Математическая логика: лекция 14

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Возьмём в качестве σ сигнатуру упорядоченной стандартной модели арифметики, т.е.

$$\langle =, <; \mathsf{s}, +, \cdot; 0 \rangle;$$

как обычно, саму стандартную модель мы будем обозначать через $\mathfrak{N}$. Далее, обозначим через PA множество, состоящее из *универсальных* замыканий σ-формул

A1. $\mathsf{s}(x) \neq 0$,

A2. $\mathsf{s}(x) = \mathsf{s}(y) \to x = y$,

A3. $x + 0 = x$,

A4. $x + \mathsf{s}(y) = \mathsf{s}(x + y)$,

A5. $x \cdot 0 = 0$,

A6. $x \cdot \mathsf{s}(y) = x \cdot y + x$,

$\mathtt{A7.}$ $x \not< 0$ и

$\mathtt{A8.}$ $x < \mathrm{s}(y) \leftrightarrow (x < y \vee x = y)$,

а также универсальных замыканий всех σ-формул вида

$$\Phi(x/0) \wedge \forall x\, (\Phi(x/x) \to \Phi(x/\mathrm{s}(x))) \to \forall x\, \Phi,$$

которые в совокупности называются схемой аксиом индукции для σ. Теория PA известна как арифметика Пеано.

Кроме того, обозначим через MA множество, состоящее из *универс.* замыканий $\mathtt{A1}$–$\mathtt{A8}$, а также σ-формул

$\mathtt{A9.}$ $0 < x \vee 0 = x$ и

$\mathtt{A10.}$ $\mathrm{s}(x) < y \leftrightarrow (x < y \wedge \mathrm{s}(x) \neq y)$.

Теорию MA мы будем называть минимальной арифметикой.

Предложение

A9 *и* A10 *выводимы в* PA, *т.е.* [MA] $\subseteq$ [PA].

Доказательство.

Будем рассуждать внутри PA.

$\boxed{\text{A9}}$ Покажем по индукции, что

$$\forall x\,(0 < x \vee 0 = x).$$

База: Очевидно, $0 = 0$.

Шаг индукции: Пусть $0 < x \vee 0 = x$. Тогда $0 < \mathsf{s}(x)$ ввиду A8.

$\boxed{\text{A10}}$ Заметим, что, как легко доказать по индукции:

- $\forall x\,\forall y\,(x < y \leftrightarrow \mathsf{s}(x) < \mathsf{s}(y))$;
- $\forall x\,(x \not< x)$.

...

Доказательство (продолжение).

Вооружившись этим знанием, покажем индукцией по y, что

$$\forall y\, \forall x\, (\mathrm{s}(x) < y \leftrightarrow (x < y \wedge \mathrm{s}(x) \neq y)).$$

База: Очевидно, $\mathrm{s}(x) \not< 0$ и $x \not< 0$ ввиду $\mathtt{A7}$.

Шаг индукции: Пусть $\mathrm{s}(x) < y$ равносильно $x < y \wedge \mathrm{s}(x) \neq y$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}(x) < \mathrm{s}(y) \quad &\leftrightarrow \quad x < y \\
&\leftrightarrow \quad x < y \wedge x \neq y \\
&\leftrightarrow \quad (x < y \wedge x \neq y) \vee (x = y \wedge x \neq y) \\
&\leftrightarrow \quad (x < y \vee x = y) \wedge x \neq y \\
&\leftrightarrow \quad x < \mathrm{s}(y) \wedge x \neq y \\
&\leftrightarrow \quad x < \mathrm{s}(y) \wedge \mathrm{s}(x) \neq \mathrm{s}(y).
\end{aligned}$$

$\square$

Замечание

В литературе вместо MA нередко рассматривают теорию RA, которая задаётся универс. замыканиями A1–A8, а также σ-формулы

AR. $x \neq 0 \to \exists y\, x = \mathsf{s}(y)$;

Её называют арифметикой Робинсона. Как легко убедиться, AR выводима в PA, т.е. $[\mathrm{RA}] \subseteq [\mathrm{PA}]$. Вместе с тем известно, что

$$[\mathrm{RA}] \not\subseteq [\mathrm{MA}] \quad \text{и} \quad [\mathrm{MA}] \not\subseteq [\mathrm{RA}].$$

Это нетрудно доказать посредством построения модели MA (соответственно RA), которая не является моделью RA (MA). Так или иначе, MA и RA обе куда слабее PA. Например, в них нельзя вывести:

- транзитивность порядка;
- ассоциативность сложения или умножения.

В PA, напротив, выводимо всякое предложение элементарной теории чисел, которое вы сможете найти в стандартном учебнике.

Ограниченные формулы и Σ_1-формулы

Для произвольных $\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $t \in \mathrm{Term}_\sigma$ положим

$$\begin{aligned} (\forall x < t)\,\Psi &:= \forall x\,(x < t \to \Psi), \\ (\exists x < t)\,\Psi &:= \exists x\,(x < t \land \Psi). \end{aligned}$$

σ-Формула называется ограниченной, если каждая из её подформул, начинающаяся с $\forall$ или $\exists$, имеет вид

$$(\forall x < t)\,\Psi \quad \text{или} \quad (\exists x < t)\,\Psi,$$

где x не входит в t.

Предложение

Любое множество, определимое в $\mathfrak{N}$ посредством ограниченной формулы, разрешимо. □

Далее, под Σ_1-формулами понимаются σ-формулы вида

$$\exists y_1 \ldots \exists y_n \, \Psi,$$

где Ψ ограничена.

Предложение

Любое множество, определимое в $\mathfrak{N}$ посредством Σ_1-формулы, перечислимо. □

Более того, верно и обратное:

Теорема (о Σ_1-определимости, без доказательства)

Для любого $S \subseteq \mathbb{N}^\ell$ следующие условия эквивалентны:

i. *S перечислимо;*
ii. *S определимо в $\mathfrak{N}$ посредством Σ_1-формулы.*

Следствие

$\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ *неперечислимо.*

Доказательство.

В силу теоремы о Σ_1-определимости, Halt определимо в $\mathfrak{N}$ посредством некоторой Σ_1-формулы $\Phi(x)$. Поэтому $\neg\Phi$ определяет $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Halt}$ в $\mathfrak{N}$. Значит, для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} \setminus \mathrm{Halt} &\iff \mathfrak{N} \Vdash \neg\Phi[n] \\ &\iff \mathfrak{N} \Vdash \neg\Phi(x/\underline{n}) \\ &\iff \neg\Phi(x/\underline{n}) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{N}). \end{aligned}$$

Стало быть, $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Halt} \leqslant \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Поскольку $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Halt}$ неперечислимо (в силу теоремы Поста), $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ также неперечислимо. $\square$

Мы будем называть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ корректным, если $\mathfrak{N} \Vdash \Gamma$.

Следствие (слабая версия первой теоремы Гёделя о неполноте)

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ корректно и перечислимо. Тогда $[\Gamma]$ неполно.

Доказательство.

Очевидно, $[\Gamma] \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Поскольку $[\Gamma]$ перечислимо, а $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ неперечислимо, включение строгое, т.е. найдётся $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$ такое, что

$$\Gamma \nvdash \Phi, \quad \text{однако} \quad \mathfrak{N} \Vdash \Phi.$$

При этом $\mathfrak{N} \nVdash \neg\Phi$, а потому $\Gamma \nvdash \neg\Phi$. $\square$

Замечание

В частности, никакое разумное (задаваемое перечислимым множеством аксиом) корректное расширение $[\mathrm{PA}]$ не является полным: в нём не доказуемы некоторые истинные в $\mathfrak{N}$ предложения.

Замечание

Обозначим за $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{Q}$ соответственно кольцо целых чисел и поле рац. чисел (без порядка). Легко видеть, что

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{Z}) \equiv \mathrm{Th}(\mathfrak{N}).$$

Далее, как можно без труда убедиться, $\mathrm{Th}(\mathfrak{Q}) \leqslant \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Более того, Джулией Робинсон было показано, что $\mathbb{N}$ определимо в $\mathfrak{Q}$, а потому

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{Q}) \equiv \mathrm{Th}(\mathfrak{N}).$$

Стало быть, $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$ и $\mathrm{Th}(\mathfrak{Q})$ обе неперечислимы.

О диофантовых множествах

$S \subseteq \mathbb{N}^\ell$ называют диофантовым, если существуют полиномы

$$f(x_1, \ldots, x_\ell, \vec{y}) \quad \text{и} \quad g(x_1, \ldots, x_\ell, \vec{y})$$

с натуральными коэффициентами такие, что

$$S \;=\; \left\{ (n_1, \ldots, n_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \;\middle|\; \begin{array}{l} f(n_1, \ldots, n_\ell, \vec{y}) = g(n_1, \ldots, n_\ell, \vec{y}) \\ \text{для некоторых натуральных } \vec{y}. \end{array} \right\}.$$

Как легко убедиться, S диофантово тогда и только тогда, когда оно определимо в $\mathfrak{N}$ посредством σ-формулы вида

$$\exists y_1 \ldots \exists y_n \, \Psi,$$

где Ψ атомарная (которые явл. частными случаями Σ_1-формул).

Теорему о Σ_1-определимости можно значительно усилить:

Теорема (Матиясевича–Робинсон–Дэвиса–Патнэма; без док-ва)

Для любого $S \subseteq \mathbb{N}^\ell$,

$$S \text{ перечислимо} \iff S \text{ диофантово.}$$

Для удобства введём обозначение

$$\mathrm{DE}\,(\mathfrak{N}) \;:=\; \left\{\Phi \in \mathrm{At}_\sigma \mid \mathfrak{N} \Vdash \widetilde{\exists}\Phi\right\}.$$

Очевидно, $\mathrm{DE}\,(\mathfrak{N})$ перечислимо. Проблема принадлежности к $\mathrm{DE}\,(\mathfrak{N})$ известна как диофантова проблема над $\mathbb{N}$.

Следствие

$\mathrm{DE}(\mathfrak{N})$ *неразрешимо.*

Доказательство.

В силу теоремы М.–Р.–Д.–П., Halt определимо в $\mathfrak{N}$ посредством нек. формулы вида

$$\exists y_1 \ldots \exists y_n \Psi(x, y_1, \ldots, y_n),$$

где Ψ атомарная. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$n \in \mathrm{Halt} \iff \mathfrak{N} \Vdash \exists \vec{y}\, \Psi(x/\underline{n}) \iff \Psi(x/\underline{n}) \in \mathrm{DE}(\mathfrak{N}).$$

Стало быть, $\mathrm{Halt} \leqslant \mathrm{DE}(\mathfrak{N})$, а потому $\mathrm{DE}(\mathfrak{N})$ неразрешимо. □

Замечание

Как известно, всякое перечислимое множество можно свести к Halt. В частности, $\mathrm{DE}(\mathfrak{N}) \leqslant \mathrm{Halt}$. В результате

$$\mathrm{DE}(\mathfrak{N}) \equiv \mathrm{Halt}.$$

Далее, легко видеть, что $\mathrm{DE}(\mathfrak{Z}) \equiv \mathrm{DE}(\mathfrak{N})$, откуда $\mathrm{DE}(\mathfrak{Z}) \equiv \mathrm{Halt}$. Но открытым остаётся вопрос:

Разрешимо ли $\mathrm{DE}(\mathfrak{Q})$?

(При этом $\mathrm{DE}(\mathfrak{Q})$, очевидно, является перечислимым.)

Представимость в MA (аналогично для RA)

Пусть $f :\subseteq \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}$ и $\Phi(x_1, \ldots, x_\ell, y) \in \mathrm{Form}_\sigma$. Говорят, что Φ представляет f в MA, если для всех $(n_1, \ldots, n_\ell) \in \operatorname{dom} f$,

$$\mathrm{MA} \vdash \forall y \left(\Phi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}, y\right) \leftrightarrow y = \underline{f\left(n_1, \ldots, n_\ell\right)}\right),$$

где $\Phi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}, y\right)$ является сокращением для $\Phi\left(x_1/\underline{n_1}\right) \ldots \left(x_\ell/\underline{n_\ell}\right)$.

Теорема (о представимости в MA; без доказательства)

Пусть $f :\subseteq \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}$ вычислима. Тогда f представима в MA *посредством Σ_1-формулы.*

Этот результат устанавливает тесную связь между вычислимостью и выводимостью в теориях, включающих MA.

Замечание

Пусть $S \subseteq \mathbb{N}^\ell$ разрешимо, т.е. χ_S вычислима. В силу теоремы о представимости в МА, существует Σ_1-формула $\Phi\left(x_1, \ldots, x_\ell, y\right)$ такая, что для любых $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{MA} \vdash \forall y \left(\Phi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}, y\right) \leftrightarrow y = \underline{\chi_S\left(n_1, \ldots, n_\ell\right)}\right).$$

При этом, как легко видеть, Σ_1-формула

$$\Phi'\left(x_1, \ldots, x_\ell\right) \;:=\; \Phi\left(x_1, \ldots, x_\ell, \underline{1}\right)$$

будет определять S в $\mathfrak{N}$. Более того, можно проверить, что для всех $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$:

- если $\left(n_1, \ldots, n_\ell\right) \in S$, то $\mathrm{MA} \vdash \Phi'\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}\right)$;
- если $\left(n_1, \ldots, n_\ell\right) \notin S$, то $\mathrm{MA} \vdash \neg\Phi'\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}\right)$.

Теорема («сильная неразрешимость МА»; без док-ва)

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *непротиворечиво и вкл.* МА. *Тогда* $[\Gamma]$ *неразрешимо.*

Отсюда без труда получается:

Первая теорема Гёделя о неполноте, версия Россера

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *непротиворечиво, перечислимо и вкл.* МА. *Тогда* $[\Gamma]$ *неполно.*

Доказательство.

Ясно, что $[\Gamma]$ перечислимо. Если бы $[\Gamma]$ было ещё и полно, оно оказалось бы разрешимым — противоречие. $\square$

Следствие (Теорема Чёрча)

$[\varnothing]_\sigma$ *неразрешимо, т.е. проблема выводимости из* $\varnothing$ *над* σ *неразр.*

Доказательство.

Как мы уже знаем, [MA] неразрешимо. Возьмём

$$\Phi \;:=\; \text{конъюнкция всех элементов MA.}$$

Ясно, что $[\mathrm{MA}] = [\{\Phi\}] \leqslant [\varnothing]$. Стало быть, $[\varnothing]$ неразрешимо. $\square$

Замечание

Сигнатура арифметики — это довольно много. На самом деле, аналогичный результат будет верен и для сигнатуры $\langle R^2 \rangle$, например.

О предикатах доказуемости

Ранее нами была введена нумерация

$$\# : \ \mathrm{Term}_\sigma \cup \mathrm{Form}_\sigma \ \to \ \mathbb{N}.$$

Её действие можно без труда распространить на *конечные последовательности* σ-термов и σ-формул.

Для каждого разрешимого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ возьмём

$$P_\Gamma \ := \ \{(\#(w), \#(\Phi)) \mid w \text{ является выводом } \Phi \text{ в } \Gamma\}.$$

Разумеется, P_Γ разрешимо. В силу теоремы о представимости в МА, найдется Σ_1-формула $\Phi_\Gamma(x, y, z)$ такая, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{MA} \vdash \forall y \left(\Phi_\Gamma(\underline{n}, \underline{m}, y) \leftrightarrow y = \underline{\chi_{P_\Gamma}(n, m)} \right).$$

Обозначим $\Phi_\Gamma(x, y, \underline{1})$ через $\mathrm{Proof}_\Gamma(x, y)$.

Как следует из замечания выше, $\mathrm{Proof}_\Gamma(x, y)$ определяет P_Γ в $\mathfrak{N}$, и для любых $n, m \in \mathbb{N}$:

- если $\mathfrak{N} \Vdash \mathrm{Proof}_\Gamma(\underline{n}, \underline{m})$, то $\mathrm{MA} \vdash \mathrm{Proof}_\Gamma(\underline{n}, \underline{m})$;
- если $\mathfrak{N} \nVdash \mathrm{Proof}_\Gamma(\underline{n}, \underline{m})$, то $\mathrm{MA} \vdash \neg\mathrm{Proof}_\Gamma(\underline{n}, \underline{m})$.

Нас будет интересовать поведение Σ_1-формулы

$$\mathrm{Prov}_\Gamma(x) \;:=\; \exists u\, \mathrm{Proof}_\Gamma(u, x),$$

которая, очевидно, определяет $\{\#(\Phi) \mid \Gamma \vdash \Phi\}$ в $\mathfrak{N}$; для удобства мы будем пользоваться обозначениями

$$\ulcorner\Phi\urcorner \;:=\; \underline{\#(\Phi)} \quad \text{и} \quad \Box_\Gamma\Phi \;:=\; \mathrm{Prov}_\Gamma(\ulcorner\Phi\urcorner),$$

где Φ — произвольная σ-формула.

Замечание

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ неразрешимо, но перечислимо. Очевидно, Γ непусто, а потому его элементы можно расположить в вычислимую посл-ть:

$$\Psi_0, \quad \Psi_1, \quad \Psi_2, \quad \ldots$$

Рассмотрим

$$\Delta \; := \; \left\{ \bigwedge\nolimits_{i=0}^{n} \Psi_i \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Для любой $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \vdash \Phi.$$

Кроме того, можно проверить, что Δ разрешимо.

Таким образом, не важно, задается ли дедуктивно замкнутая теория перечислимым или разрешимым множеством аксиом.

Лемма

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *разрешимо. Тогда для любой* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{MA} \vdash \Box_\Gamma \Phi.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\Gamma \vdash \Phi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\Psi_0, \quad \ldots, \quad \Psi_n \quad = \quad \Phi$$

из Γ. Возьмём $k := \#(\Psi_0, \ldots, \Psi_n)$. Тогда $\mathfrak{N} \Vdash \mathrm{Proof}_\Gamma\,(\underline{k}, \ulcorner\Phi\urcorner)$, откуда $\mathrm{MA} \vdash \mathrm{Proof}_\Gamma\,(\underline{k}, \ulcorner\Phi\urcorner)$, а потому $\mathrm{MA} \vdash \mathrm{Prov}_\Gamma\,(\ulcorner\Phi\urcorner)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\mathrm{MA} \vdash \Box_\Gamma \Phi$. Тогда $\mathfrak{N} \Vdash \mathrm{Prov}_\Gamma\,(\ulcorner\Phi\urcorner)$, поскольку $\mathfrak{N} \Vdash \mathrm{MA}$, а потому $\Gamma \vdash \Phi$. $\Box$

Диагонализация в арифметике

С помощью теоремы о представимости в МА можно также доказать следующий важный результат:

Лемма (о неподвижной точке; без доказательства)

Для каждой $\Psi(x) \in \mathsf{Form}_\sigma$ *существует* $\Phi \in \mathsf{Sent}_\sigma$ *такое, что*

$$\mathsf{MA} \vdash \Phi \leftrightarrow \Psi(\ulcorner \Phi \urcorner).$$

В качестве простого примера её применения выступает:

Теорема (Тарского о неопределимости истины в $\mathfrak{N}$)

$\#[\mathsf{Th}(\mathfrak{N})]$ *не определимо в* $\mathfrak{N}$.

Доказательство.

Пусть $\#[\mathrm{Th}(\mathfrak{N})]$ определимо в $\mathfrak{N}$ посредством некот. $\mathsf{T}(x) \in \mathrm{Form}_\sigma$. Значит, для любого $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$,

$$\mathfrak{N} \Vdash \Phi \iff \mathfrak{N} \Vdash \underbrace{\mathsf{T}\left(\underline{\#(\Phi)}\right)}_{\mathsf{T}(\ulcorner\Phi\urcorner)}.$$

В силу леммы о неподвижной точке, найдётся $\Theta \in \mathrm{Sent}_\sigma$ такое, что

$$\mathrm{MA} \vdash \Theta \leftrightarrow \neg\mathsf{T}(\ulcorner\Theta\urcorner).$$

Поскольку $\mathfrak{N} \Vdash \mathrm{MA}$, мы получаем:

$$\mathfrak{N} \Vdash \Theta \iff \mathfrak{N} \Vdash \neg\mathsf{T}(\ulcorner\Theta\urcorner) \iff \mathfrak{N} \Vdash \neg\Theta$$

— противоречие. $\square$

Замечание

Другое название леммы о неподвижной точке — лемма о диагонализации. Такого рода приёмы используются довольно часто. Например, с помощью «диагональных аргументов» обычно доказывают:

- несчётность $\mathcal{P}(\mathbb{N})$;
- неразрешимость Halt.

Стоит отметить, что лемма о неподвижной точке и теорема о неопределимости истины в $\mathfrak{N}$ играют важные роли в разделе совр. философии, именуемом формальная теория истины. С другой стороны, они связаны с так называемой арифметической иерерхией (степеней) из теоретической информатики/теории вычислимости.

Вторая теорема о неполноте

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ разрешимо и включает PA (т.е. MA с индукцией).

Под условиями Гёделя–Лёба понимают следующие условия:

L1. если $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Gamma \vdash \Box_\Gamma \Phi$;

L2. $\Gamma \vdash \Box_\Gamma (\Phi \to \Psi) \to (\Box_\Gamma \Phi \to \Box_\Gamma \Psi)$;

L3. $\Gamma \vdash \Box_\Gamma \Phi \to \Box_\Gamma \Box_\Gamma \Phi$.

Они выглядят достаточно естественно, и *стандартным образом построенный* предикат доказуемости для Γ будет им удовлетворять.

Вторая теорема Гёделя о неполноте

Пусть Prov_Γ *удовлетворяет условиям Гёделя–Лёба. Тогда:*

$$\Gamma \nvdash \bot \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \nvdash \underbrace{\neg \mathsf{Prov}_\Gamma\,(\ulcorner \bot \urcorner)}_{\neg \Box_\Gamma \bot}.$$

Доказательство.

В силу леммы о неподвижной точке, найдётся $\Phi \in \mathsf{Sent}_\sigma$ такое, что

$$\mathsf{MA} \vdash \Phi \leftrightarrow \underbrace{\neg \mathsf{Prov}_\Gamma\,(\ulcorner \Phi \urcorner)}_{\neg \Box_\Gamma \Phi}.$$

Пусть $\Gamma \nvdash \bot$. Предположим, что $\Gamma \vdash \Phi$. Тогда:

- $\mathsf{MA} \vdash \Box_\Gamma \Phi$ (по одной из лемм выше), а потому $\Gamma \vdash \Box_\Gamma \Phi$;
- $\Gamma \vdash \neg \Box_\Gamma \Phi$ по построению Φ.

…

Доказательство (продолжение).

Это противоречит непротиворечивости Γ. Значит, $\Gamma \nvdash \Phi$.

Далее, используя $\mathtt{L1}$–$\mathtt{L3}$, можно показать, что

$$\Gamma \vdash \Box_\Gamma \bot \leftrightarrow \Box_\Gamma \Phi,$$

откуда $\Gamma \vdash \neg\Box_\Gamma \bot \leftrightarrow \Phi$. Стало быть, $\Gamma \nvdash \neg\Box_\Gamma \bot$ ввиду $\Gamma \nvdash \Phi$. □

Следствие

$\mathsf{PA} \nvdash \neg\mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner\bot\urcorner)$ *для станд. образом построенного* $\mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}$. □

Замечание

$\mathsf{PA} \nvdash \mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner\bot\urcorner)$ ввиду того, что $\neg\mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner\bot\urcorner)$ истинно в $\mathfrak{N}$.

Замечание

Предикаты доказуемости можно стандартным образом строить и для куда более богатых теорий вроде ZFC и её расширений (в них должна быть интерпретируема арифметика). При этом получится, что

$$T \nvdash \bot \quad \Longrightarrow \quad T \nvdash \neg \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \bot \urcorner).$$

Разумеется, чем богаче T, тем больше сомнений может вызывать её непротиворечивость, особенно когда абстрактный характер T затрудняет восприятие её «стандартной модели».

Очевидно, непротиворечивость T может выводиться в другой, более богатой T'. Но непротиворечивость T' ещё сложнее обосновать.

Заключительные комментарии

- Теоремы Гедёля о неполноте — это общепризнанное достижение математической мысли XX века. При этом они весьма известны и за пределами самой математики.
- Им посвящена обширная литература, от специальной до научно-популярной. К последней относятся, например, книги:
  - Hofstadter, D.: *Gödel, Escher, Bach: The Eternal Golden Braid*;
  - Penrose, R.: *The Emperor's New Mind* и *Shadows of the Mind*.

  При интерпретации теорем Гёделя о неполноте стоит соблюдать осторожность — см. Franzén, T.: *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to its Use and Abuse*.

- Краткое математическое введение:
  - Сморинский, К.: Теоремы о неполноте. В *Справочной книге по математической логике*, Части 4. — пер. с англ.

- Методы, используемые в доказательствах теорем о неполноте, подчеркивают тесную связь между выводимостью и вычислимостью. Например, в работах Гёделя появились «примитивно рекурсивные функции». Из них потом выросли «рекурсивные функции» — одна из формализаций вычислимости.

- Эти методы вдохновляли многих исследователей, в том числе Стивена Клини, Розу Петер и Алана Тьюринга.