Математическая логика (I): 8/16

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

По поводу «абсолютной» выводимости

Мы уже знаем, что для установления *невыводимости* предложения Φ в теории Γ достаточно предъявить какую-нибудь модель Γ, в которой Φ ложно. Тут возникает естественный вопрос:

> *Почему мы отождествляем интуитивную выводимость с форм. выводимостью в рамках нашего исчисления?*

В случае вышеупомянутого метода дела обстоят просто: всякое адекватное исчисление должно быть корректным, а потому одна и та же контрмодель годится для всех адекватных исчислений; значит, здесь устан. «абсолютная», а не «относительная» невыводимость.

В общем случае можно дать следующий ответ.

- Формальная выводимость (в нашем или любом другом адекватном исчислении) влечёт интуитивную; иначе формальная выводимость окажется сильнее интуитивной.
- Интуитивная выводимость должна сохранять истинность, т.е. влечёт семант. следование, откуда *при усл. сильной полноты исчисления* мы получаем формальную выводимость.

Разумеется, у нас пока нет теоремы о сильной полноте, однако скоро мы её докажем, тем самым обосновав нужное тождество.

Курт Гёдель (1906–1978)

Он доказал теорему о полноте для первопорядкового исчисления, а также пару теорем о неполноте для достаточно богатых теорий, однако об этом когда-нибудь потом.

Пусть $\Gamma \nvdash \Phi$. Хотим показать, что $\Gamma \not\models \Phi$.

Заметим, что $\Gamma \nvdash \Phi$ равносильно $\Gamma \nvdash \widetilde{\forall}\,\Phi$, а $\Gamma \not\models \Phi$ — $\Gamma \not\models \widetilde{\forall}\,\Phi$. Теперь действуем по аналогии с пропозициональной логикой:

- Построим «насыщенную теорию» $\Gamma' \supseteq \Gamma$ такую, что $\Gamma' \nvdash \widetilde{\forall}\,\Phi$; при этом $\Gamma' \nvdash \widetilde{\forall}\,\Phi$ будет равносильно $\widetilde{\widetilde{\forall}}\,\Phi \notin \Gamma'$.
- Далее, с помощью Γ' построим структуру $\mathfrak{A}_{\Gamma'}$ такую, что для любого предложения Ψ,

$$\mathfrak{A}_{\Gamma'} \Vdash \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi \in \Gamma'.$$

Мы получим $\mathfrak{A}_{\Gamma'} \Vdash \Gamma$ и $\mathfrak{A}_{\Gamma'} \nVdash \widetilde{\forall}\,\Phi$. Стало быть, $\Gamma \not\models \widetilde{\forall}\,\Phi$.

Идея хорошая, но с дефектом. . .

Для удобства обозначим

$$\mathrm{Term}_\sigma^\circ \;:=\; \{t \in \mathrm{Term}_\sigma \mid \mathrm{sub}\,(t) \cap \mathrm{Var} = \varnothing\}.$$

Элементы $\mathrm{Term}_\sigma^\circ$ называют замкнутыми σ-термами. В определении «насыщенности» в логике первого порядка используется естественный кванторный аналог дизъюнктивного свойства:

- для любого $\exists x\, \Phi \in \Gamma$ сущ. $t \in \mathrm{Term}_\sigma^\circ$ такой, что $\Phi\,(x/t) \in \Gamma$.

Однако реализовать данное свойство в исходной сигнатуре σ порой невозможно. Так, если $\mathrm{Const}_\sigma = \varnothing$, то $\mathrm{Term}_\sigma^\circ = \varnothing$, а потому «насыщенных σ-теорий» вообще не существует.

Значит, придётся обогащать σ, добавляя новые константы.

В дальнейшем, когда это не приводит к путанице, мы будем нередко отождествлять σ с $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma$ (учитывая роли символов и их местности). В частности:

- запись $\varepsilon \in \sigma$ является сокр. для $\varepsilon \in \mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma$;
- запись $\sigma \subseteq \sigma'$ означает, что

  $$\mathrm{Pred}_\sigma \subseteq \mathrm{Pred}_{\sigma'}, \quad \mathrm{Func}_\sigma \subseteq \mathrm{Func}_{\sigma'} \quad \text{и} \quad \mathrm{Const}_\sigma \subseteq \mathrm{Const}_{\sigma'},$$

  причём arity_σ совпадает с сужением $\mathrm{arity}_{\sigma'}$ на $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma$.
- под $|\sigma|$ подразумевается $|\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma|$.

Как нетрудно убедиться, $|\mathrm{Sent}_\sigma|$ и $|\mathrm{Form}_\sigma|$ равны

$$\max\{|\mathrm{Pred}_\sigma|, |\mathrm{Func}_\sigma|, |\mathrm{Const}_\sigma|, \aleph_0\} = \max\{|\sigma|, \aleph_0\}.$$

По поводу новых констант

Для $\Pi \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\Pi) &:= \{x \in \mathrm{Var} \mid x \text{ входит в хотя бы один элемент } \Pi\}; \\ \mathrm{Const}(\Pi) &:= \{c \in \mathrm{Const}_\sigma \mid c \text{ входит в хотя бы один элемент } \Pi\}. \end{aligned}$$

Кроме того, для любых $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, $c \in \mathrm{Const}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$ обозначим

$$\Phi^{(c,x)} := \text{результат замены всех вхождений } c \text{ в } \Phi \text{ на } x.$$

Смысл этой довольно специфичной операции состоит в следующем: *с синтаксической точки зрения константы играют ту же роль, что и новые параметры, по которым не может быть кванторов*.

Лемма

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $c \in \mathrm{Const}_\sigma \setminus \mathrm{Const}(\Gamma)$. *Рассм. произвольный вывод*

$$\Psi_0, \quad \ldots, \quad \Psi_n$$

из Γ. *Возьмём* $y \in \mathrm{Var} \setminus \mathrm{Var}(\{\Psi_0, \ldots, \Psi_n\})$. *Тогда последовательность*

$$\Psi_0^{(c,y)}, \quad \ldots, \quad \Psi_n^{(c,y)}$$

также будет выводом из Γ.

Доказательство.

Легко видеть, что при замене c на y элементы Γ не изменятся, аксиомы перейдут в аксиомы (того же типа), применения правил вывода — в применения (тех же) правил вывода. $\square$

Для каждого множества S обозначим

$$\sigma_S \ := \ \sigma \cup \{\underline{s} \mid s \in S\},$$

где $\underline{s}$ суть новые константные символы, не принадлежащие Const_σ. Формально σ_S можно задать посредством равенств

$$\mathrm{Const}_{\sigma_S} \ = \ \mathrm{Const}_\sigma \cup \{\underline{s} \mid s \in S\},$$

$$\mathrm{Func}_{\sigma_S} \ = \ \mathrm{Func}_\sigma, \quad \mathrm{Pred}_{\sigma_S} \ = \ \mathrm{Pred}_\sigma \quad \text{и} \quad \mathrm{arity}_{\sigma_S} \ = \ \mathrm{arity}_\sigma.$$

Однако мы будем пользоваться менее формальной записью.

Замечание

Мы определяли $\vdash$ для фиксированной сигнатуры σ. По этой причине правильнее говорить о выводимости над σ, а не просто выводимости (без указания сигнатуры), и писать $\vdash_\sigma$ вместо $\vdash$.

Предложение

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$. *Тогда для всякого множества* S,

$$\Gamma \vdash_\sigma \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash_{\sigma_S} \Phi,$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Очевидно.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Рассмотрим произвольный σ_S-вывод

$$\Psi_0, \quad \ldots, \quad \Psi_n \; = \; \Phi$$

из Γ. Заменим в нём каждую константу из $\{\underline{s} \mid s \in S\}$ на переменную из $\mathrm{Var} \setminus \mathrm{Var}(\{\Psi_0, \ldots, \Psi_n\})$ (конечное число замен без повторений). В результате получится σ-вывод из Γ с заключением Φ. $\square$

Предложение

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, $x \in \mathrm{Var}$ *и* $c \in \mathrm{Const}_\sigma \setminus \mathrm{Const}\,(\Gamma \cup \{\Phi\})$. *Тогда*

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \Phi\,(x/c).$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\Gamma \vdash \Phi$, а значит, $\Gamma \vdash \forall x\,\Phi$ по $\mathtt{GR}$. Отсюда при помощи $\mathtt{Q1}$ легко получить $\Gamma \vdash \Phi\,(x/c)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\Gamma \vdash \Phi\,(x/c)$. В силу леммы выше, для подходящей переменной y мы имеем

$$\Gamma \vdash (\Phi\,(x/c))^{(c,y)},$$

т.е. $\Gamma \vdash \Phi\,(x/y)$, а значит, $\Gamma \vdash \forall y\,\Phi\,(x/y)$ по $\mathtt{GR}$. Отсюда при помощи $\mathtt{Q1}$ легко получить $\Gamma \vdash \Phi\,(x/y)\,(y/x)$, т.е. $\Gamma \vdash \Phi$. $\square$

Предложение

Пусть $\Gamma \cup \{\Phi\} \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $c \in \mathrm{Const}_\sigma \setminus \mathrm{Const}(\Gamma \cup \{\Phi\})$. *Предположим, что* $\exists x\, \Psi \in \Gamma$. *Тогда*

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \cup \{\Psi(x/c)\} \vdash \Phi.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Очевидно.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\Gamma \cup \{\Psi(x/c)\} \vdash \Phi$. Значит, $\Gamma \vdash \Psi(x/c) \to \Phi$ (по теореме дедукции). В силу предыдущего предложения, мы имеем $\Gamma \vdash \Psi \to \Phi$. Отсюда $\Gamma \vdash \exists x\, \Psi \to \Phi$ по BR2. Стало быть, $\Gamma \vdash \Phi$. $\square$

Замечание (в качестве упражения)

Это верно и тогда, когда Φ является формулой (со свободными переменными), однако доказательство становится чуть сложнее.

Простые теории

Говорят, что $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ является простой σ-теорией, или хенкиновской σ-теорией, если оно обладает следующими свойствами:

- $\Gamma \neq \mathrm{Sent}_\sigma$;
- $\{\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma \mid \Gamma \vdash \Phi\} \subseteq \Gamma$;
- для любого $\Phi \vee \Psi \in \Gamma$ верно $\Phi \in \Gamma$ или $\Psi \in \Gamma$;
- для любого $\exists x\, \Phi \in \Gamma$ сущ. $t \in \mathrm{Term}^{\circ}_{\sigma}$ такой, что $\Phi\,(x/t) \in \Gamma$.

(Последнее свойство, которое можно назвать экзистенциальным, — это кванторный аналог дизъюнктивного свойства.)

Лемма (о свойствах простых теорий)

Пусть Γ — *простая* σ*-теория. Тогда для всех* $\Phi, \Psi \in \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $x \in \mathrm{Var}$:

$$\begin{array}{rcl}
\neg\Phi \in \Gamma & \Longleftrightarrow & \Phi \notin \Gamma; \\
\Phi \wedge \Psi \in \Gamma & \Longleftrightarrow & \Phi \in \Gamma \ \textit{и} \ \Psi \in \Gamma; \\
\Phi \vee \Psi \in \Gamma & \Longleftrightarrow & \Phi \in \Gamma \ \textit{или} \ \Psi \in \Gamma; \\
\Phi \to \Psi \in \Gamma & \Longleftrightarrow & \Phi \notin \Gamma \ \textit{или} \ \Psi \in \Gamma; \\
\exists x\, \Phi \in \Gamma & \Longleftrightarrow & \Phi\,(x/t) \in \Gamma \ \textit{для некоторого} \ t \in \mathrm{Term}^\circ_\sigma; \\
\forall x\, \Phi \in \Gamma & \Longleftrightarrow & \Phi\,(x/t) \in \Gamma \ \textit{для всех} \ t \in \mathrm{Term}^\circ_\sigma.
\end{array}$$

Доказательство.

$\boxed{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \to}$ См. доказательство соотв. свойств в проп. логике.

...

Доказательство (продолжение).

$\boxed{\exists}$ Пусть $\exists x\, \Phi \in \Gamma$. Тогда нужный t существует по определению.

Пусть $\Phi\,(x/t) \in \Gamma$ для некоторого $t \in \mathrm{Term}^{\circ}_{\sigma}$. Отсюда при помощи Q2 легко получить $\Gamma \vdash \exists x\, \Phi$, т.е. $\exists x\, \Phi \in \Gamma$.

$\boxed{\forall}$ Пусть $\forall x\, \Phi \in \Gamma$. Отсюда при помощи Q1 мы получаем $\Gamma \vdash \Phi\,(x/t)$ для каждого $t \in \mathrm{Term}^{\circ}_{\sigma}$, т.е. $\Phi\,(x/t) \in \Gamma$ для всех $t \in \mathrm{Term}^{\circ}_{\sigma}$.

Наконец, пусть $\forall x\, \Phi \notin \Gamma$. Тогда $\neg\forall x\, \Phi \in \Gamma$. Как мы знаем,

$$\vdash \neg\forall x\, \Phi \to \exists x\, \neg\Phi.$$

Стало быть, $\Gamma \vdash \exists x\, \neg\Phi$, т.е. $\exists x\, \neg\Phi \in \Gamma$. Значит, существует $t \in \mathrm{Term}^{\circ}_{\sigma}$ такой, что $\neg\Phi\,(x/t) \in \Gamma$. Отсюда мы получаем $\Phi\,(x/t) \notin \Gamma$. $\square$

Насыщение...

Лемма (о расширении, a.k.a. Хенкина)

Пусть $\Gamma \cup \{\Phi\} \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *таковы, что* $\Gamma \nvdash \Phi$. *Тогда для всякого* S *мощности* $|\mathrm{Sent}_\sigma|$ *сущ. простая* σ_S*-теория* $\Gamma' \supseteq \Gamma$ *такая, что* $\Gamma' \nvdash \Phi$.

Доказательство в **счётном случае**:

Предположим, что Sent_σ счётно. Зафиксируем произвольное счётное множество S. Отныне мы будем работать над σ_S. В частности, под $\vdash$ будет подразумеваться $\vdash_{\sigma_S}$.

Ясно, что Sent_{σ_S} счётно. Поэтому его элементы можно расположить в последовательность:

$$\Psi_0, \quad \Psi_1, \quad \Psi_2, \quad \ldots,$$

т.е. $\mathrm{Sent}_{\sigma_S} = \{\Psi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Определим последовательность

...

Доказательство (продолжение).

$$\Gamma_0, \quad \Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots$$

подмножеств Sent_{σ_S} по рекурсии следующим образом:

- Если $n = 0$, то $\Gamma_n := \Gamma$.
- Если $n = m + 1$ и $\Gamma_m \cup \{\Psi_m\} \vdash \Phi$, то $\Gamma_n := \Gamma_m$.
- Если $n = m + 1$ и $\Gamma_m \cup \{\Psi_m\} \nvdash \Phi$, причём Ψ_m не начинается с $\exists$, то
$$\Gamma_n \;:=\; \Gamma_m \cup \{\Psi_m\}.$$
- Если $n = m + 1$ и $\Gamma_m \cup \{\Psi_m\} \nvdash \Phi$, причём Ψ_m имеет вид $\exists x\, \Theta$, то
$$\Gamma_n \;:=\; \Gamma_m \cup \{\Psi_m, \Theta\,(x/c)\}.$$
где c — это некоторый элемент $\mathrm{Const}_{\sigma_S} \setminus \mathrm{Const}\,(\Gamma_m \cup \{\Psi_m, \Phi\})$.

...

Доказательство.

По построению мы имеем $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \ldots$ Кроме того, $\Gamma_n \nvdash \Phi$ для всех $n \in \mathbb{N}$ — см. раздел про новые константы. Возьмём

$$\Gamma' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n.$$

Разумеется, $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\Gamma' \nvdash \Phi$.

Проверим, что Γ' является простой σ_S-теорией.

- Первые три свойства проверяются так же, как в проп. логике.
- Пусть $\exists x\, \Theta \in \Gamma'$. Очевидно, $\exists x\, \Theta = \Psi_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, причём $\Gamma_n \cup \{\Psi_n\} \nvdash \Phi$. Значит, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\Psi_n, \Theta\,(x/c)\}$ для подходящей константы c. Стало быть, $\Theta\,(x/c) \in \Gamma'$.

Таким образом, Γ' обладает нужными свойствами. $\square$

Доказательство в **общем случае**:

Возьмём $\kappa := |\mathrm{Sent}_\sigma|$. Зафиксируем произвольное множество S мощности κ. Отныне мы будем работать над σ_S.

Нетрудно видеть, что $|\mathrm{Sent}_{\sigma_S}|$ равна

$$\max\{|\sigma_S|, \aleph_0\} \;=\; |\sigma_S| \;=\; \max\{|\sigma|, |S|\} \;=\; |S|,$$

Поэтому элементы Sent_{σ_S} можно расположить в трансфинитную последовательность длины κ:

$$\langle \Psi_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle,$$

т.е. $\mathrm{Sent}_{\sigma_S} = \{\Psi_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$. Определим $\langle \Gamma_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle$ по трансфинитной рекурсии следующим образом.

...

Доказательство (продолжение).

a. Если $\alpha = 0$, то $\Gamma_\alpha := \Gamma$.

b. Если $\alpha = \beta + 1$ и $\Gamma_\beta \cup \{\Psi_\beta\} \vdash \Phi$, то $\Gamma_\alpha := \Gamma_\beta$.

c. Если $\alpha = \beta + 1$ и $\Gamma_\beta \cup \{\Psi_\beta\} \nvdash \Phi$, причём Ψ_β не начинается с $\exists$, то

$$\Gamma_\alpha \ := \ \Gamma_\beta \cup \{\Psi_\beta\}.$$

d. Если $\alpha = \beta + 1$ и $\Gamma_\beta \cup \{\Psi_\beta\} \nvdash \Phi$, причём Ψ_β имеет вид $\exists x\, \Theta$, то

$$\Gamma_\alpha \ := \ \Gamma_\beta \cup \{\Psi_\beta, \Theta\,(x/c)\}.$$

где c — это (?)некоторый элемент $\mathrm{Const}_{\sigma_S} \setminus \mathrm{Const}\,(\Gamma_\beta \cup \{\Psi_\beta, \Phi\})$.

e. Если α — предельный ординал, то $\Gamma_\alpha := \bigcup_{\beta \in \alpha} \Gamma_\beta$.

...

Доказательство (продолжение).

Тут имеется существенный пробел: в (d) нужно проверить, что

$$\mathrm{Const}_{\sigma_S} \setminus \mathrm{Const}\,(\Gamma_\beta \cup \{\Psi_\beta, \Phi\}) \;\neq\; \varnothing. \qquad (*)$$

В случае, когда $\varkappa = \aleph_0$, мы это уже проверяли. Теперь предположим, что $\varkappa > \aleph_0$. Тогда можно показать по трансфин. индукции, что

$$|\Gamma_\beta \setminus \Gamma| \;\leqslant\; \max\{|\beta|, \aleph_0\}.$$

— *это остаётся в качестве несложного упражнения*. Стало быть,

$$|\mathrm{Const}\,(\Gamma_\beta \setminus \Gamma)| \;\leqslant\; \max\{|\beta|, \aleph_0\} \cdot \aleph_0 \;<\; \varkappa,$$

откуда можно без труда получить $(*)$.

...

Доказательство (продолжение).

Стало быть, все Γ_α корректно определены. Наконец, возьмём

$$\Gamma' := \bigcup_{\alpha \in \kappa} \Gamma_\alpha.$$

Можно проверить, что Γ' обладает нужными свойствами. $\square$

Полнота

Рассмотрим произвольную простую σ-теорию Γ. Заметим, что $\mathrm{Term}^\circ_\sigma$ не пусто. Определим σ-структуру $\mathfrak{A}_\Gamma$ — *пока, правда, не обязательно нормальную!* — с носителем $\mathrm{Term}^\circ_\sigma$ следующим образом:

- для любого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$,
$$c^{\mathfrak{A}_\Gamma} \;:=\; c;$$
- для любого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$,
$$f^{\mathfrak{A}_\Gamma}(t_1, \ldots, t_n) \;:=\; f(t_1, \ldots, t_n);$$
- для любого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$,
$$(t_1, \ldots, t_n) \;\in\; P^{\mathfrak{A}_\Gamma} \quad :\Longleftrightarrow \quad P(t_1, \ldots, t_n) \;\in\; \Gamma.$$

Лемма

Пусть Γ *— простая* σ*-теория. Тогда для любого* $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$,

$$\mathfrak{A}_\Gamma \Vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \ \in \ \Gamma.$$

Доказательство.

Индукция по построению Φ, где используется доказанная нами ранее лемма о свойствах простых σ-теорий. $\square$

Замечание

Пусть $=$ содержится в Pred_σ. Тогда $\mathrm{Eq}_\sigma \subseteq \Gamma$, откуда $\mathfrak{A}_\Gamma \Vdash \mathrm{Eq}_\sigma$. Стало быть, из $\mathfrak{A}_\Gamma$ можно сделать нормальную модель Γ.

Пусть нам даны σ-структура $\mathfrak{A}$ и σ'-структура $\mathfrak{A}'$, причём $\sigma \subseteq \sigma'$; мы говорим, что $\mathfrak{A}$ является σ-обеднением $\mathfrak{A}'$, а $\mathfrak{A}'$ — σ'-обогащением $\mathfrak{A}$, если $A = A'$ и $\varepsilon^{\mathfrak{A}} = \varepsilon^{\mathfrak{A}'}$ для всех $\varepsilon \in \sigma$.

Теорема (о сильной полноте $\vdash$)

Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash \Phi.$$

В частности, $\Gamma \nvdash \perp$, *если и только если* $\Gamma \nvDash \perp$, *а значит,* Γ *непротиворечиво, если и только если у* Γ *есть модель.*

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Это теорема о корректности.

...

Доказательство (продолжение).

$\Longleftarrow$ Допустим, что $\Gamma \nvdash \Phi$, а значит, $\Gamma \nvdash \widetilde{\forall}\,\Phi$. Выберем множество S мощности $|\mathrm{Sent}_\sigma|$. Как мы знаем, найдётся простая σ_S-теория $\Gamma' \supseteq \Gamma$ такая, что $\Gamma' \nvdash \widetilde{\forall}\,\Phi$. Очевидно, $\widetilde{\forall}\,\Phi \notin \Gamma'$. Стало быть,

$$\mathfrak{A}_{\Gamma'} \Vdash \Gamma', \quad \text{но} \quad \mathfrak{A}_{\Gamma'} \nVdash \widetilde{\forall}\,\Phi.$$

Ясно, что σ-обеднение $\mathfrak{A}_{\Gamma'}$ окажется — *не обязательно нормальной* — моделью Γ, в которой ложно $\widetilde{\forall}\,\Phi$. В итоге $\Gamma \nvDash \Phi$. $\square$

Замечание

В доказательстве выше носитель $\mathfrak{A}_{\Gamma'}$ имеет мощность $\left|\mathrm{Term}^{\circ}_{\sigma_S}\right| = |S|$; при факторизации (нормализации) он может лишь уменьшиться.

В дальнейшем под мощностью $\mathfrak{A}$ мы будем понимать мощность носителя $\mathfrak{A}$, т.е. $|A|$. Обозначим за $\vDash^\circ$ релятивизацию $\vDash$ на класс всех σ-структур мощности не более, чем $|\mathrm{Sent}_\sigma|$.

Теорема (о сильной полноте $\vdash$, вариация)

Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash^\circ \Phi.$$

В частности, $\Gamma \nvdash \bot$, *если и только если* $\Gamma \nvDash^\circ \bot$, *а значит,* Γ *непротиворечиво, е.т.е. у* Γ *есть модель мощности не более, чем* $|\mathrm{Sent}_\sigma|$.

Пример

В случае, когда $|\sigma| \leqslant \aleph_0$, мы имеем

$$\Gamma \text{ непротиворечиво} \iff \text{у } \Gamma \text{ есть не более чем счётная модель.}$$

Получается следующее:

- у множества всех предложений, истинных в стандартной модели геометрии $\mathfrak{G}$, есть счётная модель;
- у множества всех предложений, истинных в стандартном кольце $\mathfrak{R}$ с носителем $\mathbb{R}$, есть счётная модель;
- у ZFC есть счётная модель (если ZFC непротиворечива).