Математическая логика (I): 4/16

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Компактность $\vDash$: альт. рассуждение

Другое доказательство.

Заметим, что

$$\Gamma \nvDash \phi \iff \Gamma \cup \{\neg\phi\} \text{ выполнимо.}$$

Стало быть, достаточно показать, что для любого $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \text{ выполнимо} \iff \text{всякое кон. подмножество } \Gamma \text{ выполнимо.}$$

Слева направо это очевидно. Остаётся показать импликацию справа налево. Для этого нам понадобится теорема Тихонова.

Зададим на $2 = \{0, 1\}$ дискретную топологию; соответствующее топологическое пространство обозначим за $\mathbf{2}$. Очевидно, $\mathbf{2}$ компактно.

...

Другое доказательство (продолжение).

Понятно, что множество 2^{Prop} всех оценок можно рассматривать как произведение $|\mathsf{Prop}|$ копий 2.

Зададим на 2^{Prop} топологию произведения (которую называют тихоновской); соответствующее топологическое пространство обозначим за $\mathbf{2}^{\mathsf{Prop}}$. В силу теоремы Тихонова, $\mathbf{2}^{\mathsf{Prop}}$ компактно.

Как известно, предбазой $\mathbf{2}^{\mathsf{Prop}}$ окажутся множества вида

$$\mathrm{proj}_p^{-1}(\varnothing), \quad \mathrm{proj}_p^{-1}(\{0\}), \quad \mathrm{proj}_p^{-1}(\{1\}) \quad \text{и} \quad \mathrm{proj}_p^{-1}(\{0,1\}),$$

где $p \in \mathsf{Prop}$. При этом, очевидно,

$$\mathrm{proj}_p^{-1}(\varnothing) = \varnothing \quad \text{и} \quad \mathrm{proj}_p^{-1}(\{0,1\}) = 2^{\mathsf{Prop}}.$$

...

Другое доказательство (продолжение).

Стало быть, можно считать, что предбаза состоит из множеств вида

$$B_{p,i} \ := \ \left\{ v \in 2^{\mathrm{Prop}} \mid v\,(p) = i \right\},$$

где $p \in \mathrm{Prop}$ и $i \in \{0,1\}$. Поскольку

$$B_{p,0} \ = \ 2^{\mathrm{Prop}} \setminus B_{p,1} \quad \text{и} \quad B_{p,1} \ = \ 2^{\mathrm{Prop}} \setminus B_{p,0},$$

все эти множества открыты и замкнуты одновременно, т.е. открыто-замкнуты (англ. *clopen*).

Теперь для каждой $\phi \in \mathrm{Form}$ положим

$$D_{\phi} \ := \ \left\{ v \in 2^{\mathrm{Prop}} \mid v^{*}\,(\phi) = 1 \right\}.$$

...

Другое доказательство (продолжение).

Заметим, что для любого $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \text{ выполнимо} \iff \bigcap_{\phi \in \Gamma} D_\phi \neq \varnothing.$$

Далее, легко убедиться в следующем:

- $D_p = B_{p,1}$ для всех $p \in \mathrm{Prop}$;
- для любых $\psi, \chi \in \mathrm{Form}$,

$$D_{\neg\psi} = 2^{\mathrm{Prop}} \setminus D_\psi, \quad D_{\psi\wedge\chi} = D_\psi \cap D_\chi,$$
$$D_{\psi\vee\chi} = D_\psi \cup D_\chi \quad \text{и} \quad D_{\psi\to\chi} = 2^{\mathrm{Prop}} \setminus D_\psi \cup D_\chi.$$

Отсюда без труда выводится, что D_ϕ открыто-замкнуто для каждой $\phi \in \mathrm{Form}$ (здесь используется индуция по построению ϕ).

...

Другое доказательство (продолжение).

Наконец, пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ невыполнимо, а значит,

$$\bigcap_{\phi \in \Gamma} D_\phi \;=\; \varnothing.$$

При этом, как мы уже знаем, все D_ϕ замкнуты. Ввиду компактности $\mathbf{2}^{\mathrm{Prop}}$, найдётся конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ такое, что

$$\bigcap_{\phi \in \Delta} D_\phi \;=\; \varnothing,$$

т.е. Δ невыполнимо. $\square$

Здесь используются только правила вывода, хотя и более сложные, чем в гильбертовском исчислении. Тем не менее, одно из этих правил по существу играет роль аксиомы:

$$\frac{}{\phi}\ (\mathtt{Ax})$$

Оно вводит новую «активную гипотезу». Это позволяет из данного множества формул выводить выводить любой его элемент.

Импликация

Далее, имеется два правила для импликации:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \phi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \phi \to \psi\end{matrix}}{\psi}\ (\to \texttt{Elim}) \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\phi \to \psi}\ (\to \texttt{Intro})$$

Ясно, что $(\to \texttt{Elim})$ является аналогом *modus ponens*, а с помощью $(\to \texttt{Intro})$ можно будет легко получить теорему о дедукции.

Замечание

Запись $[\phi]$ интуитивно означает, что в ходе применения рассматриваемого правила ϕ исключается из списка «активных гипотез».

Конъюнкция

Правила для конъюнкции выглядят естественно:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \phi\wedge\psi\end{matrix}}{\phi}\,(\wedge\mathtt{Elim1})\qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \phi\wedge\psi\end{matrix}}{\psi}\,(\wedge\mathtt{Elim2})$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \phi\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\vdots\\ \psi\end{matrix}}{\phi\wedge\psi}\,(\wedge\mathtt{Intro})$$

Разумеется, они соответствуют схемам аксиом `C1`, `C2` и `C3` гильбертовского исчисления.

Дизъюнкция

Правила для дизъюнкции также довольно естественны:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots \\ \phi\end{array}}{\phi \vee \psi}\ (\vee\mathtt{Intro1}) \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots \\ \psi\end{array}}{\phi \vee \psi}\ (\vee\mathtt{Intro2})$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots \\ \phi \vee \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi] \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee\mathtt{Elim})$$

Они, разумеется, соответствуют схемам аксиом D1, D2 и D3 гильбертовского исчисления.

Отрицание

Наконец, для отрицания мы имеем два правила:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\phi] & & [\phi] \\ \vdots & & \vdots \\ \psi & & \neg\psi\end{matrix}}{\neg\phi}\ (\neg\mathtt{Intro}) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg\phi] & & [\neg\phi] \\ \vdots & & \vdots \\ \psi & & \neg\psi\end{matrix}}{\phi}\ (\neg\mathtt{Elim})$$

Разумеется, $(\neg\mathtt{Intro})$ соответствует схеме аксиом $(\mathtt{N1})$, а $(\neg\mathtt{Elim})$ — методу доказательства от противного.

Замечание

В нашей системе отсутствуют правила, соответствующие $(\mathtt{N2})$ и $(\mathtt{N3})$. Смоделировать $(\mathtt{N2})$ будет легко, а вот с $(\mathtt{N3})$ будет сложнее.

Подробное определение дерева вывода

Деревом мы будем называть связный ациклический (симметричный) граф с выделенной вершиной, именуемой корнем.

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$. Под деревом вывода из Γ, или просто выводом из Γ, в нашем исчислении понимается упорядоченная пара, состоящая из конечного дерева $\langle A, E \rangle$ с корнем o и функции f, которые удовлетворяют следующим условиям.

1. $\mathrm{dom}\,(f) = A$, и f сопоставляет каждой $x \in A$ упоряд. тройку
$$\langle x_{\mathsf{S}}, x_{\mathsf{F}}, x_{\mathsf{R}} \rangle,$$
где $x_{\mathsf{S}} \in \{0, 1\}$, $x_{\mathsf{F}} \in \mathrm{Form}$ и x_{R} — название одного из правил.
2. Для любой $x \in A$ верно $\mathrm{arity}\,(x) \in \{0, 1, 2, 3\}$.

3. Пусть $x \in A$ и $\mathrm{arity}(x) = 0$. Тогда $x_\mathrm{R} = \mathrm{Ax}$.
4. Пусть $x \in A$ и $\mathrm{arity}(x) = 1$; обозначим за y единственного ребёнка x. Тогда выполнено одно из следующих условий:
   4.1 $x_\mathrm{R} = {\to}\mathtt{Intro}$, причём существуют $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ такие, что

   $$y_\mathrm{F} = \psi \quad \text{и} \quad x_\mathrm{F} = \phi \to \psi$$

   (иными словами, x_F получается из y_F по $({\to}\,\mathtt{Intro})$);
   4.2 аналогично для $x_\mathrm{R} = {\wedge}\mathtt{Elim1}$;
   4.3 аналогично для $x_\mathrm{R} = {\wedge}\mathtt{Elim2}$;
   4.4 аналогично для $x_\mathrm{R} = {\vee}\mathtt{Intro1}$;
   4.5 аналогично для $x_\mathrm{R} = {\vee}\mathtt{Intro2}$.

5. Пусть $x \in A$ и $\mathrm{arity}(x) = 2$; обозначим за y^1, y^2 двух детей x. Тогда выполнено одно из следующих условий:

   5.1 $x_R = \to \mathtt{Elim}$, причём существуют $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ такие, что

   $$y^1_F = \phi, \quad y^2_F = (\phi \to \psi) \quad \text{и} \quad x_F = \psi$$

   (иными словами, x_F получается из y^1_F и y^2_F по $(\to \mathtt{Elim})$);

   5.2 аналогично для $x_R = \wedge\mathtt{Intro}$;

   5.3 аналогично для $x_R = \neg\mathtt{Intro}$;

   5.4 аналогично для $x_R = \neg\mathtt{Elim}$.

6. Пусть $x \in A$ и $\mathrm{arity}\,(x) = 3$; обозначим за y^1, y^2, y^3 трёх детей x. Тогда $x_{\mathsf{R}} = \vee\mathtt{Elim}$, причём сущ. $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathsf{Form}$ такие, что

$$y^1_{\mathsf{F}} \; = \; \phi \vee \psi \quad \text{и} \quad y^2_{\mathsf{F}} \; = \; y^3_{\mathsf{F}} \; = \; x_{\mathsf{F}}$$

(иными словами, x_{F} получается из y^1_{F}, y^2_{F} и y^3_{F} по $\vee\mathtt{Elim}$).

7. Пусть $z \in A$, $\mathrm{arity}\,(z) = 0$ и $z_{\mathsf{S}} = 0$. Тогда на пути от o к z сущ. $x \in A$ такая, что выполнено одно из следующих условий:
   - имеет место случай 4.1, причём z_{F} — это посылка x_{F};
   - имеет место случай 5.3, причём $\neg z_{\mathsf{F}} = x_{\mathsf{F}}$;
   - имеет место случай 5.4, причём $z_{\mathsf{F}} = \neg x_{\mathsf{F}}$;
   - имеет место случай 6, причём либо $\phi = z_{\mathsf{F}}$ и y^2 лежит на пути от x к z, либо $\psi = z_{\mathsf{F}}$ и y^3 лежит на пути от x к z.

8. Кроме того, требуется, чтобы

$$\underline{A} \;:=\; \{z_{\mathsf{F}} \mid z \in A,\; \mathrm{arity}\,(z) = 0 \text{ и } z_{\mathsf{S}} = 1\}$$

являлось подмножеством Γ.

Разумеется, o_{F} называется заключением рассматриваемого дерева вывода, а элементы $\underline{A}$ — его (активными) гипотезами.

Для $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$ запись $\Gamma \triangleright \phi$ означает, что существует дерево вывода из Γ (в данном исчислении) с заключением ϕ.

Теорема (о дедукции)

Для любых $\Gamma \cup \{\phi, \psi\} \subseteq \mathsf{Form}$,

$$\Gamma \cup \{\phi\} \rhd \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \rhd \phi \to \psi.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\Gamma \rhd \phi \to \psi$. Зафиксируем какое-нибудь дерево вывода

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \phi \to \psi \end{array}$$

из Γ. Тогда

$$\cfrac{\phi \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \phi \to \psi \end{array}}{\psi}$$

будет деревом вывода из $\Gamma \cup \{\phi\}$. Стало быть, $\Gamma \cup \{\phi\} \rhd \psi$.

...

Доказательство (продолжение).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\Gamma \cup \{\phi\} \rhd \psi$. Зафиксируем какое-нибудь дерево вывода

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}$$

из $\Gamma \cup \{\phi\}$. Тогда

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi}$$

будет деревом вывода из Γ. Стало быть, $\Gamma \rhd \phi \to \psi$. $\square$

Кроме того, $\rhd$ монотонно, транзитивно и компактно (так же, как и $\vdash$).

Пример

Покажем, что $\{\phi \wedge (\psi \wedge \chi)\} \rhd (\phi \wedge \psi) \wedge \chi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \wedge (\psi \wedge \chi)}{\phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\phi \wedge (\psi \wedge \chi)}{\psi \wedge \chi}}{\psi}}{\phi \wedge \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\phi \wedge (\psi \wedge \chi)}{\psi \wedge \chi}}{\chi}}{(\phi \wedge \psi) \wedge \chi.}$$

Аналогичным образом $\{(\phi \wedge \psi) \wedge \chi\} \rhd \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\phi \wedge \psi) \wedge \chi}{\phi \wedge \psi}}{\phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\phi \wedge \psi) \wedge \chi}{\phi \wedge \psi}}{\psi} \qquad \dfrac{(\phi \wedge \psi) \wedge \chi}{\chi}}{\psi \wedge \chi}}{\phi \wedge (\psi \wedge \chi).}$$

Пример

Покажем, что $\{\phi \to \psi\} \rhd \phi \wedge \chi \to \psi \wedge \chi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi \wedge \chi]^1}{\phi} \qquad \phi \to \psi}{\psi} \qquad \dfrac{[\phi \wedge \chi]^1}{\chi}}{\psi \wedge \chi}}{\phi \wedge \chi \to \psi \wedge \chi.}\ (1)$$

(Разумеется, $\phi \to \psi$ окажется невыводимым из $\{\phi \wedge \chi \to \psi \wedge \chi\}$.)

Пример

Покажем, что $\{\phi \wedge \psi \to \chi\} \rhd \phi \to (\psi \to \chi)$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\phi]^2 \qquad [\psi]^1}{\phi \wedge \psi} \qquad \phi \wedge \psi \to \chi}{\chi}}{\psi \to \chi}\,(1)}{\phi \to (\psi \to \chi).}\,(2)$$

Напротив, покажем, что $\{\phi \to (\psi \to \chi)\} \rhd \phi \wedge \psi \to \chi$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\phi \wedge \psi]^1}{\psi} \qquad \cfrac{\cfrac{[\phi \wedge \psi]^1}{\phi} \qquad \phi \to (\psi \to \chi)}{\psi \to \chi}}{\chi}}{\phi \wedge \psi \to \chi.}\,(1)$$

Пример

Покажем, что $\{(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \chi)\} \triangleright \phi \to \psi \wedge \chi$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\phi]^1 \qquad \cfrac{(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \psi)}{\phi \to \psi}}{\psi} \qquad \cfrac{[\phi]^1 \qquad \cfrac{(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \psi)}{\phi \to \chi}}{\chi}}{\psi \wedge \chi}}{\phi \to \psi \wedge \chi.}\ (1)$$

Напротив, покажем, что $\{\phi \to \psi \wedge \chi\} \triangleright (\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \chi)$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\phi]^1 \qquad \phi \to \psi \wedge \chi}{\psi \wedge \chi}}{\psi}}{\phi \to \psi}\ (1) \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\phi]^2 \qquad \phi \to \psi \wedge \chi}{\psi \wedge \chi}}{\chi}}{\phi \to \chi}\ (2)}{(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \chi).}$$

Теорема (о сильной полноте $\triangleright$)

Для любых $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \triangleright \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash \phi.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Это теорема о корректности. Поверим на слово, что она доказывается простой индукцией по построению деревьев вывода.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\Gamma \vDash \phi$. В силу теоремы о полноте для $\vdash$, это даёт $\Gamma \vdash \phi$. Значит, нам достаточно показать, что $\Gamma \vdash \phi$ влечёт $\Gamma \triangleright \phi$; этот факт мы установим на практических занятиях. $\square$

Структуры

Под сигнатурой понимают четвёрку вида

$$\sigma = \langle \mathsf{Pred}_\sigma, \mathsf{Func}_\sigma, \mathsf{Const}_\sigma, \mathsf{arity}_\sigma \rangle,$$

где Pred_σ, Func_σ, Const_σ — попарно непересекающиеся множества, а arity_σ — функция из $\mathsf{Pred}_\sigma \cup \mathsf{Func}_\sigma$ в $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Элементы Pred_σ, Func_σ и Const_σ называют соответственно предикатными, функциональными и константными символами σ.

Для данного символа $\varepsilon \in \mathsf{Pred}_\sigma \cup \mathsf{Func}_\sigma$ число $\mathsf{arity}_\sigma(\varepsilon)$ называют местностью ε, или арностью ε, или его валентностью.

Когда из контекста ясно, о какой сигнатуре σ идёт речь, индекс $\cdot_\sigma$ может, разумеется, опускаться.

В дальнейшем при записи сигнатур нами будет допускаться определённая свобода. Так, если

$$\begin{aligned} \mathrm{Pred}_\sigma &= \{P_1, \ldots, P_i\}, \\ \mathrm{Func}_\sigma = \{f_1, \ldots, f_j\} \quad &\text{и} \quad \mathrm{Const}_\sigma = \{c_1, \ldots, c_k\}, \end{aligned}$$

то σ удобно представить как

$$\langle P_1^{n_1}, \ldots, P_i^{n_i}; f_1^{m_1}, \ldots, f_j^{m_j}; c_1, \ldots, c_k \rangle,$$

где $n_1, \ldots, n_i$ и $m_1, \ldots, m_j$ — местности соответственно $P_1, \ldots, P_i$ и $f_1, \ldots, f_j$.

Пример

Сигнатурой ч.у.м. является $\langle <^2 \rangle$, теории групп — $\langle =^2; \circ^2, \mathrm{inv}^1; \mathrm{id} \rangle$.

Под σ-структурой понимают пару вида

$$\mathfrak{A} = \langle A, I_{\mathfrak{A}} \rangle,$$

где A — непустое множество, а $I_{\mathfrak{A}}$ — функция с областью определения $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma$ такая, что:

- для любого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(P) \subseteq A^n$;
- для любого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(f) : A^m \to A$;
- для любого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(c) \in A$.

При этом A называется носителем $\mathfrak{A}$, или универсумом $\mathfrak{A}$, а $I_{\mathfrak{A}}$ — интерпретацией для σ в $\mathfrak{A}$. Вместо $I_{\mathfrak{A}}(P)$, $I_{\mathfrak{A}}(f)$ и $I_{\mathfrak{A}}(c)$ обычно пишут соответственно $P^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}}$ и $c^{\mathfrak{A}}$.

Кроме того, если σ представляется как

$$\langle P_1^{n_1}, \ldots, P_i^{n_i}; f_1^{m_1}, \ldots, f_j^{m_j}; c_1, \ldots, c_k \rangle,$$

то $\mathfrak{A}$ удобно представить как

$$\langle A; P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_i^{\mathfrak{A}}; f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_j^{\mathfrak{A}}; c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_k^{\mathfrak{A}} \rangle.$$

Более того, для некоторых *стандартных* структур $\mathfrak{A}$ даже индекс $\cdot^{\mathfrak{A}}$ может опускаться, хоть это и чревато некоторой путаницей.

Замечание

В предыдущем семестре для ч.у.м. мы использовали запись $\langle A, <_A \rangle$; аккуратнее было бы $\mathfrak{A} = \langle A; <^{\mathfrak{A}} \rangle$. Вместе с тем, очевидно, далеко не всякая структура в сигнатуре ч.у.м. сама является ч.у.м.

Пример

Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma \ := \ \langle =^2; \mathsf{s}^1, +^2, \times^2; 0 \rangle.$$

Обозначим через $\mathfrak{N}$ σ-структуру с носителем $\mathbb{N}$ такую, что:

- $=^{\mathfrak{N}}$ — это отношение равенства на $\mathbb{N}$;
- $\mathsf{s}^{\mathfrak{N}}$ — это функция последователя на $\mathbb{N}$;
- $+^{\mathfrak{N}}$ — это обычная функция сложения на $\mathbb{N}$;
- $\times^{\mathfrak{N}}$ — это обычная функция умножения на $\mathbb{N}$;
- $0^{\mathfrak{N}}$ — это настоящий ноль из $\mathfrak{N}$.

Эту структуру называют стандартной моделью арифметики.

Пример

Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma \;:=\; \langle =^2; +^2, -^1, \times^2; 0, 1\rangle.$$

Её называют сигнатурой колец, разумеется. Обозначим

$$\mathfrak{Z} \;:=\; \begin{array}{c}\sigma\text{-структуру с носителем } \mathbb{Z}\text{, в которой все символы}\\ \sigma \text{ интерпретируются естественным образом.}\end{array}$$

В частности, $-^{\mathfrak{Z}}$ — это функция взятия обратного по сложению над $\mathbb{Z}$. По аналогии вместо $\mathbb{Z}$ можно было бы использовать:

- $\mathbb{Z}_n$, т.е. множество всех целых чисел по модулю n;
- $M_n(\mathbb{R})$, т.е. множество всех матриц порядка n над $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{Q}[x]$, т.е. множество всех многочленов от x с коэф. из $\mathbb{Q}$;

(Здесь n — произвольное положительное целое число.)

Пример

Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma \;:=\; \langle =^2, \cong^4, B^3 \rangle.$$

Обозначим через $\mathfrak{G}$ σ-структуру с носителем $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ такую, что:

- $=^{\mathfrak{G}}$ — это отношение равенства на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- $\cong^{\mathfrak{G}}$ определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) \;\in\; \cong^{\mathfrak{G}} \quad\Longleftrightarrow\quad \text{отрезки } r_1 r_2 \text{ и } r_3 r_4 \text{ равны;}$$

- $B^{\mathfrak{G}}$ определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3) \;\in\; B^{\mathfrak{G}} \quad\Longleftrightarrow\quad r_2 \text{ лежит между } r_1 \text{ и } r_3 \text{ на прямой.}$$

Её можно было бы назвать стандартной моделью геометрии.

Пример

Пусть σ — сигнатура из предыдущего примера. Возьмём

$$\mathbb{H} \ := \ \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) > 0\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{H}$ σ-структуру с носителем $\mathbb{H}$ такую, что:

- $=^{\mathfrak{H}}$ — это отношение равенства на $\mathbb{H}$;
- $\cong^{\mathfrak{H}}$ определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) \ \in \ \cong^{\mathfrak{H}} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{отрезки } r_1 r_2 \text{ и } r_3 r_4 \text{ равны в смысле метрики Пуанкаре;}$$

- $B^{\mathfrak{H}}$ определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3) \ \in \ B^{\mathfrak{H}} \quad \Longleftrightarrow \quad r_2 \text{ лежит между } r_1 \text{ и } r_3 \text{ на полуокр. (или полупр.), ортог. вещ. оси.}$$

Её называют моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского.