Математическая логика (I): 3/16

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

$\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ называют противоречивым, если $\Gamma \vdash \phi$ и $\Gamma \vdash \neg\phi$ для некоторой $\phi \in \mathrm{Form}$, и непротиворечивым в противном случае.

Для удобства введём обозначения

$$\top \;:=\; p_\star \to p_\star \quad \text{и} \quad \bot \;:=\; \neg\top,$$

где $p_\star$ — фиксированная пропозициональная переменная.

Предложение

Для $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ *следующие условия эквивалентны:*

1. $\Gamma \vdash \psi$ *для всех* $\psi \in \mathrm{Form}$*;*
2. Γ *противоречиво;*
3. $\Gamma \vdash \bot$*.*

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Очевидно.

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ Предположим, что существует $\phi \in \mathrm{Form}$ такая, что $\Gamma \vdash \phi$ и $\Gamma \vdash \neg\phi$. Тогда, используя N2, легко получить $\Gamma \vdash \bot$.

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Как мы знаем, $\vdash \top$. Предположим, что $\Gamma \vdash \bot$. Отсюда, используя N2, легко получить $\Gamma \vdash \psi$ для всех $\psi \in \mathrm{Form}$. □

Далее, $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ называют максимальным непротиворечивым, когда не существует непротиворечивого $\Delta \subseteq \mathrm{Form}$ такого, что $\Gamma \subsetneq \Delta$.

Кроме того, говорят, что $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ полно, если для любой $\phi \in \mathrm{Form}$ верно $\phi \in \Gamma$ или $\neg\phi \in \Gamma$.

Теорема

Для любого $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ следующие условия эквивалентны:

1. Γ — *простая теория;*
2. Γ *непротиворечиво и полно;*
3. Γ *максимальное непротиворечивое.*

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Пусть Γ — простая теория. Разумеется, Γ непротиворечива, поскольку иначе $\Gamma = \mathrm{Form}$. Кроме того, для каждой $\phi \in \mathrm{Form}$ верно $\vdash \phi \vee \neg\phi$, а потому $\phi \vee \neg\phi \in \Gamma$, откуда $\phi \in \Gamma$ или $\neg\phi \in \Gamma$.

...

Доказательство.

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ Пусть Γ непротиворечиво и полно. Рассмотрим произвольное $\Delta \subseteq \mathrm{Form}$ такое, что $\Gamma \subsetneq \Delta$. Зафикс. какую-нибудь $\phi \in \Delta \setminus \Gamma$. В силу полноты Γ, мы имеем $\neg\phi \in \Gamma$. Стало быть, Δ противоречиво. Таким образом, Γ максимальное непротиворечивое.

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Теперь пусть Γ максимальное непротиворечивое.

Предположим, что $\phi \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \bot$, а значит, $\Gamma \vdash \phi \to \bot$. Стало быть, $\Gamma \nvdash \phi$, поскольку иначе $\Gamma \vdash \bot$.

Предположим, что $\phi \notin \Gamma$ и $\psi \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \bot$ и $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \bot$, а значит, $\Gamma \vdash \phi \to \bot$ и $\Gamma \vdash \psi \to \bot$. Отсюда с помощью D3 мы легко получаем $\Gamma \vdash \phi \vee \psi \to \bot$. Стало быть, $\phi \vee \psi \notin \Gamma$. $\square$

Насыщение...

Лемма (о расширении, a.k.a. Линденбаума)

Пусть $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *таковы, что* $\Gamma \nvdash \phi$. *Тогда существует простая теория* $\Gamma' \supseteq \Gamma$ *такая, что* $\Gamma' \nvdash \phi$.

Доказательство.

Ясно, что Form счётно. Поэтому его элементы можно расположить в последовательность:

$$\psi_0, \quad \psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots,$$

т.е. $\mathrm{Form} = \{\psi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Теперь определим последовательность

$$\Gamma_0, \quad \Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots$$

подмножеств Form по рекурсии следующим образом.

...

Доказательство (продолжение).

- Если $n = 0$, то $\Gamma_n := \Gamma$.
- Если $n = m + 1$ и $\Gamma_m \cup \{\psi_m\} \vdash \phi$, то $\Gamma_n := \Gamma_m$.
- Если $n = m + 1$ и $\Gamma_m \cup \{\psi_m\} \nvdash \phi$, то $\Gamma_n := \Gamma_m \cup \{\psi_m\}$.

По построению мы имеем $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \ldots$ Кроме того, $\Gamma_n \nvdash \phi$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Возьмём

$$\Gamma' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n.$$

Разумеется, $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\Gamma' \nvdash \phi$. Заметим, что для любой $\psi \in \mathrm{Form}$,

$$\psi \notin \Gamma' \implies \Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \phi.$$

Действительно, пусть $\psi \in \mathrm{Form}$. Тогда $\psi = \psi_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Теперь если $\psi \notin \Gamma'$, то $\Gamma_n \cup \{\psi\} \vdash \phi$, тем более $\Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \phi$.

...

Доказательство (продолжение).

Проверим, что Γ' является простой теорией.

- Поскольку $\Gamma' \nvdash \phi$, мы имеем $\Gamma' \neq \mathrm{Form}$.
- Пусть $\psi \notin \Gamma'$. Тогда $\Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \phi$, а потому $\Gamma' \nvdash \psi$.
- Пусть $\theta \notin \Gamma'$ и $\chi \notin \Gamma'$. Тогда $\Gamma' \cup \{\theta\} \vdash \phi$ и $\Gamma' \cup \{\chi\} \vdash \phi$. Значит, $\Gamma' \vdash \theta \to \phi$ и $\Gamma' \vdash \chi \to \phi$, откуда с помощью D3 легко получить $\Gamma' \vdash \theta \vee \chi \to \phi$. Поэтому $\theta \vee \chi \notin \Gamma'$.

Таким образом, Γ' обладает нужными свойствами. $\square$

Теперь представим, что Prop бесконечно, но не обязательно счётно; это несколько усложняет ситуацию, но не принципиально.

В более общем случае:

Возьмём $\kappa := |\mathrm{Prop}|$. Ясно, что $|\mathrm{Form}| = \kappa$. Поэтому элементы Form можно расположить в трансфинитную последовательность длины κ:

$$\langle \psi_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle,$$

т.е. $\mathrm{Form} = \{\psi_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$. Определим $\langle \Gamma_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle$ по трансфинитной рекурсии следующим образом.

- Если $\alpha = 0$, то $\Gamma_\alpha := \Gamma$.
- Если $\alpha = \beta + 1$ и $\Gamma_\beta \cup \{\psi_\beta\} \vdash \phi$, то $\Gamma_\alpha := \Gamma_\beta$.
- Если $\alpha = \beta + 1$ и $\Gamma_\beta \cup \{\psi_\beta\} \nvdash \phi$, то $\Gamma_\alpha := \Gamma_\beta \cup \{\psi_\beta\}$.
- Если α — предельный ординал, то $\Gamma_\alpha := \bigcup_{\beta \in \alpha} \Gamma_\beta$.

Можно проверить, что $\Gamma' := \bigcup_{\alpha \in \kappa} \Gamma_\alpha$ обл. нужными свойствами. $\square$

Альтернативное рассуждение

Другое доказательство.

Ясно, что $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ непротиворечиво, поскольку иначе $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \phi$, откуда $\Gamma \vdash \neg\phi \to \phi$, а потому $\Gamma \vdash \phi$:

1.	$(\phi \to \phi) \to ((\neg\phi \to \phi) \to (\phi \vee \neg\phi \to \phi))$	D3
2.	$\phi \to \phi$	знаем
3.	$\neg\phi \to \phi$	по условию
4.	$\phi \vee \neg\phi$	N3
5.	$(\neg\phi \to \phi) \to (\phi \vee \neg\phi \to \phi)$	из 2, 1
6.	$\phi \vee \neg\phi \to \phi$	из 3, 5
7.	ϕ	из 4, 6.

Достаточно показать, что существует максимальное непротиворечивое Γ' такое, что $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \subseteq \Gamma'$. Для этого рассмотрим

...

Другое доказательство (продолжение).

$$A \;:=\; \{\Delta \subseteq \mathrm{Form} \mid \Delta \text{ непротиворечиво}\}.$$

Обозначим за $\leqslant_A$ порядок по включению на A. Легко убедиться, что ч.у.м. $\langle A, \leqslant_A \rangle$ удовлетворяет условиям леммы Цорна. Следовательно, нужное Γ' существует. $\square$

Однако отметим, что данное доказательство имеет куда более узкий спектр применений по сравнению с исходным.

Пример

Пусть v — оценка. Рассмотрим

$$\Gamma_v \ := \ \{\phi \in \mathrm{Form} \mid v \Vdash \phi\}.$$

Легко убедиться, что Γ_v будет простой теорией.

Для каждой простой теории Γ определим оценку v_Γ по правилу

$$v_\Gamma(p) \ := \begin{cases} 1 & \text{если } \ p \in \Gamma \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

иными словами, v_Γ — это характеристическая функция для $\mathrm{Prop} \cap \Gamma$.

Лемма

Пусть Γ *— простая теория. Тогда для любой* $\phi \in \mathrm{Form}$,

$$v_\Gamma \Vdash \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \phi \ \in \ \Gamma.$$

Доказательство.

Индукция по построению ϕ, где используется доказанная нами ранее лемма о свойствах простых теорий. $\square$

Теорема (о сильной полноте $\vdash$)

Для любых $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vdash \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \models \phi.$$

В частности, $\Gamma \nvdash \bot$, *если и только если* $\Gamma \not\models \bot$, *а значит,* Γ *непротиворечиво, если и только если* Γ *выполнимо.*

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Это теорема о корректности.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Допустим, что $\Gamma \nvdash \phi$. Как нам известно, найдётся простая теория $\Gamma' \supseteq \Gamma$ такая, что $\Gamma' \nvdash \phi$. Очевидно, $\phi \notin \Gamma'$. Стало быть,

$$v_{\Gamma'} \Vdash \psi \quad \text{для всех} \quad \psi \in \Gamma', \quad \text{но} \quad v_{\Gamma'} \nVdash \phi.$$

В итоге $\Gamma' \not\models \phi$, тем более $\Gamma \not\models \phi$. □

Основные следствия

Теорема (о слабой полноте $\vdash$)

Для любой $\phi \in \mathrm{Form}$,

$$\vdash \phi \iff \models \phi,$$

т.е. выводимость из $\varnothing$ *равносильна общезначимости.* $\square$

Теорема (о компактности $\models$)

Для любых $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \models \phi \iff \Delta \models \phi \quad \text{для некоторого конечного } \Delta \subseteq \Gamma.$$

В частности, $\Gamma \not\models \bot$, *е.т.е.* $\Delta \not\models \bot$ *для всех конечных* $\Delta \subseteq \Gamma$, *а значит,* Γ *выполнимо, е.т.е. всякое конечное подмножество* Γ *выполнимо.* $\square$

слабая полнота $\vdash$ плюс компактность $\Vdash$ равно сильная полнота $\vdash$

Пример применения компактности

Пусть E — иррефлексивное и симметричное бинарное отношение на непустом множестве A. Соответствующий сим. иррефл. граф

$$\mathfrak{A} = \langle A, E \rangle$$

мы будем называть картой. При этом в $\mathfrak{A}$ каждое $S \subseteq A$ индуцирует

$$\langle S, E \cap S \times S \rangle,$$

т.е. подкарту с носителем S. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Тогда $\mathfrak{A}$ можно (правильно) раскрасить в k цветов, если существует $f : A \to k$ такая, что для любых $a_1, a_2 \in A$,

$$(a_1, a_2) \in E \implies f(a_1) \neq f(a_2).$$

Предложение

Карту $\mathfrak{A}$ *нельзя раскрасить в* k *цветов тогда и только тогда, когда некоторую конечную подкарту* $\mathfrak{A}$ *нельзя раскрасить в* k *цветов.*

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Очевидно.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Можно считать, что Prop включает

$$P \;:=\; \{p_i^a \mid a \in A \text{ и } i \in k\}.$$

Для каждого $a \in A$ обозначим

$$\phi_a \;:=\; \bigvee_{i \in k} p_i^a \wedge \bigwedge_{i \in k} \bigwedge_{j \in k \setminus \{i\}} \neg\left(p_i^a \wedge p_j^a\right).$$

...

Доказательство (продолжение).

Наконец, возьмём

$$\Gamma \;:=\; \{\phi_a \mid a \in A\} \cup \{\neg(p_i^{a_1} \wedge p_i^{a_2}) \mid (a_1, a_2) \in E \text{ и } i \in k\}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\Gamma \text{ выполнимо} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \text{ можно раскрасить в } k \text{ цветов.}$$

Теперь пусть $\mathfrak{A}$ нельзя раскрасить в k цветов. Тогда Γ невыполнимо, а значит, некоторое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ невыполнимо. Рассмотрим

$$S \;:=\; \{a \in A \mid a \text{ встречается среди верхних индексов в } \Delta\}.$$

Легко проверить, что подкарту с носителем S нельзя раскрасить в k цветов. □