Математическая логика (I): 2/16

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Здесь используются следующие схемы аксиом:

I1. $\phi \to (\psi \to \phi)$;

I2. $(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$;

C1. $\phi \wedge \psi \to \phi$;

C2. $\phi \wedge \psi \to \psi$;

C3. $\phi \to (\psi \to \phi \wedge \psi)$;

D1. $\phi \to \phi \vee \psi$;

D2. $\psi \to \phi \vee \psi$;

D3. $(\phi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \vee \psi \to \chi))$;

N1. $(\phi \to \psi) \to ((\phi \to \neg\psi) \to \neg\phi)$;

N2. $\neg\phi \to (\phi \to \psi)$;

N3. $\phi \vee \neg\phi$.

Помимо них имеется ровно одно правило вывода, именуемое *modus ponens*:

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}\ (\mathtt{MP})$$

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$. Под выводом из Γ в данном гильбертовском исчислении понимают конечную последовательность

$$\phi_0, \ \ldots, \ \phi_n$$

(где $n \in \mathbb{N}$) элементов Form такую, что для каждого $i \in \{0, \ldots, n\}$ выполнено одно из следующих условий:

- ϕ_i является аксиомой;
- ϕ_i является элементом Γ;
- существуют $\{j, k\} \subseteq \{0, \ldots, i-1\}$ такие, что ϕ_k есть $\phi_j \to \phi_i$.

При этом ϕ_n называют заключением рассматриваемого вывода, а элементы Γ — его гипотезами.

Для $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq$ Form запись $\Gamma \vdash \phi$ означает, что существует вывод из Γ с заключением ϕ. Вместо $\varnothing \vdash \phi$ обычно пишут $\vdash \phi$.

В качестве простейших свойств $\vdash$ выступают:

- если $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \vdash \phi$, то $\Delta \vdash \phi$; (монотонность)
- если $\Delta \vdash \psi$ для всех $\psi \in \Gamma$, и $\Gamma \vdash \phi$, то $\Delta \vdash \phi$; (транзитивность)
- если $\Gamma \vdash \phi$, то $\Delta \vdash \phi$ для нек. конечного $\Delta \subseteq \Gamma$. (компактность)

Замечание

Ясно, что $\models$ монотонно и транзитивно. Более того, хотя компактность $\models$ отнюдь не очевидна, она будет следовать из совпадения $\vdash$ и $\models$.

Пример

Покажем, что $\vdash \phi \vee \psi \to \psi \vee \phi$:

1.	$(\phi \to \psi \vee \phi) \to ((\psi \to \psi \vee \phi) \to (\phi \vee \psi \to \psi \vee \phi))$	D3
2.	$\phi \to \psi \vee \phi$	D2
3.	$\psi \to \psi \vee \phi$	D1
4.	$(\psi \to \psi \vee \phi) \to (\phi \vee \psi \to \psi \vee \phi)$	из 2, 1; MP
5.	$\phi \vee \psi \to \psi \vee \phi$	из 3, 4; MP.

Пример

Покажем, что $\{\phi \wedge \psi\} \vdash \psi \wedge \phi$:

1.	$\psi \to (\phi \to \psi \wedge \phi)$	C3
2.	$\phi \wedge \psi \to \psi$	C2
3.	$\phi \wedge \psi \to \phi$	C1
4.	$\phi \wedge \psi$	гипотеза
5.	ψ	из 4, 2; MP
6.	ϕ	из 4, 3; MP
7.	$\phi \to \psi \wedge \phi$	из 5, 1; MP
8.	$\psi \wedge \phi$	из 6, 7; MP.

Вместе с тем не совсем ясно, можно ли получить $\vdash \phi \wedge \psi \to \psi \wedge \phi$.

Пример

По (довольно контринтуитивной) традиции $\phi \to \phi$ отсутствует среди схем аксиом. Тем не менее, $\vdash \phi \to \phi$:

1.	$(\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)) \to ((\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi))$	I2
2.	$\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)$	I1
3.	$\phi \to (\phi \to \phi)$	I1
4.	$(\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)$	из 2, 1
5.	$\phi \to \phi$	из 3, 4.

Заметим, что при этом $\{\phi\} \vdash \phi$ выполнено очевидным образом.

Теорема (о дедукции)

Для любых $\Gamma \cup \{\phi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \phi \to \psi.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\Gamma \vdash \phi \to \psi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\phi_0, \ \ldots, \ \phi_n \ = \ \phi \to \psi$$

из Γ. Тогда, как легко убедиться,

$$\phi_0, \ \ldots, \ \phi_n, \ \phi, \ \psi$$

будет выводом из $\Gamma \cup \{\phi\}$. Стало быть, $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

...

Доказательство (продолжение).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\psi_0, \quad \ldots, \quad \psi_n \;=\; \psi$$

из $\Gamma \cup \{\phi\}$. Покажем индукцией по $i \in \{0, \ldots, n\}$, что $\Gamma \vdash \phi \to \psi_i$.

Возможны следующие случаи.

- Пусть ψ_i — аксиома или элемент Γ. Тогда

$$\psi_i \to (\phi \to \psi_i), \;\; \psi_i, \;\; \phi \to \psi_i$$

  будет выводом из $\varnothing$ или Γ. Стало быть, $\Gamma \vdash \phi \to \psi_i$.
- Пусть $\psi_i = \phi$. Как мы знаем, $\vdash \phi \to \phi$, откуда $\Gamma \vdash \phi \to \phi$.

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть ψ_i получено из предшествующих ψ_j и $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$ по MP. Тогда можно построить такой «квазивывод» из Γ:

1.	$(\phi \to (\psi_j \to \psi_i)) \to ((\phi \to \psi_j) \to (\phi \to \psi_i))$	I2
2.	$\phi \to (\psi_j \to \psi_i)$	инд. гип.
3.	$\phi \to \psi_j$	инд. гип.
4.	$(\phi \to \psi_j) \to (\phi \to \psi_i)$	из 2, 1
5.	$\phi \to \psi_i$	из 3, 4.

  Стало быть, $\Gamma \vdash \phi \to \psi_i$.

В частности, при $i := n$ мы имеем $\Gamma \vdash \phi \to \psi_n$, т.е. $\Gamma \vdash \phi \to \psi$. □

Пример

Как мы знаем, $\{\phi \wedge \psi\} \vdash \psi \wedge \phi$, а значит, в силу теоремы дедукции, $\vdash \phi \wedge \psi \to \psi \wedge \phi$.

Пример

Нетрудно убедиться, что $\{\phi \to \psi, \phi \to \neg\psi, \phi\} \vdash \chi$:

1.	$\neg\psi \to (\psi \to \chi)$	N2
2.	ϕ	гипотеза
3.	$\phi \to \neg\psi$	гипотеза
4.	$\neg\psi$	из 1, 2
5.	$\psi \to \chi$	из 4, 1
6.	$\phi \to \psi$	гипотеза
7.	ψ	из 2, 6
8.	χ	из 7, 5.

Значит, $\vdash (\phi \to \psi) \to ((\phi \to \neg\psi) \to (\phi \to \chi))$.

Корректность

Лемма

Всякая аксиома гильбертовского исчисления для клас. проп. логики общезначима. $\square$

Теорема (о корректности)

Для любых $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vdash \phi \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \vDash \phi.$$

Доказательство.

Пусть $\Gamma \vdash \phi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\phi_0, \; \ldots, \; \phi_n \; = \; \phi$$

из Γ. Рассмотрим произвольную оценку v такую, что $v \Vdash \psi$ для всех $\psi \in \Gamma$. Покажем индукцией по $i \in \{0, \ldots, n\}$, что $v \Vdash \phi_i$.

...

Доказательство (продолжение).

Возможны следующие случаи.

- Пусть ϕ_i — аксиома. Тогда $\vDash \phi_i$, а потому $v \Vdash \phi_i$.
- Пусть ϕ_i — элемент Γ. Тогда, очевидно, $v \Vdash \phi_i$.
- Пусть ϕ_i получается из предшествующих ϕ_j и $\phi_k = \phi_j \to \phi_i$ по MP. Ввиду индукционной гипотезы,

$$v \Vdash \phi_j \quad \text{и} \quad v \Vdash \phi_j \to \phi_i,$$

откуда немедленно следует $v \Vdash \phi_i$.

В частности, при $i := n$ мы имеем $v \Vdash \phi_n$, т.е. $v \Vdash \phi$.

Таким образом, $\Gamma \vDash \phi$. $\square$

Простые теории

Говорят, что $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ является простой теорией, если оно обладает следующими свойствами:

- $\Gamma \neq \mathrm{Form}$;
- $\{\phi \in \mathrm{Form} \mid \Gamma \vdash \phi\} \subseteq \Gamma$;
- для любого $\phi \vee \psi \in \Gamma$ верно $\phi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$.

Лемма (о свойствах простых теорий)

Пусть Γ — простая теория. Тогда для любых $\phi, \psi \in \mathrm{Form}$:

$$\begin{aligned}
\neg\phi \in \Gamma &\iff \phi \notin \Gamma; \\
\phi \wedge \psi \in \Gamma &\iff \phi \in \Gamma \ \text{ и } \ \psi \in \Gamma; \\
\phi \vee \psi \in \Gamma &\iff \phi \in \Gamma \ \text{ или } \ \psi \in \Gamma; \\
\phi \to \psi \in \Gamma &\iff \phi \notin \Gamma \ \text{ или } \ \psi \in \Gamma.
\end{aligned}$$

Доказательство.

$\boxed{\neg}$ Предположим, что $\neg\phi \in \Gamma$. Рассуждая от противного, допустим, что $\phi \in \Gamma$. Тогда $\Gamma \vdash \psi$ для всех $\psi \in \mathrm{Form}$:

1.	$\neg\phi \to (\phi \to \psi)$	N2
2.	$\neg\phi$	гипотеза
3.	ϕ	гипотеза
4.	$\phi \to \psi$	из 2, 1
5.	ψ	из 3, 4.

Стало быть, $\Gamma = \mathrm{Form}$ — противоречие.

Наоборот, предположим, что $\phi \notin \Gamma$. Поскольку $\vdash \phi \vee \neg\phi$, тем более $\Gamma \vdash \phi \vee \neg\phi$, то $\phi \vee \neg\phi \in \Gamma$, откуда $\neg\phi \in \Gamma$.

$\boxed{\wedge}$ Предположим, что $\phi \wedge \psi \in \Gamma$. Используя C1 и C2, отсюда легко получить $\Gamma \vdash \phi$ и $\Gamma \vdash \psi$, а значит, $\phi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma$.

...

Доказательство (продолжение).

Теперь предположим, что $\phi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma$. Используя C3, отсюда легко получить $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$, т.е. $\phi \wedge \psi \in \Gamma$.

$\boxed{\vee}$ Очевидно, $\phi \vee \psi \in \Gamma$ влечёт $\phi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$.

Предположим, что $\phi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$. Используя D1 или D2, мы можем легко получить $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$, а значит, $\phi \vee \psi \in \Gamma$.

$\boxed{\to}$ Предположим, что $\phi \to \psi \in \Gamma$. Если $\phi \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash \psi$, т.е. $\psi \in \Gamma$.

Предположим, что $\phi \notin \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$. В первом случае $\neg\phi \in \Gamma$, откуда с помощью N2 можно получить $\Gamma \vdash \phi \to \psi$, а значит, $\phi \to \psi \in \Gamma$. Во втором случае $\Gamma \vdash \phi \to \psi$ можно получить с помощью I1. $\square$