Математическая логика (I): 5/16

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Гомоморфизмы между структурами

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две σ-структуры. Говорят, что $\xi : A \to B$ явл. гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если выполнены следующие условия:

i. для любого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ и всех $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$,

$$(a_1, \dots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \implies (\xi(a_1), \dots, \xi(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}};$$

ii. для любого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$ и всех $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$,

$$\xi\left(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_m)\right) = f^{\mathfrak{B}}(\xi(a_1), \dots, \xi(a_m));$$

iii. для любого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$,

$$\xi\left(c^{\mathfrak{A}}\right) = c^{\mathfrak{B}}.$$

Заметим, что композиция гомоморфизмов — снова гомоморфизм.

Инъективный гомоморфизм ξ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ называют **вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$**, если выполнено усиление (i), где $\Longrightarrow$ заменена на $\Longleftrightarrow$, т.е.

$$\xi\left[P^{\mathfrak{A}}\right] \;=\; P^{\mathfrak{B}} \quad \text{для каждого } P \in \mathrm{Pred}_\sigma.$$

Сюръективное вложение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ называют **изоморфизмом из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$**. Наконец, говорят, что **$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны**, и пишут $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, если сущ. изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Замечание

Гомом. ξ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ является изоморфизмом, е.т.е. найдётся обратный к нему гомоморфизм, т.е. гомоморфизм η из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$ такой, что

$$\xi \circ \eta \;=\; \mathrm{id}_A \quad \text{и} \quad \eta \circ \xi \;=\; \mathrm{id}_B.$$

$\square$

Пример

Рассмотрим нестрогие ч.у.м. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такие, что:

- $A = B = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- $\leqslant^{\mathfrak{A}}$ — это отношение делимости на $\mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ — это обычный порядок на $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Тогда $\lambda a.[a]$ будет биективным гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

Пример

Рассмотрим нестрогие ч.у.м. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такие, что:

- $A = \mathbb{N}$ и $B = \mathbb{P}$;
- $\leqslant^{\mathfrak{A}}$ — это обычный порядок на $\mathbb{N}$;
- $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ — это обычный порядок на $\mathbb{P}$.

Тогда $\lambda a.[a$-ое простое число$]$ будет изоморфизмом из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Пример

Зафиксируем $p \in \mathbb{P}$. Рассмотрим группы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такие, что:

- $A = \mathbb{Z}$ и $B = \mathbb{Z}_p$;
- $\circ^{\mathfrak{A}}$ — это сложение на $\mathbb{Z}$;
- $\circ^{\mathfrak{B}}$ — это сложение на $\mathbb{Z}_p$.

Тогда $\lambda a.[a \bmod p]$ будет сюрьективным гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Пример

Рассмотрим группы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такие, что:

- $A = \mathbb{Q}$ и $B = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$;
- $\circ^{\mathfrak{A}}$ — это сложение на $\mathbb{Q}$;
- $\circ^{\mathfrak{B}}$ — это умножение на $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Тогда $\lambda a.[2^a]$ будет вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

Автоморфизмы

Под автоморфизмами $\mathfrak{A}$ понимают изоморфизмы из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}$. Интуитивно автоморизмы — абстрактный аналог симметрий. Обозначим

$$\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{A}) \;:=\; \text{множество всех автоморфизмов } \mathfrak{A}.$$

Над $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{A})$ можно естественным образом задать структуру группы, где $\circ$ интерпретируется как композиция.

Пример

Пусть ξ — произвольный автоморфизм стандартной модели $\mathfrak{N}$ арифметики. Тогда

$$\xi\,(0) \;=\; 0, \quad \xi\,(1) \;=\; \mathrm{s}^{\mathfrak{N}}\,(\xi\,(0)) \;=\; 1, \quad \ldots$$

Значит, $\xi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Стало быть, $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{N}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

Пример

Обозначим за $\mathfrak{N}_<$ стандартный ч.у.м. с носителем $\mathbb{N}$. Пусть ξ — произвольный автоморфизм $\mathfrak{N}_<$. Нетрудно понять, что:

$$\begin{aligned}
\xi(\mathrm{least}(\mathbb{N})) &= \mathrm{least}(\mathbb{N});\\
\xi(\mathrm{least}(\mathbb{N}\setminus\{0\})) &= \mathrm{least}(\mathbb{N}\setminus\{\xi(0)\});\\
\xi(\mathrm{least}(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})) &= \mathrm{least}(\mathbb{N}\setminus\{\xi(0),\xi(1)\});\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Отсюда мы получаем:

$$\begin{aligned}
\xi(0) &= \mathrm{least}(\mathbb{N});\\
\xi(1) &= \mathrm{least}(\mathbb{N}\setminus\{0\});\\
\xi(2) &= \mathrm{least}(\mathbb{N}\setminus\{0,1\});\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Значит, $\xi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Стало быть, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{N}_<) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

Пример (со схемой решения)

Обозначим через $\mathfrak{D}$ нестрогий ч.у.м. с носителем $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, в котором $\leqslant$ интерпретируется как отношение делимости. Заметим, что:

- всякий автоморфизм $\mathfrak{D}$ переводит элементы $\mathbb{P}$ в элементы $\mathbb{P}$;
- каждую биекцию из $\mathbb{P}$ на $\mathbb{P}$ можно ед. образом расширить до автоморфизма $\mathfrak{D}$.

Отсюда нетрудно получить, что $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{D})$ фактически состоит из перестановок $\mathbb{P}$, а точнее, из их расширений.

Пример (в качестве доп. упражнения)

Для стандартной модели $\mathfrak{G}$ геометрии всякий автоморфизм представим в виде композиции движения и гомотетии.

Язык кл. логики первого порядка, FOCL

Раз и навсегда зафиксируем какое-нибудь счётное множество

$$\mathrm{Var} \ := \ \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}.$$

Элементы Var мы будем называть предметными переменными, или просто переменными; в метаязыке их роль будут играть x, y, z, ... (возможно, с индексами).

Пусть σ — произв. сигнатура. Язык $\mathscr{L}_\sigma$ кл. логики первого порядка над σ состоит из эл-ов $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma \cup \mathrm{Var}$, а также:

- $\to$, $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ (символы связок);
- $\forall$ и $\exists$ (символы кванторов);
- (,) и , (вспомогательные символы).

Для каждой $x \in \mathrm{Var}$ слова $\forall x$ и $\exists x$ называют кванторами по x.

Обозначим через Term_σ наим. множество слов в алфавите $\mathscr{L}_\sigma$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $c \in \mathrm{Var}$, то $x \in \mathrm{Term}_\sigma$;
- если $c \in \mathrm{Const}_\sigma$, то $c \in \mathrm{Term}_\sigma$;
- если $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ и $\{t_1, \ldots t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, то

$$f(t_1, \ldots, t_n) \ \in \ \mathrm{Term}_\sigma.$$

Элементы Term_σ называют σ-термами.

Пример

Пусть σ — сигнатура стандартной модели арифметики. Тогда

$$\times(+(y, \mathrm{s}(0)), \mathrm{s}(y))$$

является σ-термом, который удобнее записать как $(x + \mathrm{s}(0)) \times \mathrm{s}(x)$.

Обозначим через Form_σ наим. множество слов в алфавите $\mathscr{L}_\sigma$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(P) = n$ и $\{t_1, \ldots t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, то
$$P(t_1, \ldots, t_n) \ \in \ \mathrm{Form}_\sigma;$$
- если $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$, то
$$\{(\Phi \to \Psi), (\Phi \wedge \Psi), (\Phi \vee \Psi), \neg\Phi\} \ \subseteq \ \mathrm{Form}_\sigma;$$
- если $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$, то
$$\{\forall x\, \Phi, \exists x\, \Phi\} \ \subseteq \ \mathrm{Form}_\sigma.$$

Элементы Form_σ называют σ-формулами.

Под атомарными σ-формулами, или σ-атомами, понимаются те, что не содержат ни символов связок, ни символов кванторов.

Для любых $t \in \mathrm{Term}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ определим

$$\begin{aligned} \mathrm{sub}\,(t) &:= \{s \in \mathrm{Term}_\sigma \mid s \preccurlyeq t\}, \\ \mathrm{Sub}\,(\Phi) &:= \{\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma \mid \Psi \preccurlyeq \Phi\}. \end{aligned}$$

Разумеется, элементы $\mathrm{sub}\,(t)$ и $\mathrm{Sub}\,(\Phi)$ называются соответственно подтермами t и подформулами Φ.

Лемма

Пусть $\{t, s\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$ *таковы, что* $t \sqsubseteq s$. *Тогда* $t = s$. □

Предложение (о единственности представления термов)

Всякий $t \in \mathrm{Term}_\sigma \setminus (\mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}_\sigma)$ *можно един. образом представить в виде*

$$f\,(t_1, \ldots, t_n),$$

где $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma\,(f) = n$ *и* $\{t_1, \ldots t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$. □

Лемма

Пусть $t \in \mathrm{Term}_\sigma$ *и* $f \in \mathrm{Func}_\sigma$. *Тогда всякое вхождение* f *в* t *является началом вхождения некоторого подтерма.* $\square$

Предложение (о подтермах)

Пусть $t \in \mathrm{Term}_\sigma$.

- *Если* $t \in \mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}_\sigma$, *то* $\mathrm{sub}(t) = \{t\}$.
- *Если* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, *где* $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ *и* $\{t_1, \ldots t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, *то*

$$\mathrm{sub}(t) = \mathrm{sub}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{sub}(t_n) \cup \{t\}.$$

$\square$

Лемма

Пусть $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ *таковы, что* $\Phi \sqsubseteq \Psi$. *Тогда* $\Phi = \Psi$. □

Обозначим через Atom_σ множество всех атомарных σ-формул.

Предложение (о единственности представления формул)

Всякую $\Phi \in \mathrm{Atom}_\sigma$ *можно един. образом представить в виде*

$$P\,(t_1, \ldots, t_n),$$

где $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma\,(P) = n$ *и* $\{t_1, \ldots t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$.

Кроме того, всякую $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma \setminus \mathrm{Atom}_\sigma$ *можно един. образом представить в виде*

$$(\Theta \to \Omega), \quad (\Theta \wedge \Omega), \quad (\Theta \vee \Omega), \quad \neg\Theta, \quad \forall x\,\Theta \quad \text{или} \quad \exists x\,\Theta,$$

где $\{\Theta, \Omega\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$. □

Лемма

Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$*. Тогда всякое вхождение* $\neg$, (, $\forall$ *или* $\exists$ *в* Φ *является началом вхождения некоторой подформулы.* $\square$

Предложение (о подформулах)

Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$*.*

- *Если* $\Phi \in \mathrm{Atom}_\sigma$*, то* $\mathrm{Sub}\,(\Phi) = \{\Phi\}$*.*
- *Если* $\Phi = (\Theta \circ \Omega)$*, где* $\{\Theta, \Omega\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$*, то*

$$\mathrm{Sub}\,(\Phi) \ = \ \mathrm{Sub}\,(\Theta) \cup \mathrm{Sub}\,(\Omega) \cup \{\Phi\};$$

- *Если* $\Phi = \neg\Theta$*, где* $\Theta \in \mathrm{Form}_\sigma$*, или* $\Phi = \mathrm{Q}x\,\Theta$*, где* $x \in \mathrm{Var}$*,* $\Theta \in \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$*, то*

$$\mathrm{Sub}\,(\Phi) \ = \ \mathrm{Sub}\,(\Theta) \cup \{\Phi\}.$$

$\square$

Связанные и свободные переменные

Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, $x \in \mathrm{Var}$ и $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$.

Каждое вхождение $\mathrm{Q}x$ в Φ является началом вхождения некоторой подформулы, причём последнее определяется однозначно; его называют областью действия данного вхождения $\mathrm{Q}x$.

Вхождение x в Φ называется связанным, если оно входит в область действия какого-нибудь вхождения $\forall x$ или $\exists x$, и свободным иначе.

Далее, говорят, что x является свободной переменной в Φ, если у x есть хотя бы одно свободное вхождение в Φ.

Для удобства введём обозначение

$$\mathrm{FV}(\Phi) \ := \ \left\{ z \in \mathrm{Var} \ \middle| \ \begin{array}{l} \text{у } z \text{ имеется хотя бы одно} \\ \text{свободное вхождение в } \Phi \end{array} \right\}.$$

Интуитивно элементы $\mathrm{FV}(\Phi)$ играют роль параметров для Φ. Запись $\Phi(x_1, \ldots, x_\ell)$ указывает на то, что $\mathrm{FV}(\Phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_\ell\}$.

Наконец, обозначим

$$\mathrm{Sent}_\sigma \ := \ \{\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma \mid \mathrm{FV}(\Phi) = \varnothing\}$$

Элементы Sent_σ называют σ-предложениями, реже — замкнутыми σ-формулами. Они могут выступать в качестве нелог. аксиом.

Замечание

Можно провести аналогию между кванторами и операторами суммирования, интегрирования и т.д. Так, в выражении

$$\int_0^x y \cdot z\, dy$$

оба вхождения y связаны; вместо них нельзя подставить конкретные числа. Вместе с тем x и z свободны и фактически играют роль параметров. Далее, в выражении

$$2y + \int_0^x y \cdot z\, dy$$

первое вхождение y является свободным, а другие два — нет. Интуитивно данное выражение равносильно

$$2y + \int_0^x u \cdot z\, du.$$

Пример

Пусть σ — сигнатура арифметики. Рассмотрим σ-формулу

$$\Phi \;:=\; \forall x\,\exists y\; x = y + 0 \times u \wedge \forall y\,\exists z\; y + z = x.$$

Тогда $\mathrm{FV}(\Phi) = \{u, x\}$. Тут мы можем написать $\Phi(u, x)$ или $\Phi(x, u)$; также приемлемы «избыточные» $\Phi(u, x, y)$, $\Phi(x, u, v)$ и т.п.

Пример

Пусть σ — сигнатура (строгих) ч.у.м. В таком случае под аксиомами ч.у.м. понимают следующие σ-предложения:

- $\forall x\, \neg x < x$; $\qquad \% \forall x\; x \not< x$
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x < y \wedge y < z \to x < z)$.

Интуитивно σ-структура является ч.у.м., если и только если она удовлетворяет этим аксиомам.