Математическая логика (I): 9/16

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Основные следствия

Теорема (о консервативности)

Пусть $\sigma \subseteq \sigma'$. *Тогда для любых* $\Gamma \subseteq \mathsf{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathsf{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash_\sigma \Phi \iff \Gamma \vdash_{\sigma'} \Phi.$$

Доказательство.

Как лего убедиться, $\Gamma \vDash_\sigma \Phi$ равносильно $\Gamma \vDash_{\sigma'} \Phi$, где $\vDash_\sigma$ и $\vDash_{\sigma'}$ — это семантические следования над σ и σ' соответственно. Значит,

$$\Gamma \vdash_\sigma \Phi \iff \Gamma \vDash_\sigma \Phi \iff \Gamma \vDash_{\sigma'} \Phi \iff \Gamma \vdash_{\sigma'} \Phi$$

(ввиду теоремы о сильной полноте для $\vdash_\sigma$ и $\vdash_{\sigma'}$). □

Замечание

Тут хватит слабой полноты, т.к. $\vdash$ компактно и монотонно.

Теорема (о слабой полноте $\vdash$)

Для любой $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \models \Phi,$$

т.е. выводимость из $\varnothing$ *равносильна общезначимости.* $\square$

Теорема (о компактности $\models$, a.k.a. локальная т. Гёделя–Мальцева)

Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \models \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \models \Phi \quad \textit{для некоторого конечного } \Delta \subseteq \Gamma.$$

В частности, $\Gamma \not\models \bot$, *е.т.е.* $\Delta \not\models \bot$ *для всех конечных* $\Delta \subseteq \Gamma$, *а значит,* Γ *выполнимо, е.т.е. всякое конечное подмножество* Γ *выполнимо.* $\square$

$\boxed{\text{слабая полнота } \vdash \text{ плюс компактность } \models \text{ равно сильная полнота } \vdash}$

Замечание

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Говорят, что Γ локально выполнимо, если всякое конечное подмножество Γ выполнимо. Стало быть,

$$\Gamma \text{ выполнимо} \iff \Gamma \text{ локально выполнимо;}$$

отсюда «локальная» в альтернативном названии. К слову, локальная выполнимость влечёт непротиворечивость по т. о корректности.

С помощью теоремы о компактности для $\vDash$ можно получить немало интересных результатов. Например:

Предложение

Пусть у $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ есть модели сколь угодно большой конечной мощности. Тогда у Γ есть бесконечная модель.

Доказательство.

Не ограничивая общности, мы будем считать, что Pred_σ содержит $=$. Для каждого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ положим

$$\Phi_n \;:=\; \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=i+1}^{n} \neg x_i = x_j.$$

Очевидно, для любой σ-структуры $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi_n \quad \Longleftrightarrow \quad |A| \geqslant n.$$

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ удовлетворяет условию предложения. Рассмотрим

$$\Gamma' \;:=\; \Gamma \cup \{\Phi_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\}.$$

Разумеется, Γ' локально выполнимо. Значит, оно выполнимо, т.е. у Γ' есть модель $\mathfrak{A}$. Поскольку в $\mathfrak{A}$ истинны все Φ_n, то A бесконечно. $\square$

Другой, весьма важный пример:

Теорема (Лёвенгейма–Сколема, слегка ослабленная)

Для каждого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *следующие условия эквивалентны:*

i. *у* Γ *есть бесконечная модель;*

ii. *для каждого кардинала* $\kappa \geqslant |\mathrm{Sent}_\sigma|$ *у* Γ *есть модель мощности* κ.

Доказательство.

Не ограничивая общности, мы будем считать, что Pred_σ содержит $=$.

$\boxed{\text{ii} \Longrightarrow \text{i.}}$ Очевидно.

...

Доказательство (продолжение).

$\boxed{\text{i} \Longrightarrow \text{ii.}}$ Как мы уже знаем, для любого $\Delta \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$,

$$\begin{aligned} \text{у } \Delta \text{ есть модель} \quad &\Longleftrightarrow \quad \Delta \text{ непротиворечиво} \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{у } \Delta \text{ есть модель мощности} \leqslant |\mathrm{Sent}_\sigma|. \end{aligned}$$

Пусть у Γ есть бесконечная модель, и $\kappa \geqslant |\mathrm{Sent}_\sigma|$. Возьмём какое-нибудь множество S мощности κ. Рассмотрим σ_S-теорию

$$\Gamma' \ := \ \Gamma \cup \left\{ \underline{s_1} \neq \underline{s_2} \mid \{s_1, s_2\} \subseteq S \text{ и } s_1 \neq s_2 \right\}.$$

Легко видеть, что Γ' локально выполнимо. Значит, оно выполнимо, а потому у Γ' есть модель $\mathfrak{A}$ мощности не более, чем $|\mathrm{Sent}_{\sigma_S}| = \kappa$. При этом для любых $\{s_1, s_2\} \subseteq S$,

$$s_1 \neq s_2 \quad \Longrightarrow \quad \underline{s_1}^{\mathfrak{A}} \neq \underline{s_2}^{\mathfrak{A}};$$

отсюда $|A| \geqslant |S| = \kappa$. Стало быть, $|A| = \kappa$. Очевидно, σ-обеднение $\mathfrak{A}$ окажется моделью Γ мощности κ. $\square$

Замечание

Используемое в доказательстве утверждение о том, что

$$\text{у } \Delta \text{ есть модель} \quad \iff \quad \text{у } \Delta \text{ есть модель мощности} \leqslant |\mathrm{Sent}_\sigma|,$$

порой называют теоремой Лёвенгейма–Сколема «вниз»; её нетрудно доказать непосредственно (с помощью трансфинитной рекурсии) без следствий теоремы о сильной полноте. Когда же мощность бесконечной модели увеличивается — это «вверх».

Пример

В частности, у множества всех предложений, истинных в $\mathfrak{N}$, есть модели любой бесконечной мощности (скажем, $2^{\aleph_0}$).

Аксиоматизируемость

Для произвольного класса $\mathcal{K}$ σ-структур положим

$$\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}) \;:=\; \{\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma \mid \mathfrak{A} \Vdash \Phi \text{ для всех } \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}.$$

Вместо $\mathrm{Th}\,(\{\mathfrak{A}\})$ часто пишут $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{A})$. С другой стороны, для всякого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ определим

$$\mathrm{Mod}\,(\Gamma) \;:=\; \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \Vdash \Phi \text{ для всех } \Phi \in \Gamma\}.$$

Строго говоря, $\mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ — ровно как и $\mathcal{K}$ — представляет собой класс (не множество). Однако мы будем демонстративно игнорировать это обстоятельство. На самом деле, можно трактовать «принадлежность классу» как конкретное условие на σ-структуры. Так,

$$\mathfrak{A} \;\in\; \mathrm{Mod}\,(\Gamma) \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Gamma.$$

Вместо $\mathrm{Mod}\,(\{\Phi\})$ обычно пишут $\mathrm{Mod}\,(\Phi)$.

Замечание

Легко видеть, что Th антимонотонно:

$$\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Th}(\mathcal{K}_1) \supseteq \mathrm{Th}(\mathcal{K}_2).$$

Аналогично для Mod:

$$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Mod}(\Gamma_1) \supseteq \mathrm{Mod}(\Gamma_2).$$

Стоит также отметить, что

$$\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K})) \quad \text{и} \quad \Gamma \subseteq \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Gamma)).$$

Говорят, что $\mathcal{K}$ аксиоматизируем, если $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Gamma)$ для некоторого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Начнём с «наибольшей аксиоматизации»:

Предложение

Для любого класса $\mathcal{K}$ σ-структур,

$$\mathcal{K} \text{ аксиоматизируем} \iff \mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K})).$$

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Очевидно.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Gamma)$ для нек. $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Ясно, что $\Gamma \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{K})$, а потому

$$\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K})) \subseteq \mathrm{Mod}(\Gamma) = \mathcal{K}.$$

В итоге $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K}))$. □

Однако обычно ищутся по возможности простые и обозримые аксиоматизации. Так, $\mathcal{K}$ называется конечно аксиоматизируемым, если $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ для некоторого конечного $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$, что, разумеется, равносильно $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Phi)$ для некоторого $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$.

Предложение

Для любого класса $\mathcal{K}$ σ-структур,

$$\mathcal{K} \text{ конечно аксиоматизируем} \iff \mathcal{K} \text{ и } \overline{\mathcal{K}} \text{ аксиоматизируемы,}$$

где $\overline{\mathcal{K}}$ обозначает класс всех σ-структур, не лежащих в $\mathcal{K}$.

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Phi)$ для нек. $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$. Тогда $\overline{\mathcal{K}} = \mathrm{Mod}\,(\neg\Phi)$.

...

Доказательство (продолжение).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ и $\overline{\mathcal{K}} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma')$ для некоторых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Gamma' \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Ясно, что

$$\mathrm{Mod}\,(\Gamma \cup \Gamma') \;=\; \mathrm{Mod}\,(\Gamma) \cap \mathrm{Mod}\,(\Gamma') \;=\; \varnothing.$$

Значит, найдутся кон. $\Delta \subseteq \Gamma$ и $\Delta' \subseteq \Gamma'$ такие, что $\mathrm{Mod}\,(\Delta \cup \Delta') = \varnothing$, т.е. $\mathrm{Mod}\,(\Delta) \cap \mathrm{Mod}\,(\Delta') = \varnothing$. Тогда

$$\mathrm{Mod}\,(\Gamma) \;\subseteq\; \mathrm{Mod}\,(\Delta) \;\subseteq\; \overline{\mathrm{Mod}\,(\Delta')} \;\subseteq\; \overline{\mathrm{Mod}\,(\Gamma')} \;=\; \mathrm{Mod}\,(\Gamma).$$

В итоге $\mathrm{Mod}\,(\Delta) = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$. $\square$

Примеры из теории групп

В этом разделе под сигнатурой теории абелевых групп понимается

$$\sigma \;:=\; \langle =^2; +^2, -^1; 0 \rangle.$$

Обозначим через Θ конъюнкцию следующих σ-предложений:

- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x + y) + z = x + (y + z))$;
- $\forall x\, \forall y\, (x + y = y + x)$;
- $\forall x\, (x + 0 = x)$;
- $\forall x\, (x + (-x) = 0)$.

Абелевы группы (как σ-структуры) суть в точности модели $\{\Theta\}$, т.е. класс всех абелевых групп равен $\mathrm{Mod}\,(\Theta)$; отметим, что существуют абелевы группы любой бесконечной мощности.

Для удобства введем ряд обозначений:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{<\omega} &:= \text{класс всех конечных абелевых групп;} \\ \mathcal{K}_{\kappa} &:= \text{класс всех абелевых групп мощности } \kappa; \\ \mathcal{K}_{\geqslant\omega} &:= \text{класс всех бесконечных абелевых групп} \end{aligned}$$

(здесь κ — произвольный кардинал).

Предложение

$\mathcal{K}_{<\omega}$ *не аксиоматизируем.*

Доказательство.

Пусть $\mathcal{K}_{<\omega} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ для нек. $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Очевидно, у Γ есть модели сколь угодно большой конечной мощности; поэтому у Γ есть и бесконечная модель — противоречие. $\square$

Предложение

a. $\mathcal{K}_n$ *конечно аксиоматизируем для каждого* $n \in \mathbb{N}$.

b. $\mathcal{K}_\kappa$ *не аксиоматизируем ни для какого беск. кардинала* κ.

Доказательство.

a. Ясно, что

$$\mathcal{K}_0 \;=\; \mathrm{Mod}\,(\perp) \quad \text{и} \quad \mathcal{K}_1 \;=\; \mathrm{Mod}\,(\neg\exists x_1\, \exists x_2\, x_1 \neq x_2).$$

Кроме того, для всякого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ мы имеем

$$\mathcal{K}_n \;=\; \mathrm{Mod}\,(\Theta \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi_{n+1})$$

(обозначение Φ_n было введено ранее).

b. Пусть κ — беск. кардинал, и $\mathcal{K}_\kappa = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ для нек. $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Очевидно, у Γ есть бесконечная модель; поэтому у Γ есть и модели любой бесконечной мощности — противоречие. $\square$

Предложение

$\mathcal{K}_{\geqslant\omega}$ *аксиоматизируем, но не конечно аксиоматизируем.*

Доказательство.

Рассмотрим
$$\Gamma \;:=\; \{\Theta\} \cup \{\Phi_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\}.$$
Очевидно, $\mathcal{K}_{\geqslant\omega} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$. Вместе с тем $\mathcal{K}_{\geqslant\omega}$ не конечно аксиоматизируем, поскольку иначе $\mathcal{K}_{<\omega}$ был бы аксиоматизируем. $\square$

Эти примеры пока слабо связаны с группами. Скорее они указывают на общие проблемы с аксиоматизацией таких понятий как

«быть конечным» или «иметь данную мощность».

Давайте добавим специфики в наши рассмотрения:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\mathrm{cyc}} &:= \text{класс всех циклических групп;} \\
\mathcal{K}_{\mathrm{tor}} &:= \text{класс всех (абелевых) групп кручения;} \\
\mathcal{K}_{\overline{\mathrm{tor}}} &:= \text{класс всех (абелевых) групп без кручения;} \\
\mathcal{K}_{\mathrm{div}} &:= \text{класс всех делимых абелевых групп.}
\end{aligned}$$

Для удобства для любых $n \in \mathbb{N}_+$ и $t \in \mathrm{Term}_\sigma$ обозначим

$$nt := \underbrace{t + \ldots + t}_{n \text{ штук } t}.$$

Напомним, что (абелеву) группу $\mathfrak{A}$ называют циклической, если найдётся $a_\circ \in A$ такое, что

$$A = \{0\} \cup \{na_\circ \mid n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{-na_\circ \mid n \in \mathbb{N}_+\}.$$

(здесь в правой части под $+$, $-$ *и* 0 *мы подразумеваем* $+^{\mathfrak{A}}$, $-^{\mathfrak{A}}$ *и* $0^{\mathfrak{A}}$*).*

Предложение

$\mathcal{K}_{\mathrm{cyc}}$ *не аксиоматизируем.*

Доказательство.

Заметим, что каждая циклическая группа конечна или счётна. Пусть $\mathcal{K}_{\mathrm{cyc}} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ для нек. $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Разумеется, у Γ есть бесконечная модель, а потому у Γ есть и модели любой бесконечной мощности — это противоречит вышеупомянутому ограничению на мощность. $\square$

Замечание (в качестве упражнения)

На самом деле, у $\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_{\mathrm{cyc}})$ есть *счётная* модель, которая не является циклической группой. Это более интересный и тонкий факт.

Напомним, что абелеву группу $\mathfrak{A}$ называют группой кручения, если каждый элемент A имеет конечный порядок, т.е. для всякого $a \in A$ найдётся $n \in \mathbb{N}_+$ такое, что $na = 0$.

Предложение

$\mathcal{K}_{\mathrm{tor}}$ не аксиоматизируем.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{K}_{\mathrm{tor}} = \mathrm{Mod}\,(\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_{\mathrm{tor}}))$. Ясно, что для получения противоречия достаточно построить модель $\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_{\mathrm{tor}})$, которая не является группой кручения. Возьмём

$$\sigma' \ := \ \sigma \cup \{c\},$$

где c — новый константный символ. Рассмотрим σ'-теорию

...

Доказательство (продолжение).

$$\Gamma' \ := \ \mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_{\mathrm{tor}}) \cup \{\neg nc = 0 \mid n \in \mathbb{N}_+\}.$$

Покажем, что Γ' локально выполнима. Пусть Δ — произвольное кон. подмножество Γ'. Положим

$$N \ := \ \max\,\{n \in \mathbb{N}_+ \mid \neg nc = 0 \in \Delta\}.$$

Зафиксируем какое-нибудь простое число $p > N$. В качестве модели Δ мы можем взять σ'-обогащение $\mathfrak{Z}_p$, в котором c интерпретируется как 1. Далее, поскольку Γ' локально выполнима, у Γ' есть модель $\mathfrak{A}$. Тогда σ-обеднение $\mathfrak{A}$ будет моделью $\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_{\mathrm{tor}})$, причём оно не может быть группой кручения, ведь $c^{\mathfrak{A}}$ имеет бесконечный порядок. □

Замечание

Из данного доказательства можно извлечь больше:

> *Пусть $\mathfrak{A}$ — группа кручения, причём A содержит элементы сколь угодно больших конечных порядков. Тогда существует (абелева группа) $\mathfrak{B}$, которая не является группой кручения, но имеет ту же теорию, что и $\mathfrak{A}$, т.е.* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

(Нужно просто заменить $\mathcal{K}_{\mathrm{tor}}$ на $\mathfrak{A}$ на пред. слайде.) Например, роль $\mathfrak{A}$ может играть прямая сумма $\mathfrak{Z}_p$ по всем простым числам p.

Напомним, что абелева группа $\mathfrak{A}$ называется группой без кручения, если каждый ненулевой элемент A имеет бесконечный порядок, т.е. для любых $n \in \mathbb{N}_+$ и $a \in A$, если $a \neq 0$, то $na \neq 0$.

Предложение

$\mathcal{K}_{\overline{\mathrm{tor}}}$ *аксиоматизируем, но не конечно аксиоматизируем.*

Доказательство.

Для каждого $n \in \mathbb{N}_+$ положим

$$\Psi_n \;:=\; \forall x\,(x \neq 0 \to nx \neq 0),$$

и рассмотрим

$$\Gamma \;:=\; \{\Theta\} \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}_+\}.$$

Разумеется, $\mathcal{K}_{\overline{\mathrm{tor}}} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$. Осталось убедиться, что $\mathcal{K}_{\overline{\mathrm{tor}}}$ не конечно аксиоматизируем.

...

Доказательство (продолжение).

Пусть $\mathcal{K}_{\overline{\mathrm{tor}}} = \mathrm{Mod}\,(\Phi)$ для некоторого $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$. Тогда

$$\mathrm{Mod}\,(\Gamma) \;=\; \mathrm{Mod}\,(\Phi),$$

а потому $\Gamma \vDash \Phi$. Значит, $\Delta \vDash \Phi$ для некоторого кон. $\Delta \subseteq \Gamma$. Положим

$$N \;:=\; \max\{n \in \mathbb{N}_+ \mid \Psi_n \in \Delta\}.$$

Зафиксируем какое-нибудь простое $p > N$. Ясно, что $\mathfrak{Z}_p \Vdash \Delta$, откуда $\mathfrak{Z}_p \Vdash \Phi$, т.е. $\mathfrak{Z}_p \in \mathcal{K}_{\overline{\mathrm{tor}}}$, но при этом $p1 = 0$ — противоречие. □

Замечание

В частности, если предложение Φ истинно во всех группах без кручения (т.е. $\Phi \in \mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_{\overline{\mathrm{tor}}})$), то Φ окажется истинно в некоторой абелевой группе, которая не является группой кручения.

Напомним, что абелева группа $\mathfrak{A}$ называется делимой, если для всех $n \in \mathbb{N}_+$ и $a \in A$ существует $a' \in A$ такой, что $na' = a$.

Предложение

$\mathcal{K}_{\mathrm{div}}$ *аксиоматизируем, но не конечно аксиоматизируем.*

Доказательство.

Остаётся в качестве упражнения (по аналогии с предыдущим). $\square$

Замечание

В частности, если предложение Φ истинно во всех делимых абелевых группах (т.е. $\Phi \in \mathrm{Th}(\mathcal{K}_{\mathrm{div}})$), то Φ окажется истинно и в нек. абелевой группе, которая не является делимой.

Для замкнутого σ-терма t через $t^{\mathfrak{A}}$ мы будем обозначать значение t в $\mathfrak{A}$; формально $t^{\mathfrak{A}}$ определяется рекурсивно по правилу

$$\left(f\left(t_1, \ldots, t_n\right)\right)^{\mathfrak{A}} \ := \ f^{\mathfrak{A}}\left(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_1^{\mathfrak{A}}\right).$$

Будем называть $\mathfrak{A}$ замкнутой, если $A = \left\{t^{\mathfrak{A}} \mid t \in \mathrm{Term}_\sigma^\circ\right\}$. Например, $\mathfrak{N}$ является замкнутой.

Предложение

Пусть $=$ *содержится в* Pred_σ. *Предположим, что* σ*-структуры* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *имеют одну и ту же теорию, причём* $\mathfrak{A}$ *замкнута. Тогда*

$$\xi \ := \ \left\{\left(t^{\mathfrak{A}}, t^{\mathfrak{B}}\right) \mid t \in \mathrm{Term}_\sigma^\circ\right\}$$

окажется вложением из $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$.

Доказательство.

Очевидно, $\operatorname{dom}\xi = A$. Кроме того, ξ функционально и инъективно:

$$\begin{aligned} t_1^{\mathfrak{A}} = t_2^{\mathfrak{A}} &\iff \mathfrak{A} \Vdash t_1 = t_2 \ (\text{т.е. } t_1 = t_2 \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})) \\ &\iff \mathfrak{B} \Vdash t_1 = t_2 \ (\text{т.е. } t_1 = t_2 \in \mathrm{Th}(\mathfrak{B})) \\ &\iff t_1^{\mathfrak{B}} = t_2^{\mathfrak{B}}. \end{aligned}$$

Проверим оставшиеся свойства:

i. для любого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$,

$$\begin{aligned} \left(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}\right) \in P^{\mathfrak{A}} &\iff \mathfrak{A} \Vdash P(t_1, \ldots, t_n) \\ &\iff \mathfrak{B} \Vdash P(t_1, \ldots, t_n) \\ &\iff \left(\xi\left(t_1^{\mathfrak{A}}\right), \ldots, \xi\left(t_n^{\mathfrak{A}}\right)\right) \in P^{\mathfrak{B}}; \end{aligned}$$

...

Доказательство (продолжение).

ii. для любого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$,

$$\begin{aligned} \xi\left(f^{\mathfrak{A}}\left(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_m^{\mathfrak{A}}\right)\right) &= f^{\mathfrak{B}}\left(t_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, t_m^{\mathfrak{B}}\right) \\ &= f^{\mathfrak{B}}\left(\xi\left(t_1^{\mathfrak{A}}\right), \ldots, \xi\left(t_m^{\mathfrak{A}}\right)\right); \end{aligned}$$

iii. наконец, $\xi\left(c^{\mathfrak{A}}\right) = c^{\mathfrak{B}}$ для всех $c \in \mathrm{Const}_\sigma$.

Таким образом, ξ — вложение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. □

Пусть σ — это сигнатура арифметики.

Под нумералами понимаются замкнутые σ-термы

$$\underline{0} \ := \ 0, \quad \underline{1} \ := \ \mathsf{s}(0), \quad \underline{2} \ := \ \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \quad \ldots$$

Очевидно, $\underline{n}^{\mathfrak{N}} = n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Стало быть, мы имеем:

Предложение

Пусть $\mathfrak{A}$ — модель $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Тогда $\lambda n.\left[\underline{n}^{\mathfrak{A}}\right]$ вкладывает $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{A}$. □

Ясно, что все модели $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ бесконечны. Модель $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ называется нестандартной, если она не изоморфна $\mathfrak{N}$.

Предложение

У $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ *есть счётные нестандартные модели.*

Доказательство.

Для удобства введём сокращение

$$x < y \;:=\; \exists z\,(z \neq 0 \wedge x + z = y).$$

Идея состоит в том, чтобы обеспечить наличие в модели *бесконечно большого по отношению к обычным числам элемента*. Возьмём

$$\sigma' \;:=\; \sigma \cup \{c\},$$

где c — новый константый символ. Рассмотрим σ'-теорию

$$\Gamma \;:=\; \mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

...

Доказательство (продолжение).

Покажем, что Γ локально выполнима. Пусть Δ — произвольное кон. подмножество Γ. Положим

$$N \;:=\; \max\{n \in \mathbb{N} \mid \underline{n} < c \in \Delta\} + 1.$$

В качестве модели Δ подходит σ'-обогащение $\mathfrak{N}$, в котором c интерпретируется как N. Итак, поскольку Γ локально выполнима, у Γ есть модель $\mathfrak{A}$; при этом можно считать, что $|A| \leqslant \aleph_0$, а потому $|A| = \aleph_0$. Тогда σ-обеднение $\mathfrak{A}$ будет моделью $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. $\square$

Пусть $\mathfrak{A}$ — модель $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Обозначим

$$\mathrm{St}^{\mathfrak{A}} := \{\underline{n}^{\mathfrak{A}} \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{и} \quad \overline{\mathrm{St}}^{\mathfrak{A}} := A \setminus \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}.$$

Элементы $\mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$ называются стандартными, а $\overline{\mathrm{St}}^{\mathfrak{A}}$ — нестандартными. Как мы знаем, $\mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$ является носителем изоморфной копии $\mathfrak{N}$.

Предложение

Пусть $\mathfrak{A}$ — модель $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Тогда

$$a < a' \quad \textit{для любых } a \in \mathrm{St}^{\mathfrak{A}} \textit{ и } a' \in \overline{\mathrm{St}}^{\mathfrak{A}}$$

т.е. всякий нестандартный элемент больше всех стандартных.

Доказательство.

Для удобства введём сокращение

$$x \leqslant y \;:=\; x < y \vee x = y.$$

Заметим, что в $\mathfrak{A}$ истинно

$$\Phi \;:=\; \forall x \forall y \,(x < y \leftrightarrow y \nleqslant x).$$

Кроме того, в $\mathfrak{A}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ истинно

$$\Theta_n \;:=\; \forall x \,(x \leqslant \underline{n} \leftrightarrow (x = \underline{0} \vee \ldots \vee x = \underline{n})).$$

Теперь пусть $a \in \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$ и $a' \in \overline{\mathrm{St}}^{\mathfrak{A}}$. Тогда $a = \underline{n}^{\mathfrak{A}}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Если $a' \leqslant \underline{n}^{\mathfrak{A}}$, то $a' \in \{\underline{0}^{\mathfrak{A}}, \ldots, \underline{n}^{\mathfrak{A}}\}$ — противоречие с $a' \notin \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$. Стало быть, $a' \nleqslant a$, откуда мы получаем $a < a'$. □

Предложение

Пусть $\mathfrak{A}$ *— модель* $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

i. *A равно* $\mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$*;*

ii. $\mathfrak{A}$ *изоморфна* $\mathfrak{N}$*;*

iii. $\mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$ *определимо в* $\mathfrak{A}$*.*

Доказательство.

$\boxed{\mathrm{i} \Rightarrow \mathrm{ii}}$ Очевидно.

$\boxed{\mathrm{ii} \Rightarrow \mathrm{iii}}$ Пусть $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{N}$. Зафиксируем изоморфизм ξ из $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{A}$. Тогда

$$\xi\left(0^{\mathfrak{N}}\right) = 0^{\mathfrak{A}}, \quad \xi\left(\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}\left(0^{\mathfrak{N}}\right)\right) = \mathrm{s}^{\mathfrak{A}}\left(0^{\mathfrak{A}}\right), \quad \ldots$$

Значит, $\xi[\mathbb{N}] = \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$, т.е. $A = \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$. Очевидно, A определимо в $\mathfrak{A}$.

...

Доказательство (продолжение).

$\boxed{\text{iii} \Rightarrow \text{i}}$ Пусть $\mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$ определимо в $\mathfrak{A}$ посредством некоторой σ-формулы $\Phi(x)$. Заметим, что для каждой σ-формулы $\Psi(x)$ в $\mathfrak{A}$ истинно

$$\Psi(0) \wedge \forall x\,(\Psi(x) \to \Psi(\mathrm{s}(x))) \to \forall x\,\Psi(x).$$

Очевидно $0^{\mathfrak{A}} \in \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$, и для любого $a \in \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$ верно $\mathrm{s}^{\mathfrak{A}}(a) \in \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$; значит,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi(0) \wedge \forall x\,(\Phi(x) \to \Phi(\mathrm{s}(x))).$$

Тогда $\mathfrak{A} \Vdash \forall x\,\Phi(x)$, т.е. $A = \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$. □

Общие замечания

- Нестандартные модели (арифметики и не только) мстительны: всякий раз, когда кажется, что от них удалось избавиться, они возвращаются на более высоком уровне.

- В такой ситуации становится актуальным лозунг

  То, что нас не убивает, делает нас сильнее,

  либо в более позитивном ключе:

  How I learned to stop worrying and love nonstandard models.

  Раз от нестандартных моделей нельзя избавиться, то их нужно изучать и стараться применять. На самом деле, понимание их свойств позволяет получать результаты о [не]выводимости для самых разных дедуктивных систем.