Математическая логика (I): 7/16

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Выполнимость и общезначимость

σ-Формулу Φ называют:

- выполнимой, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ для некоторых $\mathfrak{A}$ и ν;
- общезначимой, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ для всех $\mathfrak{A}$ и ν.

Здесь подразумевается, что $\mathfrak{A}$ бегает по σ-структурам, тогда как ν — по означиваниям в $\mathfrak{A}$. Очевидно,

$$\Phi \text{ общезначима} \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\Phi \text{ не выполнима.}$$

Теорема (Чёрча; на 5ый семестр)

Проблема выполнимости для кл. логики первого порядка в сигнатуре арифметики алгоритмически неразрешима.

Замечание

Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, и $x_1, \ldots, x_\ell$ суть в точности все элементы $\mathrm{FV}(\Phi)$ в порядке их появления в Φ. Обозначим

$$\widetilde{\forall}\Phi \;:=\; \forall x_1, \ldots, x_\ell\, \Phi \quad \text{и} \quad \widetilde{\exists}\Phi \;:=\; \exists x_1, \ldots, x_\ell\, \Phi.$$

Тогда $\widetilde{\forall}\Phi$ называют универсальным замыканием Φ, а $\widetilde{\forall}\Phi$ — экзистенциальным замыканием Φ. Ясно, что для каждой $\mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\forall}\Phi \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \;\text{ для всех } \nu;\\
\mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\exists}\Phi \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \;\text{ для некоторой } \nu.
\end{aligned}$$

Стало быть, имеют место следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned}
\Phi \;\text{ выполнима} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\exists}\Phi \;\text{ для некоторой } \mathfrak{A};\\
\Phi \;\text{ общезначима} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\forall}\Phi \;\text{ для всех } \mathfrak{A}.
\end{aligned}$$

Семантические следование и эквивалентность

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$. Говорят, что Φ семантически следует из Γ, и пишут $\Gamma \vDash \Phi$, если для любой $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Gamma \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\forall}\Phi.$$

Вместо $\varnothing \vDash \Phi$ обычно пишут $\vDash \Phi$. Очевидно,

$$\vDash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \text{ общезначима}.$$

Наконец, формулы Φ и Ψ называют семантически эквивалентными, если $\vDash \Phi \leftrightarrow \Psi$; при этом пишут $\Phi \equiv \Psi$.

Пример

Для любых $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$,

$$\forall x\, \Phi \;\equiv\; \neg\exists x\, \neg\Phi \quad \text{и} \quad \exists x\, \Phi \;\equiv\; \neg\forall x\, \neg\Phi.$$

σ-Формула Φ называется бескванторной, если $\forall \not\preccurlyeq \Phi$ и $\exists \not\preccurlyeq \Phi$.

Под пренексными нормальными формами, сокр. п.н.ф., понимаются σ-формулы вида

$$\mathrm{Q}_1 x_1 \ \ldots\ \mathrm{Q}_\ell x_\ell\, \Psi,$$

где $\{\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_\ell\} \subseteq \{\forall, \exists\}$, $\{x_1, \ldots, x_\ell\} \subseteq \mathrm{Var}$ и Ψ бескванторная.

Упражнение (обязат.)

Всякая σ-формула семантически эквивалентна некоторой п.н.ф.

Здесь используются следующие схемы аксиом:

I1. $\Phi \to (\Psi \to \Phi)$;

I2. $(\Phi \to (\Psi \to \Theta)) \to ((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Theta))$;

C1. $\Phi \wedge \Psi \to \Phi$;

C2. $\Phi \wedge \Psi \to \Psi$;

C3. $\Phi \to (\Psi \to \Phi \wedge \Psi)$;

D1. $\Phi \to \Phi \vee \Psi$;

D2. $\Psi \to \Phi \vee \Psi$;

D3. $(\Phi \to \Theta) \to ((\Psi \to \Theta) \to (\Phi \vee \Psi \to \Theta))$;

N1. $(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to \neg\Psi) \to \neg\Phi)$;

N2. $\neg\Phi \to (\Phi \to \Psi)$;

N3. $\Phi \vee \neg\Phi$;

Q1. $\forall x\, \Phi \to \Phi\,(x/t)$, где t свободен для x в Φ;

Q2. $\Phi\,(x/t) \to \exists x\, \Phi$, где t свободен для x в Φ.

Кроме того, в случаях, когда $=$ содержится в Pred_σ, элементы Eq_σ также будут считаться аксиомами нашего исчисления.

Помимо них имеется уже знакомое нам правило *modus ponens*, т.е.

$$\frac{\Phi \qquad \Phi \to \Psi}{\Psi}\ (\mathtt{MP}),$$

и добавляются два новых «кванторных» правила вывода:

$$\frac{\Psi \to \Phi}{\Psi \to \forall x\, \Phi}\ (\mathrm{BR1}) \qquad \text{и} \qquad \frac{\Phi \to \Psi}{\exists x\, \Phi \to \Psi}\ (\mathrm{BR2}),$$

где $x \notin \mathrm{FV}\,(\Psi)$; они традиционно называются правилами Бернайса.

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Под выводом из Γ в данном гильбертов. исчислении понимают конечную последовательность

$$\Phi_0,\ \ldots,\ \Phi_n$$

(где $n \in \mathbb{N}$) элементов Form_σ такую, что для каждого $i \in \{0, \ldots, n\}$ выполнено одно из следующих условий:

- Φ_i является аксиомой;
- Φ_i является элементом Γ;
- Φ_i получается из некоторых предшествующих Φ_j и Φ_k по $\mathtt{MP}$;
- Φ_i получается из некоторой предшествующей Φ_j по $\mathtt{BR1}$;
- Φ_i получается из некоторой предшествующей Φ_j по $\mathtt{BR2}$.

При этом Φ_n называют заключением рассматриваемого вывода, а элементы Γ — его гипотезами.

Для $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ запись $\Gamma \vdash \Phi$ означает, что существует вывод из Γ с заключением Φ. Вместо $\varnothing \vdash \Phi$ обычно пишут $\vdash \Phi$.

Кроме того, говорят, что:

- Φ опровержима в Γ, если $\Gamma \vdash \neg\Phi$;
- Φ независима от Γ, если $\Gamma \nvdash \Phi$ и $\Gamma \nvdash \neg\Phi$.

Например, благодаря трудам Коэна и Гёделя мы знаем, что:

- C независима от ZF, а CH — от ZFC;
- в частности, $\neg$C не опровержима в ZF, а $\neg$CH — в ZFC.

Разумеется, тут предполагается непротиворечивость соответственно ZF и ZFC, поскольку иначе выводимо всё, что угодно.

В качестве простейших свойств $\vdash$ вновь выступают:

- если $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Delta \vdash \Phi$; (монотонность)
- если $\Delta \vdash \Psi$ для всех $\Psi \in \Gamma$, и $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Delta \vdash \Phi$; (транзитивность)
- если $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Delta \vdash \Phi$ для нек. конечного $\Delta \subseteq \Gamma$. (компактность)

Однако стоит помнить, что Γ и Δ представляют собой множества σ-предложений, т.е. у их элементов нет свободных переменных.

Замечание

Ясно, что $\vDash$ монотонно и транзитивно. Более того, хотя компактность $\vDash$ отнюдь не очевидна, она будет следовать из совпадения $\vdash$ и $\vDash$.

Пусть $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$. Для всякой проп. формулы ϕ обозначим

$$\xi\phi \;:=\; \text{результат замены (всех вхождений) каждой } p \in \mathrm{Prop} \text{ в } \phi \text{ на } \xi(p).$$

Обратите внимание, что $\xi\phi$ — первопорядковая σ-формула.

Предложение

Пусть $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$ и $\vdash \phi$ (в проп. исчислении). Тогда $\vdash \xi\phi$ (уже в первопор. исчислении).

Доказательство.

Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\phi_0, \ \ldots, \ \phi_n \ = \ \phi$$

из $\varnothing$ (в проп. исчислении), и рассмотрим последовательность

$$\xi\phi_0, \ \ldots, \ \xi\phi_n \ = \ \xi\phi.$$

Покажем индукцией по $i \in \{0, \ldots, n\}$, что $\xi\phi_0, \ldots, \xi\phi_i$ является выводом из $\varnothing$ (в первопор. исчислении). Это практически очевидно.

Возможны следующие случаи.

- Пусть ϕ_i — аксиома. Тогда $\xi\phi_i$ — аксиома.
- Пусть ϕ_i получается из предшествующих ϕ_j и $\phi_k = \phi_j \to \phi_i$ по $\mathtt{MP}$. Тогда $\xi\phi_i$ получается из $\xi\phi_j$ и $\xi\phi_k = \xi\phi_k \to \xi\phi_i$ по $\mathtt{MP}$.

Стало быть, $\vdash \xi\phi_i$ для всех $i \in \{0, \ldots, n\}$. В частности, при $i = n$ мы имеем $\vdash \xi\phi$. $\square$

Следствие

Пусть $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $\models \phi$ *(в смысле проп. логики). Тогда* $\vdash \xi\phi$.

Доказательство.

В силу теоремы о (слабой) полноте для проп. исчисления, мы имеем $\vdash \phi$, а потому $\vdash \xi\phi$. $\square$

Так, в нашем первопорядковом исчислении окажутся выводимы

$$\Phi \to \Phi, \quad \Phi \to \neg\neg\Phi \quad \text{и} \quad \neg\neg\Phi \to \Phi$$

для произвольной σ-формулы Φ.

Пример

Пусть переменная y не входит в σ-формулу Φ. Тогда

$$\begin{array}{lll} 1. & \forall x\,\Phi \to \Phi\,(x/y) & \texttt{Q1} \\ 2. & \forall x\,\Phi \to \forall y\,\Phi\,(x/y) & \text{из } 1;\ \texttt{Br1} \end{array}$$

будет выводом из $\varnothing$. Кроме того,

$$\begin{array}{lll} 1. & \forall y\,\Phi\,(x/y) \to \overbrace{\Phi\,(x/y)\,(y/x)}^{\Phi} & \texttt{Q1} \\ 2. & \forall y\,\Phi\,(x/y) \to \forall x\,\Phi & \text{из } 1;\ \texttt{Br1} \end{array}$$

будет выводом из $\varnothing$. Стало быть, $\vdash \forall x\,\Phi \leftrightarrow \forall y\,\Phi\,(x/y)$.

Пример

Покажем, что $\vdash \exists x\, \neg\Phi \to \neg\forall x\, \Phi$:

$$
\begin{array}{lll}
1. & \forall x\, \Phi \to \overbrace{\Phi\,(x/x)}^{\Phi} & \texttt{Q1} \\
2. & (\forall x\, \Phi \to \Phi) \to (\neg\Phi \to \neg\forall x\, \Phi) & \text{тавтология} \\
3. & \neg\Phi \to \neg\forall x\, \Phi & \text{из 1, 2; } \texttt{MP} \\
4. & \exists x\, \neg\Phi \to \neg\forall x\, \Phi & \text{из 3; } \texttt{Br2}.
\end{array}
$$

Заметим, что с помощью тавтологий из этого можно легко получить $\vdash \forall x\, \Phi \to \neg\exists x\, \neg\Phi$.

Пример

Пусть $\vdash \Phi \to \Psi$. Покажем, что тогда $\vdash \forall x\, \Phi \to \forall x\, \Psi$:

1.	$\forall x\, \Phi \to \Phi$	Q1
2.	$\Phi \to \Psi$	предположение
3.	$\forall x\, \Phi \to \Psi$	из 1, 2 и тавтологий; MP
4.	$\forall x\, \Phi \to \forall x\, \Psi$	из 3; Br1.

Используя C1-3, отсюда легко получить:

$$\vdash \Phi \leftrightarrow \Psi \quad \Longrightarrow \quad \vdash \forall x\, \Phi \leftrightarrow \forall x\, \Psi.$$

Правило обобщения

Для удобства введём обозначения

$$\top \;:=\; \Phi_\star \to \Phi_\star \quad \text{и} \quad \bot \;:=\; \neg\top,$$

где $\Phi_\star$ — фиксированное σ-предложение.

Предложение

Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$, $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $x \in \mathrm{Var}$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \forall x\, \Phi.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\Gamma \vdash \Phi$. Значит, $\Gamma \vdash \top \to \Phi$. Применяя BR1, мы получаем $\Gamma \vdash \top \to \forall x\, \Phi$. Таким образом, $\Gamma \vdash \forall x\, \Phi$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\Gamma \vdash \forall x\, \Phi$. Используя аксиому $\forall x\, \Phi \to \Phi$ типа Q1, отсюда легко получить $\Gamma \vdash \Phi$. □

Значит, мы можем дополнительно использовать правило обобщения:

$$\frac{\Phi}{\forall x\,\Phi}\ (\mathtt{GR}).$$

Оно нередко фигурирует в альтернативных версиях гильбертовского исчисления для классической логики первого порядка.

Следствие

Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \widetilde{\forall}\,\Phi.$$

$\square$

Замечание

Как нетрудно убедиться, для $\models$ имеет место аналог. утверждение.

Теорема (о дедукции)

Для любых $\Gamma \cup \{\Phi\} \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Тривиально.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\Psi_0, \ \ldots, \ \Psi_n \ = \ \Psi$$

из $\Gamma \cup \{\Phi\}$. Давайте теперь покажем индукцией по $i \in \{0, \ldots, n\}$, что $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi_i$. Ввиду аналогии с проп. исчислением, достаточно разобрать лишь новые случаи, относящиеся к BR1 и BR2.

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $\Psi_i = \Theta \to \forall x\, \Omega$ получается из предш. $\Psi_j = \Theta \to \Omega$ по $\mathtt{BR1}$. Тогда можно построить такой «квазивывод» из Γ:

1.	$\Phi \to (\Theta \to \Omega)$	инд. гип.
2.	$(\Phi \to (\Theta \to \Omega)) \to (\Phi \land \Theta \to \Omega)$	тавтология
3.	$\Phi \land \Theta \to \Omega$	из 1, 2; $\mathtt{MP}$
4.	$\Phi \land \Theta \to \forall x\, \Omega$	из 3; $\mathtt{Br1}$
5.	$(\Phi \land \Theta \to \forall x\, \Omega) \to (\Phi \to (\Theta \to \forall x\, \Omega))$	тавтология
6.	$\Phi \to (\Theta \to \forall x\, \Omega)$	из 4, 5; $\mathtt{MP}$.

Стало быть, $\Gamma \vdash \Phi \to (\Theta \to \forall x\, \Omega)$.

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $\Psi_i = \exists x\,\Omega \to \Theta$ получается из предш. $\Psi_j = \Omega \to \Theta$ по $\mathtt{BR2}$. Тогда можно построить такой «квазивывод» из Γ:

1.	$\Phi \to (\Omega \to \Theta)$	инд. гип.
2.	$(\Phi \to (\Omega \to \Theta)) \to (\Omega \to (\Phi \to \Theta))$	тавтология
3.	$\Omega \to (\Phi \to \Theta)$	из 1, 2; $\mathtt{MP}$
4.	$\exists x\,\Omega \to (\Phi \to \Theta)$	из 3; $\mathtt{Br2}$
5.	$(\exists x\,\Omega \to (\Phi \to \Theta)) \to (\Phi \to (\exists x\,\Omega \to \Theta))$	тавтология
6.	$\Phi \to (\exists x\,\Omega \to \Theta)$	из 4, 5; $\mathtt{MP}$.

Стало быть, $\Gamma \vdash \Phi \to (\exists x\,\Omega \to \Theta)$.

В частности, при $i := n$ мы имеем $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi_n$, т.е. $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi$. □

Следствие

Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \Psi_i \to \Phi \quad \text{для некот. } \{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\} \subseteq \Gamma.$$

(В случае $n = 0$ *соотв. конъюнкция отождествляется с* $\top$.*)*

Замечание

Для $\vDash$ имеет место аналогичное утверждение, но для его доказательства требуется теорема компактности, разумеется.

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\} \subseteq \Gamma$ и $\vdash \Psi_1 \wedge \cdots \wedge \Psi_n \to \Phi$. Тогда

$$\{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\} \vdash \Phi,$$

поскольку $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\} \vdash \Psi_1 \wedge \cdots \wedge \Psi_n$ (в силу C3); тем более $\Gamma \vdash \Phi$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\Gamma \vdash \Phi$. Значит, $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\} \vdash \Phi$ для некот. $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\} \subseteq \Gamma$. Тогда

$$\Psi_1 \wedge \cdots \wedge \Psi_n \vdash \Phi,$$

поскольку $\Psi_1 \wedge \cdots \wedge \Psi_n \vdash \Psi_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ (ввиду C1-2); по теореме дедукции мы получаем $\vdash \Psi_1 \wedge \cdots \wedge \Psi_n \to \Phi$. $\square$

Корректность

Лемма

Пусть $\xi : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $\vDash \phi$ *(в смысле проп. логики). Тогда* $\vDash \xi\phi$.

Доказательство.

Рассмотрим произвольные σ-структуру $\mathfrak{A}$ и означивание ν в $\mathfrak{A}$. Зададим оценку v по правилу

$$v(p) := \begin{cases} 1 & \text{если } \mathfrak{A} \Vdash \xi(p)[\nu] \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко видеть, что для всякой пропозициональной формулы ψ,

$$v^*(\psi) = 1 \iff \mathfrak{A} \Vdash \xi\psi[\nu].$$

В частности, $v^*(\phi) = 1$ влечёт $\mathfrak{A} \Vdash \xi\phi[\nu]$. Стало быть, $\vDash \xi\phi$. $\square$

Лемма

Пусть Φ — аксиома предикат. исчисления. Тогда $\models \Phi$.

Доказательство.

Пусть Φ — пропозициональная аксиома, т.е. она имеет вид $\xi\phi$, где ϕ — аксиома проп. исчисления, а ξ — функция из Prop в Form_σ. Тогда $\models \phi$. Значит, $\models \Phi$ по предыдущей лемме.

Пусть Φ — кванторная аксиома, т.е. она имеет вид

$$\forall x\, \Psi \to \Psi\,(x/t) \quad \text{или} \quad \Psi\,(x/t) \to \exists x\, \Psi,$$

где t свободен для x в Ψ. Рассмотрим произвольную σ-структуру $\mathfrak{A}$. Нетрудно показать индукцией по Ψ, что для любого озн. ν в $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Psi\,(x/t)\,[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu^x_a],$$

где $a := \overline{\nu}\,(t)$. Отсюда сразу получается $\models \Phi$. $\square$

Теорема (о корректности)

Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad\Longrightarrow\quad \Gamma \vDash \Phi.$$

Доказательство.

Пусть $\Gamma \vdash \Phi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\Phi_0,\ \ldots,\ \Phi_n \ = \ \Phi$$

из Γ. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная модель Γ. Покажем индукцией по $i \in \{0, \ldots, n\}$, что $\mathfrak{A} \Vdash \Phi_i\,[\nu]$ для всякого означивания ν в $\mathfrak{A}$.

...

Доказательство (продолжение).

Возможны следующие случаи.

- Пусть Φ_i — аксиома. Тогда $\vDash \Phi_i$, а потому $\Gamma \vDash \Phi_i$.
- Пусть Φ_i — элемент Γ. Тогда, очевидно, $\mathfrak{A} \Vdash \Phi_i\,[\nu]$ для всех ν.
- Пусть Φ_i получается из предшествующих Φ_j и $\Phi_k = \Phi_j \to \Phi_i$ по MP. В силу индукционной гипотезы, для всякого ν,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi_j\,[\nu] \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi_j \to \Phi_i\,[\nu],$$

откуда немедленно следует $\mathfrak{A} \Vdash \Phi_i\,[\nu]$.

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $\Phi_i = \Theta \to \forall x\, \Omega$ получается из предш. $\Phi_j = \Theta \to \Omega$ по $\mathrm{BR1}$. Рассмотрим произв. означивание ν. Заметим, что

$$\mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu^x_a] \quad \text{для всех} \quad a \in A$$

(так как $x \notin \mathrm{FV}\,(\Theta)$). Кроме того, ввиду индукционной гипотезы мы имеем $\mathfrak{A} \Vdash \Theta \to \Omega\,[\nu^x_a]$. Итак,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu] \quad &\Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu^x_a] \quad \text{для всех} \quad a \in A \\ &\Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Omega\,[\nu^x_a] \quad \text{для всех} \quad a \in A \\ &\Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \forall x\, \Omega\,[\nu]. \end{aligned}$$

Стало быть, $\mathfrak{A} \Vdash \Phi_i\,[\nu]$.

- Случай $\mathrm{BR2}$ по существу аналогичен случаю $\mathrm{BR1}$.

В частности, $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ для всякого означивания ν в $\mathfrak{A}$.

Таким образом, $\Gamma \vDash \Phi$. $\square$

Следствие

Для любой $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, *если* $\vdash \Phi$, *то* $\models \Phi$. $\square$

$\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ называют **противоречивым**, если $\Gamma \vdash \Phi$ и $\Gamma \vdash \neg\Phi$ для некоторой $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, и **непротиворечивым** иначе.

Замечание

Для $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ следующие условия эквивалентны:

1. $\Gamma \vdash \Psi$ для всех $\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma$;
2. Γ противоречиво;
3. $\Gamma \vdash \perp$.

(См. аналогичное утверждение в пропозициональной логике.) $\square$

Следствие

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$*.*

- *Если у* Γ *есть модель, то* $\Gamma \nvdash \bot$*.*
- *Если у* $\Gamma \cup \{\Phi\}$ *есть модель, то* $\Gamma \nvdash \neg\Phi$*.*
- *Если у* $\Gamma \cup \{\neg\Phi\}$ *есть модель, то* $\Gamma \nvdash \Phi$*.* $\square$

Это, пожалуй, самый базовый метод доказательства непротиворечивости теорий и независимости предложений от теории.

Пример

Пусть в качестве σ выступает $\langle =^2; \mathrm{s}^1; 0 \rangle$, а Γ состоит из

- $\forall x\, \mathrm{s}(x) \neq 0$,
- $\forall x\, \forall y\, (\mathrm{s}(x) = \mathrm{s}(y) \to x = y)$ и
- $\forall x\, (x \neq 0 \to \exists y\, x = \mathrm{s}(y))$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ естественные σ-структуры с носителями $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ соответственно (считая $\mathrm{s}^{\mathfrak{B}}(\infty) = \infty$). Возьмём

$$\Phi \ := \ \forall x\, \mathrm{s}(x) \neq x.$$

Тогда $\mathfrak{A} \Vdash \Gamma \cup \{\Phi\}$ и $\mathfrak{B} \Vdash \Gamma \cup \{\neg\Phi\}$, а значит, Φ независима от Γ.

Пример (без деталей)

Пусть σ — это сигнатура структур $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$, т.е. $\langle =^2, \cong^4, B^3 \rangle$. σ-Предложения, формализующие постулаты геометрии Евклида без постулата о параллельных, обычно именуют аксиомами абсолютной геометрии; обозначим их через Abs. Тогда

$$\mathfrak{G} \Vdash \mathsf{Abs} \cup \{\mathsf{Euclid\_5}\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{H} \Vdash \mathsf{Abs} \cup \{\neg\mathsf{Euclid\_5}\}$$

Значит, Euclid_5 (аксиома о параллельных) независима от Abs.