Математическая логика (I): 6/16

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

О подстановках термов в формулы

Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, $x \in \mathrm{Var}$ и $t \in \mathrm{Term}_\sigma$. Обозначим

$\Phi\,(x/t)$:= результат одновременной замены всех свободных вхождений x в Φ на t.

Применение этой операции порой приводит к весьма нежелательным последствиям. Так, σ-формулы вида

$$\forall x\, \Phi \to \Phi\,(x/t)$$

кажутся истинными, но при

$$\sigma \;:=\; \langle <^2 \rangle, \quad \Phi \;:=\; \exists y\, x < y \quad \text{и} \quad t \;:=\; y$$

мы получаем

$$\forall x\, \exists y\, x < y \to \exists y\, y < y.$$

Кроме того, σ-формулы вида

$$\Phi\,(x/t) \to \exists x\,\Phi$$

кажутся истинными, но при

$$\sigma \ := \ \langle \leqslant^2 \rangle, \quad \Phi \ := \ \forall y\, x \leqslant y \quad \text{и} \quad t \ := \ y$$

мы получаем

$$\forall y\, y \leqslant y \to \exists x\, \forall y\, x \leqslant y.$$

Поэтому с подстановками нужно обращаться аккуратнее.

Мы будем говорить, что t свободен для (подстановки вместо) x в Φ, если ни одно из свободных вхождений x в Φ не находится в области действия квантора по переменной из t.

Замечание

Проводя аналогию с оператором интегрирования, рассмотрим

$$\int_0^1 y \cdot z \, dy.$$

Подстановка $u + v$ вместо z в это выражение даёт

$$\int_0^1 y \cdot (u + v) \, dy.$$

Тут уже два параметра, но смысл практически не изменился; просто z приобрело более конкретный вид. С другой стороны, при формальной подстановке $u + y$ вместо z мы получим

$$\int_0^1 y \cdot (u + y) \, dy \;=\; \int_0^1 y \cdot u + y^2 \, dy,$$

что существенно меняет смысл исходного выражения.

Семантика для кл. логики первого порядка

Под означиваниями переменных в $\mathfrak{A}$, или просто означиваниями в $\mathfrak{A}$, понимаются функции из Var в A. Каждое означивание ν в $\mathfrak{A}$ можно расширить до $\overline{\nu} : \mathrm{Term}_\sigma \to A$ естественным образом:

$$\begin{aligned} \overline{\nu}(x) &:= \nu(x); \\ \overline{\nu}(c) &:= c^{\mathfrak{A}}; \\ \overline{\nu}(f(t_1, \ldots, t_n)) &:= f^{\mathfrak{A}}(\overline{\nu}(t_1), \ldots, \overline{\nu}(t_n)). \end{aligned}$$

В дальнейшем для любых $x \in \mathrm{Var}$ и $a \in A$ через ν^x_a будет обозначаться означивание, получающееся из ν по правилу

$$\nu^x_a(y) := \begin{cases} \nu(y) & \text{если } y \neq x, \\ a & \text{если } y = x. \end{cases}$$

Определим $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ индукцией по построению Φ:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathfrak{A} \Vdash P\,(t_1, \ldots, t_n)\,[\nu] & \iff & (\overline{\nu}\,(t_1), \ldots, \overline{\nu}\,(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}; \\
\mathfrak{A} \Vdash \Psi \wedge \Theta\,[\nu] & \iff & \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu] \text{ и } \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu]; \\
\mathfrak{A} \Vdash \Psi \vee \Theta\,[\nu] & \iff & \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu] \text{ или } \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu]; \\
\mathfrak{A} \Vdash \neg\Psi\,[\nu] & \iff & \mathfrak{A} \nVdash \Psi\,[\nu]; \\
\mathfrak{A} \Vdash \Psi \to \Theta\,[\nu] & \iff & \mathfrak{A} \nVdash \Psi\,[\nu] \text{ или } \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu]; \\
\mathfrak{A} \Vdash \exists x\,\Psi\,[\nu] & \iff & \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu^x_a] \text{ для некоторого } a \in A; \\
\mathfrak{A} \Vdash \forall x\,\Psi\,[\nu] & \iff & \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu^x_a] \text{ для всех } a \in A.
\end{array}
$$

Стоит отметить, что (не)верность $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ не зависит от того, какие значения ν сопоставляет элементам $\mathrm{Var} \setminus \mathrm{FV}\,(\Phi)$.

Если Φ имеет вид $\Phi(x_1, \ldots, x_\ell)$, т.е. $\mathrm{FV}(\Phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_\ell\}$, то вместо $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu]$ нередко пишут

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi\left[x_1/\nu(x_1), \ldots, x_\ell/\nu(x_\ell)\right],$$

или же $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu(x_1), \ldots, \nu(x_\ell)]$. В частности, для $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$ обычно используется запись $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$.

Наконец, пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Говорят, что $\mathfrak{A}$ является моделью Γ, и пишут $\mathfrak{A} \Vdash \Gamma$, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$ для всех $\Phi \in \Gamma$.

Предложение

Пусть ξ — изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Тогда для каждой σ-формулы Φ и любого означивания ν в $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Phi\,[\nu \circ \xi].$$

(Очевидно, $\nu \circ \xi$ является означиванием в $\mathfrak{B}$.)

Доказательство.

Возьмём $\mu := \nu \circ \xi$. Заметим, что для всех $t \in \mathrm{Term}_\sigma$,

$$\overline{\mu}\,(t) \;=\; \xi\,(\overline{\nu}\,(t))$$

(это доказывается простой индукцией по построению t). Теперь идёт несложная индукция по построению Φ.

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu] \quad &\Longleftrightarrow \quad (\overline{\nu}(t_1), \ldots, \overline{\nu}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}} \\
&\Longleftrightarrow \quad (\xi(\overline{\nu}(t_1)), \ldots, \xi(\overline{\nu}(t_n))) \in P^{\mathfrak{B}} \\
&\Longleftrightarrow \quad (\overline{\mu}(t_1), \ldots, \overline{\mu}(t_n)) \in P^{\mathfrak{B}} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Phi[\mu].
\end{aligned}$$

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $\Phi = \neg\Psi$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \nVdash \Psi\,[\nu] \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \nVdash \Psi\,[\mu] \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Phi\,[\mu]. \end{aligned}$$

- Пусть $\Phi = \Psi \wedge \Theta$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu] \ \text{ и } \ \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu] \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Psi\,[\mu] \ \text{ и } \ \mathfrak{B} \Vdash \Theta\,[\mu] \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Phi\,[\mu]. \end{aligned}$$

- Аналогично для $\Phi = \Psi \vee \Theta$ и $\Phi = \Psi \to \Theta$.

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $\Phi = \forall x\, \Psi$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu_a^x] \ \text{ для всех } a \in A \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Psi\,\left[\mu_{\xi(a)}^x\right] \ \text{ для всех } a \in A \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Psi\,[\mu_b^x] \ \text{ для всех } b \in B \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Phi\,[\mu].
\end{aligned}$$

- Аналогично для $\Phi = \exists x\, \Psi$.

□

Следствие

В изоморфных структурах истинны одни и те же предложения. □

Пусть дана произвольная σ-структура $\mathfrak{A}$.

Мы называем $S \subseteq A^\ell$ определимым в $\mathfrak{A}$, если существует σ-формула $\Phi(x_1, \ldots, x_\ell)$ такая, что

$$S = \left\{ \vec{a} \in A^\ell \mid \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\vec{a}] \right\};$$

в этом случае ещё говорят, что Φ определяет S в $\mathfrak{A}$.

В частности, $\xi : A^\ell \to A$ определима в $\mathfrak{A}$, если определим её график.

Кроме того, $a \in A$ определим в $\mathfrak{A}$, если $\{a\}$ определимо.

Пример

Отношение делимости на $\mathbb{N}$ определимо в $\mathfrak{N}$ посредством формулы

$$\Phi(x, y) \ := \ \exists z \, x \times z = y,$$

а обычный строгий порядок на $\mathbb{N}$ — посредством

$$\Psi(x, y) \ := \ \exists z \, (z \neq 0 \wedge x + z = y).$$

Пример

Функция последователя на $\mathbb{N}$ определима в $\mathfrak{N}_<$ посредством

$$x < y \wedge \neg \exists z \, (x < z \wedge z < y).$$

Пример

В стандартном кольце $\mathfrak{Z}$ с носителем $\mathbb{Z}$ будет определимо отношение «быть больше нуля»; тут можно использовать

$$\Phi(x) \;:=\; \exists y_1, y_2, y_3, y_4 \left(x = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2\right),$$

а потому обычный строгий порядок на $\mathbb{Z}$ определим в $\mathfrak{Z}$ посредством

$$\Psi(x, y) \;:=\; \exists z \left(\Phi(z) \wedge z \neq 0 \wedge x + z = y\right).$$

Пример

Обычный строгий порядок на $\mathbb{R}$ определим в стандартном кольце $\mathfrak{R}$ с носителем $\mathbb{R}$ посредством

$$\Theta(x, y) \;:=\; \exists z \left(z \neq 0 \wedge x + z \times z = y\right).$$

Пример

Рассмотрим стандартную модель $\mathfrak{G}$ геометрии. В ней отношения

- «x лежит на прямой yz» и
- «прямые xx' и yy' и параллельны»

определимы посредством соответственно

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &:= B(x, y, z) \vee B(z, x, y) \vee B(y, z, x) \quad \text{и} \\ \Psi(x, x', y, y') &:= x \neq x' \wedge y \neq y' \wedge \neg \exists z (\Phi(z, x, x') \wedge \Phi(z, y, y')). \end{aligned}$$

При этом аксиому о параллельных можно выразить так:

$$\begin{aligned} \mathrm{Euclid\_5} := \forall x, y, z\, (x \neq y \wedge \neg \Phi(z, x, y) \to \\ \forall u, v\, (\Psi(z, u, x, y) \wedge \Psi(z, v, x, y) \to \Phi(u, z, v))). \end{aligned}$$

Она будет истинна в $\mathfrak{G}$, но ложна в модели $\mathfrak{H}$.

Пример (без доказательства)

Рассмотрим структуру $\langle \mathbb{N}; |; \mathrm{s} \rangle$, где $|$ интерпретируется как отношение делимости на $\mathbb{N}$. Ноль определим в этой структуре посредством

$$\Phi(x) \;:=\; \neg x \mid x,$$

а отношение равенства на $\mathbb{N}$ — посредством

$$\Psi(x, y) \;:=\; (\Phi(x) \wedge \Phi(y)) \vee (x \mid y \wedge y \mid x).$$

Джулией Робинсон было показано, что

функции сложения и умножения на $\mathbb{N}$ определимы в $\langle \mathbb{N}; |; \mathrm{s} \rangle$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\mathrm{supp}(n) \;:=\; \text{множество всех простых делителей } n.$$

Гипотеза Эрдёша–Вудса заключается в следующем: найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{supp}(i+n) = \operatorname{supp}(j+n) \quad \text{для всех } n \in \{0, \ldots, N\} \qquad \Longrightarrow \quad i = j.$$

Это известная открытая проблема.

Пример (без доказательства)

Теперь рассмотрим $\langle \mathbb{N}; \perp; s \rangle$, где $\perp$ интерпретируется как отношение взаимной простоты на $\mathbb{N}$. Джоном Вудсом было показано, что следующие условия эквивалентны:

- отношение равенства на $\mathbb{N}$ определимо в $\langle \mathbb{N}; \perp, s \rangle$;
- функции сложения и умножения на $\mathbb{N}$ определимы в $\langle \mathbb{N}; =, \perp, s \rangle$;
- верна гипотеза Эрдёша–Вудса.

Пример (доказательство будет в 5ом семестре)

Известно, что:

- всякое (вычислимо) перечислимое множество определимо в $\mathfrak{N}$;
- всякая частичная вычислимая функция определима в $\mathfrak{N}$.

Например, $\lambda n.[2^n]$ оказывается определима в $\mathfrak{N}$.

Этот пример связан со знаменитыми теоремами Гёделя о неполноте «достаточно богатых систем».

Предложение

Пусть S определимо в $\mathfrak{A}$. Тогда для любого $\xi \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{A})$,

$$\xi\,[S] \ \subseteq \ S,$$

т.е. S замкнуто относительно автоморфизмов $\mathfrak{A}$. $\square$

Замечание

Это даёт необходимое, но далеко не достаточное усл. определимости. Так, если Form_σ счётно, A бесконечно и $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{A}) = \{\mathrm{id}_A\}$, то:

- всякое $S \subseteq A^\ell$ замкнуто относительно автоморфизмов $\mathfrak{A}$;
- множество всех определимых в $\mathfrak{A}$ множеств не более чем счетно;
- значит, существует $2^{|A|}$ замкнутых относительно автоморфизмов $\mathfrak{A}$, но не определимых в $\mathfrak{A}$ множеств.

Пример

В $\langle \mathbb{Z}; =, + \rangle$ не определимо обычное отношение порядка на $\mathbb{Z}$, так как $\lambda z.[-z]$ является автоморфизмом данной структуры.

Пример

С другой стороны, в $\langle \mathbb{Z}; < \rangle$ уже не определима функция сложения на $\mathbb{Z}$, так как $\lambda z.[z + 1]$ является автоморфизмом данной структуры.

Пример

В $\mathfrak{D}$ нельзя определить никакой элемент, кроме 1.

Пример (см. доп. упражнение выше)

В $\mathfrak{G}$ нельзя определить:

- никакую конкретную фигуру за исключением $\varnothing$ и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- отношение «длина отрезка xy равна единице»;
- отношение «вершины треуг. xyz обходятся против час. стрелки».

О равенстве

Пусть $=$ содержится в Pred_σ, причём $\mathrm{arity}_\sigma(=) = 2$.

σ-Структуру $\mathfrak{A}$ называют нормальной, если $=$ интерпретируется в $\mathfrak{A}$ как настоящее равенство, т.е. $=^{\mathfrak{A}}$ совпадает с id_A.

Замечание

С практической точки зрения, если мы работаем в рамках фиксированного языка, начинает стираться грань между:

- настоящим равенством, для разговора о котором необходимо выйти за пределы данного языка;
- неразличимостью средствами данного языка.

В математике роль отношения равенства нередко играет отношение эквивалентности специального типа.

Обозначим через Eq$_\sigma$ множество, состоящее из σ-предложений

- $\forall x\, x = x$,
- $\forall x\, \forall y\, (x = y \to y = x)$ и
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \wedge y = z \to x = z)$,

а также всех σ-предложений видов

- $\forall x_1\, \forall y_1\, \ldots\, \forall x_n\, \forall y_n\, (\vec{x} = \vec{y} \to (P\,(\vec{x}) \leftrightarrow P\,(\vec{y})))$ и
- $\forall x_1\, \forall y_1\, \ldots\, \forall x_m\, \forall y_m\, (\vec{x} = \vec{y} \to f\,(\vec{x}) = f\,(\vec{y}))$,

где $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ и $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, причём $\mathrm{arity}_\sigma\,(P) = n$ и $\mathrm{arity}_\sigma\,(f) = m$. Под аксиомами равенства для σ понимают элементы Eq$_\sigma$.

Разумеется, $\mathfrak{A} \Vdash \mathrm{Eq}_\sigma$ для всякой нормальной σ-структуры $\mathfrak{A}$. Мы докажем в некотором смысле «обратное утверждение».

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная модель Eq_σ.

Очевидно, $=^{\mathfrak{A}}$ будет отношением эквивалентности на A. Обозначим через $\mathfrak{A}'$ σ-структуру с носителем $A_{/=^{\mathfrak{A}}}$ такую, что:

- для любого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$,

$$c^{\mathfrak{A}'} \;:=\; \left[c^{\mathfrak{A}}\right];$$

- для любого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$,

$$f^{\mathfrak{A}'}([a_1], \ldots, [a_m]) \;:=\; \left[f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)\right];$$

- для любого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$,

$$([a_1], \ldots, [a_m]) \;\in\; P^{\mathfrak{A}'} \quad :\Longleftrightarrow \quad (a_1, \ldots, a_m) \;\in\; P^{\mathfrak{A}}.$$

(здесь $[a]$ — класс эквивалентности a по $=^{\mathfrak{A}}$); корректность данного определения обеспечивают аксиомы равенства для σ.

Теорема

Для любых σ-формулы Φ и означивания ν в $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}' \Vdash \Phi\,[\nu'].$$

где ν' отображает каждую $x \in \mathrm{Var}$ в $[\nu\,(x)]$.

Доказательство.

Заметим, что для всех $t \in \mathrm{Term}_\sigma$,

$$\overline{\nu}'\,(t) \;=\; [\overline{\nu}\,(t)]$$

(это доказывается простой индукцией по построению t). Теперь идёт несложная индукция по построению Φ.

...

Доказательство (продолжение).

Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu] &\iff (\overline{\nu}(t_1), \ldots, \overline{\nu}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}} \\ &\iff ([\overline{\nu}(t_1)], \ldots, [\overline{\nu}(t_n)]) \in P^{\mathfrak{A}'} \\ &\iff (\overline{\nu}'(t_1), \ldots, \overline{\nu}'(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}'} \\ &\iff \mathfrak{A}' \Vdash \Phi[\nu']. \end{aligned}$$

Остальные случаи — в качестве упражнения. □

Следствие

Для каждого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *следующие условия эквивалентны:*

- *у* Γ *есть нормальная модель;*
- *у* $\Gamma \cup \mathrm{Eq}_\sigma$ *есть модель.* □

Отныне будет предполагаться, что все рассматриваемые σ-структуры нормальны, если явным образом не оговорено обратное.