

-
1. Что такое *формула* в PCL? Покажите, что если ψ является началом ϕ , то $\psi = \phi$.¹
 2. Сформулируйте и докажите утверждение о единственности представления формул в PCL.
 3. Сформулируйте и докажите основное утверждение о подформулах в PCL.
 4. Опишите семантику для PCL.
 5. Определите *семантические следование* и *эквивалентность* в PCL. Опишите алгоритм приведения формул в PCL к д.н.ф. [без построения их таблиц истинности].
 6. Опишите гильбертовское исчисление для PCL.
 7. Сформулируйте и докажите основные свойства \vdash в PCL.
 8. Покажите, что $\vdash p \rightarrow p$ и $\{p \wedge q\} \vdash q \wedge p$.
 9. Покажите, что $\{\neg p \rightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q\} \vdash p$.
 10. Сформулируйте и докажите теорему дедукции для \vdash в PCL [считая известным $\vdash p \rightarrow p$].
 11. Сформулируйте и докажите теорему о корректности \vdash в PCL.
 12. Какие множества формул называются *противоречивыми* в PCL? Сформулируйте и докажите утверждение об эквивалентных определениях противоречивости в PCL.
 13. Что такое *простая теория* (в PCL)? Сформулируйте и докажите утверждение об эквивалентных определениях простоты в PCL.
 14. Сформулируйте и докажите лемму о свойствах простых теорий (в PCL).
 15. Сформулируйте и докажите [счётную версию] леммы о расширении (в PCL).
 16. Приведите альтернативное доказательство леммы о расширении (в PCL), в котором вместо рекурсии используется лемма Цорна.
 17. Сформулируйте и докажите теорему о сильной полноте \vdash в PCL. [Тут можно пользоваться леммой о свойствах простых теорий.]
 18. Сформулируйте теорему о компактности \models в PCL; переформулируйте её в терминах выполнимости [с обоснованием].
 19. Приведите альтернативное доказательство теоремы о компактности \models в PCL; тут считается известной теорема Тихонова.
 20. Выведите $((p \vee q) \vee r) \rightarrow (p \vee (q \vee r))$ в исчислении естественной дедукции для PCL.
 21. Выведите $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q$ в исчислении естественной дедукции для PCL.
 22. Выведите $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$ в исчислении естественной дедукции для PCL.
 23. Что такое *сигнатура*? Что такое *структура* данной сигнатуры σ ?
 24. Что такое *гомоморфизм*? *Вложение*? *Изоморфизм*? *Аutomорфизм*?

¹PCL — пропозициональная классическая логика, а QCL — кванторная.

25. Сколько автоморфизмов у $\langle \mathbb{N}; < \rangle$? А у $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$? [Разумеется, ответы следует обосновать.]
26. Что такое *терм*? Покажите, что если терм t является началом термина s , то $t = s$.
27. Сформулируйте и докажите утверждение о единственности представления термов.
28. Сформулируйте и докажите основное утверждение о подтермах.
29. Что такое *формула* в QCL? Какие вхождения переменной в формулу (в QCL) называются *связанными*, а какие — *свободными*? Какие формулы называют *предложениями*?
30. t называется *свободным для (подстановки вместо) x в Φ* , если ...
31. Опишите семантику для QCL.
32. Сформулируйте и докажите утверждение о сохранении истинности при изоморфизме.
33. Что такое $\text{Th}(\mathcal{K})$ и $\text{Th}(\mathcal{A})$? Что такое *элементарная эквивалентность*?
34. $S \subseteq A^l$ называется *определимым в \mathcal{A}* , если ... Покажите, что \mathbb{P} определимо в $\langle \mathbb{N}; | \rangle$, где $|$ интерпретируется как отношение делимости.
35. Покажите, что $\{p^n \mid p \in \mathbb{P} \text{ и } n \in \mathbb{N}\}$ определимо в $\langle \mathbb{N}; \perp \rangle$, где \perp интерпретируется как отношение взаимной простоты.
36. Покажите, что функция умножения на \mathbb{N} определима в $\langle \mathbb{N}; =, \text{Sq}; + \rangle$, где Sq интерпретируется как одноместный предикат «быть квадратом».
37. Что такое «метод автоморфизмов»? Приведите примеры его применения.
38. Покажите, что любая биекция из \mathbb{P} на \mathbb{P} может быть единственным образом (!) расширена до автоморфизма $\langle \mathbb{N}; | \rangle$.
39. Что понимается под *аксиомами равенства для σ* , т.е. что такое Eq_σ ?²
40. Сформулируйте и докажите утверждение о «теориях с равенством».
41. Что такое *конгруэнция*?
42. Дайте альтернативное описание конгруэнций в теории групп.
43. Дайте альтернативное описание конгруэнций в теории колец.
44. Пусть σ состоит только из одноместных предикатных символов. Покажите, что если у σ -предложения Φ есть модель, то у него есть модель мощности не более 2^n , где n — число предикатных символов в Φ .
45. Что такое *конечный спектр предложения*? *Конечный спектр*? Покажите, что если S_1 и S_2 — конечные спектры, то $S_1 \cap S_2$ и $S_1 \cup S_2$ — также конечные спектры.
46. Покажите, что $\{3 \cdot n \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } n \neq 0\}$ является конечным спектром.
47. Покажите, что $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } n \neq 0\}$ является конечным спектром.
48. Опишите кванторные аксиомы и правила гильбертовского исчисления для QCL.
49. Выведите $\neg \forall x \Phi \leftrightarrow \exists x \neg \Phi$ в гильбертовском исчислении для QCL [при этом можно пользоваться пропозициональными тавтологиями].

²Здесь подразумевается, что символ $=$ содержится в Pred_σ , причём его местность равна 2.

50. Выведите $\forall x (\Phi \vee \Psi) \leftrightarrow (\forall x \Phi \vee \Psi)$, где $x \notin FV(\Psi)$, в гильбертовском исчислении для QCL.
51. Выведите $\exists y \forall x \Phi \rightarrow \forall x \exists y \Phi$ в гильбертовском исчислении для QCL. Покажите, что обратная импликация в общем случае невыводима в QCL.
52. Опишите алгоритм приведения формул в QCL к п.н.ф.
53. Сформулируйте и докажите теорему дедукции для \vdash в QCL [при этом можно пользоваться доказательством теоремы дедукции для \vdash в PCL].
54. Покажите, что правила Вернайса, BR1 и BR2, сохраняют общезначимость.
55. Что такое *обогащение*? *Обеднение*?
56. Сформулируйте теорему о компактности \models в QCL; переформулируйте её в терминах выполнимости [с обоснованием].
57. Верно ли, что если у множества предложений есть сколь угодно большие конечные модели, то у него есть также бесконечные модели? [Ответ следует обосновать.]
58. Что такое *подструктура*? Всякая ли подструктура поля является полем?
59. Что такое *элементарная подструктура*? Сформулируйте теорему Лёвенгейма–Сколема о понижении мощности.
60. Приведите схему доказательства теоремы Лёвенгейма–Сколема о понижении мощности.
61. Покажите, что $|\text{Form}_\sigma| = \max\{|\text{Pred}_\sigma|, |\text{Func}_\sigma|, |\text{Const}_\sigma|, \aleph_0\} = \max\{|\sigma|, \aleph_0\} = |\text{Sent}_\sigma|$.
62. Покажите, что если у $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$ есть бескон. модель, то для каждого кардинала $\kappa \geq |\text{Sent}_\sigma|$ у Γ есть модель мощности κ .
63. Какие классы структур называются (*конечно*) *аксиоматизируемыми*? Аксиоматизируем ли класс всех конечных полей, например?
64. Сформулируйте и докажите простейший критерий конечной аксиоматизируемости.
65. Будет ли аксиоматизируем/конечно аксиоматизируем класс всех делимых абелевых групп? [Разумеется, ответы следует обосновать.]
66. Пусть \mathfrak{A} — модель $\text{Th}(\mathfrak{N})$. Покажите, что $\text{lp.}[\mathfrak{p}^{\mathfrak{A}}]$ вкладывает \mathfrak{N} в \mathfrak{A} .³
67. Есть ли у $\text{Th}(\mathfrak{N})$ счётные нестандартные модели? [Ответ следует обосновать.]
68. Пусть \mathfrak{A} — модель $\text{Th}(\mathfrak{N})$. Покажите, что в \mathfrak{A} всякий нестандартный элемент (если таковой существует) больше всех стандартных.
69. Пусть \mathfrak{A} — модель $\text{Th}(\mathfrak{N})$. Чему равносильно $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{N}$? [Ответ следует обосновать.]

Обновлено: 4 апреля 2021 г.

³Напоминаю, что через \mathfrak{N} мы обозначаем стандартную модель арифметики.