Математическая логика (I): 11/16

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Выделение стандартной части числа

Мы вскоре увидим, что всякое конечное число однозначно раскладывается в сумму стандартного и инфинитезимала, и это позволит нам при небходимости возвращаться в *стандартный мир*. Для получения данного результата полезной оказывается:

Лемма

Для любых $a, b \in \mathbb{F}$, *если* $a < b$ *и* $a \not\approx b$, *то найдётся* $r \in \mathbb{R}$ *такое, что* $a < r < b$.

Доказательство.

Пусть $a < b$ и $a \not\approx b$, причём a и b конечны. Рассмотрим

$$S_1 \;:=\; \{r \in \mathbb{R} \mid r \leqslant a\} \quad \text{и} \quad S_2 \;:=\; \{r \in \mathbb{R} \mid b \leqslant r\}.$$

Ввиду конечности a и b, S_1 и S_2 непусты и ограничены соответственно сверху и снизу. Положим

$$r_1 \;:=\; \sup S_1 \quad \text{и} \quad r_2 \;:=\; \inf S_2.$$

Тогда для любого положительного $s \in \mathbb{R}$ сущ. $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$r_1 - s \;<\; s_1 \;\leqslant\; a \quad \text{и} \quad b \;\leqslant\; s_2 \;<\; r_2 + s.$$

Если $r_1 = r_2$, то $a \approx r_1$ и $b \approx r_1$, откуда $a \approx b$ — противоречие. Стало быть, $r_1 \neq r_2$, т.е. $r_1 < r_2$. Значит, можно взять $r := (r_1 + r_2)/2$. □

Теорема

Для каждого $a \in \mathbb{F}$ *существует единственное* $r \in \mathbb{R}$ *такое, что* $a \approx r$.

Доказательство.

$\boxed{\exists}$ Пусть $a \in \mathbb{F}$. Рассмотрим

$$S \;:=\; \{r \in \mathbb{R} \mid r \leqslant a\}.$$

Ввиду конечности a, S непусто и ограничено сверху. Положим

$$r \;:=\; \sup S.$$

Пусть $r \not\approx a$. В частности, $r \neq a$, т.е. $r < a$ или $a < r$.

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $r < a$. В силу леммы выше, найдётся $s \in \mathbb{R}$ такое, что
$$r \;<\; s \;<\; a.$$
Очевидно, $s \in S$, а потому r не может быть верхней гранью S — противоречие.
- Пусть $a < r$. В силу леммы выше, найдётся $s \in \mathbb{R}$ такое, что
$$a \;<\; s \;<\; r.$$
Тогда s — верхняя грань S, а потому r не является наименьшей из верхних граней S — противоречие.

В итоге $r \approx a$.

$\boxed{!}$ Пусть $r, r' \in \mathbb{R}$ таковы, что $r \approx a$ и $r' \approx a$. Тогда $r \approx r'$, откуда мы получаем $r = r'$, поскольку $\mathbb{I} \cap \mathbb{R} = \{0\}$. □

Значит, всякое $a \in \mathbb{F}$ однозначно представляется в виде

$$r + \varepsilon,$$

где $r \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \in \mathbb{I}$; при этом r называют стандартной частью a и обозначают $\mathrm{st}\,(a)$, или $^{\circ}a$. Очевидно, $\mathrm{st}\,(r) = r$ для всех $r \in \mathbb{R}$.

Предложение

i. st *является сюрьекцией из* $\mathbb{F}$ *на* $\mathbb{R}$.

ii. $\mathrm{st}^{-1}\,[\{0\}] = \mathbb{I}$, *т.е. для любого* $a \in \mathbb{F}$,

$$\mathrm{st}\,(a) \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad a \;\in\; \mathbb{I}.$$

iii. *для любых* $a, b \in \mathbb{F}$,

$$\mathrm{st}\,(a + b) \;=\; \mathrm{st}\,(a) + \mathrm{st}\,(b) \quad \text{и} \quad \mathrm{st}\,(a \cdot b) \;=\; \mathrm{st}\,(a) \cdot \mathrm{st}\,(b).$$

Доказательство.

i. Очевидно.

ii. Пусть $a \in \mathbb{F}$. Ясно, что $a \in \mathbb{I}$ равносильно $a \approx 0$, т.е. $\mathrm{st}\,(a) = 0$.

iii. Пусть $a, b \in \mathbb{F}$. Поскольку $\mathrm{st}\,(a) \approx a$ и $\mathrm{st}\,(b) \approx b$, мы получаем

$$\mathrm{st}\,(a) + \mathrm{st}\,(b) \;\approx\; a + b \quad \text{и} \quad \mathrm{st}\,(a) \cdot \mathrm{st}\,(b) \;\approx\; a \cdot b.$$

(см. предыдущую лекцию, а именно, предложение о согласованности $\approx$ с $+^{\sharp}$, $-^{\sharp}$ и $\cdot^{\sharp}$). Стало быть,

$$\mathrm{st}\,(a + b) \;=\; \mathrm{st}\,(a) + \mathrm{st}\,(b) \quad \text{и} \quad \mathrm{st}\,(a \cdot b) \;=\; \mathrm{st}\,(a) \cdot \mathrm{st}\,(b).$$

□

Замечание

Иными словами, st — это сюрьективный гомоморфизм кольца над $\mathbb{F}$ на поле над $\mathbb{R}$ с ядром $\mathbb{I}$; следовательно, фактор-колько $\mathbb{F}$ по $\mathbb{I}$ будет изоморфно полю $\mathbb{R}$.

Разумеется, в $\mathbb{R}^\sharp$ каждому $r \in \mathbb{R}$ соответствует

$$\begin{aligned} [r] &:= \left\{a \in \mathbb{R}^\sharp \mid a \approx r\right\} \\ &= \left\{a \in \mathbb{R}^\sharp \mid \mathrm{st}\,(a) = r\right\}, \end{aligned}$$

своего рода монада r, состоящая из чисел вида

$$r + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \in \mathbb{I}$. С помощью бесконечно близких можно развить, например, теорию предела (в духе Лейбница и Ньютона); понятия вроде «быть непрерывной в точке» при этом становятся более локальными.

Сходимость

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r, s \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что f сходится в r к s, если для любого $a \in \mathbb{R}^\sharp \setminus \{r\}$ из $a \approx r$ следует $f^\sharp(a) \approx s$.

Предложение

Для любых $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r, s \in \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:

i. *f сходится в r к s в смысле эпсилон-дельта определения;*
ii. *f сходится в r к s в смысле определения выше.*

Доказательство.

$\boxed{\text{i.} \Longrightarrow \text{ii.}}$ Пусть (i). Предположим, что $a \in \mathbb{R}^\sharp \setminus \{r\}$ и $r \approx a$. Рассмотрим произвольное положительное $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Существует положительное $\delta \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\mathfrak{R} \Vdash \forall x\, (0 \neq |x - \underline{r}| < \underline{\delta} \to |\underline{f}\,(x) - \underline{s}| < \underline{\varepsilon}).$$

То же самое будет истинно и в $\mathfrak{R}^\sharp$. Очевидно, $0 \neq |a - r| < \delta$, откуда $\left|f^\sharp\,(a) - s\right| < \varepsilon$. В силу произвольности ε, мы получаем $f^\sharp\,(a) - s \in \mathbb{I}$, т.е. $f^\sharp\,(a) \approx s$.

...

Доказательство (продолжение).

$\boxed{\text{ii.} \Longrightarrow \text{i.}}$ Пусть (ii). Тогда для каждого положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{R}^\sharp \Vdash \exists y \left(0 < y \wedge \forall u \left(0 \neq |u - \underline{r}| < y \to |\underline{f}(u) - \underline{s}| < \underline{\varepsilon}\right)\right),$$

так как в качестве y мы можем взять произвольный положительный инфинитезимал. То же самое будет истинно и в $\mathfrak{R}$. □

Замечание

Разумеется, может случиться так, что $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не сходится в $r \in \mathbb{R}$ ни к какому $s \in \mathbb{R}$. С другой стороны, если f сходится в r к какому-н. s, то соответствующее s определяется однозначно равенством

$$s = \operatorname{st}\left(f^\sharp(r + \varepsilon)\right),$$

где ε — произвольный ненулевой инфинитезимал; это s традиционно обозначают как $\lim_{x \to r} f(x)$.

Замечание

Требование $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ является излишним. Для частичных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ достаточно было бы потребовать следующего:

$$\text{найдётся } a \in (\operatorname{dom} f)^\sharp \text{ такое, что } a \approx r \text{ и } a \neq r.$$

Тем не менее, для наглядности мы ограничимся рассмотрением всюду определенных функций.

Следствие (о непрерывности в точке)

Для любых $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:

i. *f непрерывна в r в стандартном смысле;*

ii. *для любого $a \in \mathbb{R}^\sharp$, если $a \approx r$, то $f^\sharp(a) \approx f(r)$.*

(Можно ещё переписать (ii) как «f сходится в r к $f(r)$».) □

Пример применения: производные

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$. Под производной f в r понимается

$$f'(r) \;:=\; \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

если этот предел существует. Значит, $f'(r) = s$ тогда и только тогда, когда для всякого ненулевого инфинитезимала dx,

$$\frac{f^{\sharp}(r + dx) - f(r)}{dx} \;\approx\; s,$$

где для числителя дроби в левой части нередко используют обозначение df. В частности, если $f'(r)$ существует, то

$$f'(r) \;=\; \mathrm{st}(df/dx),$$

где dx — произвольный ненулевой инфинитезимал, причём df/dx — это результат непосредственно *деления*, а не предел.

Пример

Рассмотрим $f := \lambda x.\left[x^2\right]$. Пусть $r \in \mathbb{R}$. Тогда для всякого ненулевого инфинитезимала dx,

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{(r+dx)^2 - r^2}{dx} = \frac{r^2 + 2r\,(dx) + (dx)^2 - r^2}{dx} \\ &= \frac{2r\,(dx) + (dx)^2}{dx} = 2r + dx \approx 2r.\end{aligned}$$

Стало быть, $f'(r) = 2r$.

Предложение

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ *и* $f'(r)$ *существует. Тогда* f *непрерывна в* r.

Доказательство.

Рассмотрим произв. ненулевой инфинитезимал dx. По условию

$$\frac{f^\sharp(r + dx) - f(r)}{dx} \approx f'(r).$$

Очевидно, в правой части стоит стандартное число; поэтому в левой — как минимум конечное. Домножив обе части на dx, получим

$$f^\sharp(r + dx) - f(r) \approx f'(r) \cdot dx \in \mathbb{I}.$$

Стало быть, $f^\sharp(r + dx) \approx f(r)$. □

Отметим, что это не нестандартный аналог классической теоремы, а классическая теорема, но с «нестандартным доказательством».

Предложение

Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и* $r \in \mathbb{R}$ *таковы, что* $f'(r)$ *и* $g'(f(r))$ *существуют. Тогда* $(f \circ g)'(r)$ *существует и равно* $g'(f(r)) \cdot f'(r)$.

Доказательство.

Первым делом заметим, что $(f \circ g)^\sharp = f^\sharp \circ g^\sharp$, поскольку

$$\mathfrak{R}^\sharp \Vdash \forall x\, \underline{(f \circ g)}(x) \;=\; \underline{g}(\underline{f}(x)).$$

Рассмотрим произвольный ненулевой инфинитезимал dx. Положим

$$\begin{aligned} df &:= f^\sharp(r + dx) - f(r) \\ d(f \circ g) &:= (f \circ g)^\sharp(r + dx) - (f \circ g)(r) \\ &= g^\sharp\left(f^\sharp(r + dx)\right) - g(f(r)) \\ &= g^\sharp(f(r) + df) - g(f(r)). \end{aligned}$$

Как мы уже знаем, f непрерывна в r; поэтому df — инфинитезимал.

...

Доказательство (продолжение).

Нужно показать, что

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} \approx g'(f(r)) \cdot f'(r).$$

Возможны два случая.

- Пусть $df = 0$. Тогда $d(f \circ g) = 0$; кроме того, $f'(r) \approx df/dx = 0$, а значит, $f'(r) = 0$. В итоге

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} = 0 = g'(f(r)) \cdot f'(r).$$

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $df \neq 0$. Тогда

$$\frac{d\,(f \circ g)}{df} = \frac{g^{\sharp}\,(f\,(r) + df) - g\,(f\,(r))}{df} \approx g'\,(f\,(r)).$$

Стало быть,

$$\frac{d\,(f \circ g)}{dx} = \frac{d\,(f \circ g)}{df} \cdot \frac{df}{dx} \approx g'\,(f\,(r)) \cdot f'\,(r).$$

$\square$

Заключительные комментарии

- Выше приведено лишь несколько простейших примеров применения метода бесконечно малых.
- На самом деле, применения бесконечно малых выходят далеко за пределы *элементарного анализа*. К примеру, метод успешно использовался в функциональном анализе и теории меры.
- Многие результаты математического анализа изначально были получены с помощью бесконечно малых, хотя, разумеется, сам метод в те времена был куда менее обоснован.

Сколемизация

Рассмотрим произвольную σ-п.н.ф. Φ.

Для удобства мы будем считать, что в Φ нет *фиктивных кванторов*, т.е. для всех $Q \in \{\forall, \exists\}$, $x \in \mathrm{Var}$ и $\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$Qx\,\Psi \;\in\; \mathrm{Sub}\,(\Phi) \quad\Longrightarrow\quad x \;\in\; \mathrm{FV}\,(\Psi).$$

В частности, все вхождения кванторов в Φ должны соответствовать различным переменным.

Замечание

Ясно, что для любых $\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var} \setminus \mathrm{FV}\,(\Psi)$,

$$\vdash \forall x\,\Psi \leftrightarrow \Psi \quad \text{и} \quad \vdash \exists x\,\Psi \leftrightarrow \Psi.$$

Пусть $\exists$ входит в Φ. Тогда Φ имеет вид

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y\, \Psi.$$

Расширим σ посредством добавления нового n-местного функционального символа f:

$$\sigma' \;:=\; \sigma \cup \{f\};$$

тут под «0-местными функциональными символами» понимаются константные символы. Положим

$$\Phi' \;:=\; \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \Psi\,(y/f\,(x_1, \ldots, x_n));$$

поскольку в Φ нет фиктивных кванторов, в Ψ нет кванторов по x_1, $\ldots$, x_n, так что σ'-терм $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ свободен для y в Ψ.

Повторяя эту операцию, мы получаем конечные последовательности

$$\begin{array}{llllllll} \sigma^{(0)} := \sigma, & \sigma^{(1)} := \sigma', & \sigma^{(2)} := \sigma'', & \ldots, & \sigma^{(k)} & \text{и} \\ \Phi^{(0)} := \Phi, & \Phi^{(1)} := \Phi', & \Phi^{(2)} := \Phi'', & \ldots, & \Phi^{(k)}, & \end{array}$$

где k — число вхождений $\exists$ в Φ. Обозначим

$$\sigma^* := \sigma^{(n)} \quad \text{и} \quad \Phi^* := \Phi^{(n)};$$

Очевидно, σ^*-формула Φ^* имеет вид

$$\forall u_1 \ldots \forall u_m \, \Theta,$$

где Θ бескванторная; Φ^* называется сколемизацией Φ. Легко видеть, что множество свободных переменных в процессе не меняется:

$$\mathrm{FV}(\Phi) = \mathrm{FV}(\Phi') = \ldots = \mathrm{FV}(\Phi^*).$$

Предложение

Для любой σ-структуры $\mathfrak{A}$ и означивания ν в $\mathfrak{A}$ с.у.э.:

i. Φ *истинна в* $\mathfrak{A}$ *при* ν;

ii. Φ^* *истинна в некотором* σ^**-обогащении* $\mathfrak{A}$ *при* ν.

Доказательство.

На самом деле, достаточно показать эквивалентность след. условий:

a. Φ истинна в $\mathfrak{A}$ при ν;

b. Φ' истинна в некотором σ'-обогащении $\mathfrak{A}$ при ν.

Как и выше, мы полагаем, что

$$\Phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \, \Psi \quad \text{и} \quad \sigma' = \sigma \cup \{f^n\}.$$

...

Доказательство (продолжение).

$\boxed{\text{a.} \Longrightarrow \text{b.}}$ Пусть Φ истинна в $\mathfrak{A}$ при ν. Для каждого $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ рассмотрим

$$S_{(a_1,\ldots,a_n)} \;:=\; \left\{a \in A \mid \mathfrak{A} \Vdash \Psi \left[\nu^{x_1\ldots x_n y}_{a_1\ldots a_n a}\right]\right\}.$$

По условию $\{S_{\vec{a}} \mid \vec{a} \in A^n\}$ состоит из непустых множеств. С помощью функции выбора определим $\xi : A^n \to A$ такую, что

$$\xi\,(\vec{a}) \;\in\; S_{\vec{a}} \quad \text{для всех } \vec{a} \in A^n.$$

Обозначим σ'-обогащение $\mathfrak{A}$, в котором f интерпретируется как ξ, за $\mathfrak{A}'$. Тогда Φ' истинна в $\mathfrak{A}'$ при ν. ...

Доказательство (продолжение).

$\boxed{\text{b.} \Longrightarrow \text{a.}}$ Пусть $\mathfrak{A}'$ — σ'-обогащение $\mathfrak{A}$, в котором истинна Φ' при ν. Тогда для любого $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$,

$$\mathfrak{A}' \Vdash \Psi\left(y/f\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right)\left[\nu^{x_1 \ldots x_n}_{a_1 \ldots a_n}\right],$$

откуда

$$\mathfrak{A}' \Vdash \exists y\, \Psi\left[\nu^{x_1 \ldots x_n}_{a_1 \ldots a_n}\right],$$

где $\mathfrak{A}'$ уже можно заменить на $\mathfrak{A}$, так как f не входит в $\exists y\, \Psi$. Значит, Φ истинна в $\mathfrak{A}$ при ν. $\square$

Пример

Возьмём $\langle <^2; |\cdot|^1, f^1 \rangle$ в качестве σ, и рассмотрим σ-п.н.ф.

$$\Phi_1 \ := \ \forall x\, \exists y\, \forall u\, (|u| < y \to |f(u)| < x),$$
$$\Phi_2 \ := \ \exists y\, \forall x\, \forall u\, (|u| < y \to |f(u)| < x).$$

Тогда каждая из Φ_1^* и Φ_2^* вычисляется за один шаг:

$$\forall x\, \forall u\, (|u| < h(x) \to |f(u)| < x) \ = \ \Phi_1^{(1)} \ = \ \Phi_1^*;$$
$$\forall x\, \forall u\, (|u| < c \to |f(u)| < x) \ = \ \Phi_2^{(1)} \ = \ \Phi_2^*.$$

Тут h — новый, не содержащийся в σ одноместный функциональный символ, а c — новый константный символ.

Пример

Возьмём $\langle =^2, <^2; \circ^2 \rangle$ в качестве σ, и рассмотрим σ-предложение

$$\exists x\, \forall y\, (x < y \to \exists u\, \exists v\; y = u \circ v).$$

Оно эквивалентно σ-п.н.ф.

$$\Phi \;:=\; \exists x\, \forall y\, \exists u\, \exists v\, (x < y \to y = u \circ v).$$

В Φ три вхождения $\exists$. Значит, Φ^* вычисляется за три шага:

$$\begin{aligned}
\underline{\exists x}\, \forall y\, \exists u\, \exists v\, (x < y \to y = u \circ v) &= \Phi^{(0)} \\
\forall y\, \underline{\exists u}\, \exists v\, (c < y \to y = u \circ v) &= \Phi^{(1)} \\
\forall y\, \underline{\exists v}\, (c < y \to y = f(y) \circ v) &= \Phi^{(2)} \\
\forall y\, (c < y \to y = f(y) \circ g(y)) &= \Phi^{(3)} \;=\; \Phi^*.
\end{aligned}$$

При этом $\sigma^* = \sigma \cup \{c, f, g\}$, где c — новый константный символ, а f и g — новые одноместные функциональные символы.

Зафиксируем произвольную σ-структуру $\mathfrak{A}$.

Пусть даны σ-п.н.ф. Φ и означивание ν в $\mathfrak{A}$. Реализацией Φ в $\mathfrak{A}$ при ν мы будем называть σ^*-обогащение $\mathfrak{A}$, в котором истинно Φ^* при ν.

Очевидно, каждое σ^*-обогащение $\mathfrak{A}$ однозначно определяется интерпретацией новых символов, т.е. элементов $\sigma^* \setminus \sigma$. Так, для

$$\sigma^* \ = \ \sigma \cup \{c, f^2\},$$

где c и f — новые символы, σ^*-обогащения $\mathfrak{A}$ можно отождествлять с функциями I с областью определения $\{c, f\}$ такими, что

$$I(c) \ \in \ A \qquad \text{и} \qquad I(f) : \ A \times A \ \to \ A.$$

То, что мы ограниваемся п.н.ф., не принципиально, так как имеется алгоритм, который по каждой формуле строит эквив. ей п.н.ф.

Пример

Возьмём в качестве σ сигнатуру арифметики, и рассмотрим σ-п.н.ф.

$$\Phi \;:=\; \exists x\, \forall y\, x \neq \mathsf{s}(y).$$

Очевидно, её сколемизацией будет

$$\Phi^* \;=\; \forall y\, c \neq \mathsf{s}(y),$$

где c — новый константный символ. Интерпретация I для $\{c\}$ реализует Φ в $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда $I(c) = 0$.

Пример

Далее, рассмотрим п.н.ф.

$$\Phi \;:=\; \forall x\, \exists y\, x \neq y.$$

Очевидно, её сколемизацией будет

$$\Phi^* \;=\; \forall x\, x \neq f(x),$$

где f — новый одноместный функ. символ. Интерпретация I для $\{f\}$ реализует Φ в $\mathfrak{N}$ т.т.т., когда у $I(f)$ нет неподвижных точек.

Пример

Возьмём $\langle | ^2 \rangle$ в качестве σ; ей отвечает стандартная σ-структура $\mathfrak{D}$ с носителем $\mathbb{N}$. Рассмотрим σ-п.н.ф.

$$\Phi \;:= \forall x \, \forall y \, \exists z \, (x \mid z \wedge y \mid z).$$

Очевидно, её сколемизацией будет

$$\Phi^* \;=\; \forall x \, \forall y \, (x \mid g\,(x, y) \wedge y \mid g\,(x, y)),$$

где g — новый двухместный функ. символ. Интерпретация I для $\{g\}$ реализует Φ в $\mathfrak{D}$, если и только если $I\,(g)$ по каждой упорядоченной паре натуральных чисел выдаёт их общее кратное.

В результате мы приходим к более тонкой семантике логики первого порядка в терминах сколемовских функций:

Теорема

Для любых σ-п.н.ф. Φ и означивания ν в $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{существует реализация } \Phi \textit{ в } \mathfrak{A} \textit{ при } \nu.$$

$\square$

Интуитивно различные реализации соответствуют различным путям установления истинности.

Пример

Проблему остановки для машин Тьюринга можно представить как

$$\mathrm{Halt} \;:=\; \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \begin{array}{l} \text{машина Тьюринга с кодом } n \\ \text{останавливается на пустом входе} \end{array} \right\}$$

Возьмём $\langle =^2, \mathrm{H}^1; 0, 1 \rangle$ в качестве σ, и обозначим через $\mathfrak{H}$ структуру с носителем $\mathbb{N}$, где $\mathrm{H}^{\mathfrak{A}} = \mathrm{Halt}$. Рассмотрим σ-п.н.ф.

$$\Theta \;:=\; \forall x\, \exists y\, ((\mathrm{Halt}\,(x) \wedge y = 1) \vee (\neg \mathrm{Halt}\,(x) \wedge y = 0)).$$

...

Пример (продолжение)

Очевидно, её сколемизацией будет

$$\Theta^* \;=\; \forall x\,((\mathrm{Halt}\,(x) \wedge f\,(x) = 1) \vee (\neg \mathrm{Halt}\,(x) \wedge f\,(x) = 0)),$$

где f — новый одноместный функ. символ. Интерпретация I для $\{f\}$ реализует Θ в $\mathfrak{H}$, если и только если $I\,(f)$ — характ. функция Halt. В этом смысле у Θ нет *вычислимых реализаций* в $\mathfrak{H}$.

Замечание (к последнему примеру)

Поскольку $\mathfrak{H} \Vdash \Theta$, т.е. $\mathfrak{H} \nVdash \neg\Theta$, у $\neg\Theta$ (или точнее, у соответствующей п.н.ф.) нет реализаций в $\mathfrak{H}$. В частности:

ни у Θ, ни у $\neg\Theta$ нет вычислимых реализаций в $\mathfrak{H}$.

Общие замечания

- На самом деле, сколемизацию можно определять не только для формул, но и для множеств формул.
- Сколемизация связана с эрбранизацией, которая связана с логическим программированием и автоматическим доказательством теорем. Однако об этом мы (пока) говорить не будем.
- Ещё сколемизация связана с теоретико-игровой семантикой для логики первого порядка. Вот об этом мы сейчас поговорим.

Неформ. описание игры для фиксированных $\mathfrak{A}$, Φ и ν:

- Имеется два игрока: Элоиза и Абеляр (англ. Eloise и Abelard). Говорят, что они (первоначально) играют роли верификатора и фальсификатора соответственно.
- Кварторы существования считаются точками выбора Элоизы, а кванторы всеобщности — Абеляра. Запомнить легко:

$$\exists \;\sim\; \exists\text{loise} \quad \text{и} \quad \forall \;\sim\; \forall\text{belard}.$$

- Двигаясь слева направо по п.н.ф. Φ, игроки выбирают значения переменных под *своими* кванторами. Когда дело доходит до бескванторной части Φ, значения подставляют: истинно — победила Элоиза, а ложно — Абеляр.

- Тут мы подразумеваем наличие полной информации, т.е. на каждом шаге игроки знают, какие значения переменных уже были выбраны *обоими* игроками до этого.
- Далее, под стратегией игрока понимается то, какие значения переменных он/она выбирает (в зависимости, разумеется, от того, какие значения уже были выбраны оппонентом).
- Наконец, стратегия называется выигрышной, если она всегда приводит (своего игрока) к победе. Определим

$$\mathfrak{A} \Vdash_{\mathsf{GTS}} \Phi\,[\nu] \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{у Э. есть выигрышная стратегия.}$$

Здесь GTS — сокр. от game-theoretical semantics.

Замечание

Пусть $\Phi = \mathsf{Q}_1 x_1 \ldots \mathsf{Q}_\ell x_\ell\, \Psi$, где Ψ бескванторная. Как легко видеть,

$$\vdash \neg\Phi \leftrightarrow \overline{\mathsf{Q}_1} x_1 \ldots \overline{\mathsf{Q}_\ell} x_\ell\, \neg\Psi,$$

где $\overline{\forall} := \exists$ и $\overline{\exists} := \forall$. Отождествляя $\neg\Phi$ с соответствующей п.н.ф., мы получаем:

$$\mathfrak{A} \Vdash_{\mathsf{GTS}} \neg\Phi\,[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \text{у А. есть выигрышная стратегия.}$$

В результате $\neg$ меняет (первоначальные) роли Э. и А. на противоположные: верификатор становится фальсификатором, и наоборот.

Пример

Возьмём $\langle =^2 \rangle$ в качестве σ. Зафиксируем произвольную σ-структуру $\mathfrak{A}$, и рассмотрим σ-п.н.ф.

$$\Phi \ := \ \forall x \, \exists y \, x \neq y.$$

Здесь первым стоит $\forall x$; поэтому первым ходит А., выбирая значение x. Затем ходит Э., выбирая значение y, причём ей известно значение x, выбранное А., так что выбор y может зависеть от x.

- Если $|A| \geqslant 2$, то у Э. есть выигрышная стратегия: нужно брать y, отличный от (известного ей) x.
- Если $|A| = 1$, то у А. есть выигрышная стратегия: нужно взять x, равный единственному элементу A.

Известно, что имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между выигрышными стратегиями у Э. и реализациями. Из этого, в частности, следует:

Теорема (без доказательства)

Для любых σ-п.н.ф. Φ и означивания ν в $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash_{\mathsf{GTS}} \Phi\,[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{существует реализация } \Phi \textit{ в } \mathfrak{A} \textit{ при } \nu.$$

Теорема

Для любых σ-п.н.ф. Φ и означивания ν в $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash_{\mathsf{GTS}} \Phi\,[\nu].$$

$\square$

Следствие

Для любых σ-п.н.ф. Φ и означивания ν в $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \nVdash_{\mathsf{GTS}} \Phi\,[\nu] \quad\Longleftrightarrow\quad \mathfrak{A} \Vdash_{\mathsf{GTS}} \neg\Phi\,[\nu].$$

$\square$

Иными словами, поскольку в «обычной семантике» закон исключённого третьего истинен, в GTS он также истиннен, т.е.

у (ровно) одного из игроков есть выигрышная стратегия.

Это доказано с помощью сколемовских функций, но можно было бы дать др. доказательство, исп. теорему Гейла–Стюарта из теории игр.

Заключительные комментарии

- Истинность закона исключенного третьего становится нетривиальным фактом в рамках GTS. Этот закон опровергается, если мы ограничиваемся стратегиями специального рода, например *вычислимыми* (для *вычислимых структур* вроде $\mathfrak{N}$).

- В GTS, на самом деле, можно обойтись и без п.н.ф. При этом в дизъюнкции верификатор выбирает дизъюнкт, в конъюнкции фальсификатор выбирает конъюнкт, и роли игроков меняются при переходе через каждое вхождение отрицания.