно то, что для $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ эквивалентны условия:

i. f сходится в r к s в обычном смысле;

ii. для любого $a \in \mathbb{R}^\sharp \setminus \{r\}$, если $a \approx r$, то $f^\sharp(a) \approx s$.

Таким образом, современное ε-δ определение окажется равносильно «нестандартному» определению в духе Лейбница и Ньютона.