Формальные слова

Упражнение 1

Пусть $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$. Покажите, что никакие два различных вхождения ϕ в ψ не пересекаются, т.е. одно из них заканчивается раньше, чем начинается другое.

Упражнение 2

Пусть $\{\phi, \psi, \chi\} \subseteq \mathrm{Form}$. Покажите, что если вхождение ϕ и вхождение ψ в χ пересекаются, то одно из них находится внутри другого.

PCL: естественная дедукция I

Упражнение 1

Выведите в исчислении естественной дедукции для PCL:

`I1.` $\phi \to (\psi \to \phi)$;

`I2.` $(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$;

`C1.` $\phi \wedge \psi \to \phi$;

`C2.` $\phi \wedge \psi \to \psi$;

`C3.` $\phi \to (\psi \to \phi \wedge \psi)$;

`D1.` $\phi \to \phi \vee \psi$;

`D2.` $\psi \to \phi \vee \psi$;

`D3.` $(\phi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \vee \psi \to \chi))$;

`N1.` $(\phi \to \psi) \to ((\phi \to \neg\psi) \to \neg\phi)$;

`N2.` $\neg\phi \to (\phi \to \psi)$; *%‘ex falso quodlibet’*

`N3.` $\phi \vee \neg\phi$. *%‘tetrium non datur’ (неудачное название)*

Упражнение 2

Выведите в исчислении естественной дедукции для PCL:

`IT.` $(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$; *%транзитивность импликации*

`PE.` $(\phi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\phi \to \chi))$. *%перестановка посылок*

Упражнение 3

Выведите в исчислении естественной дедукции для PCL:

`2N.` $\phi \to \neg\neg\phi$; *%введение двойного отрицания*

`Co.` $(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$. *%контрапозиция*

Упражнение 4

Выведите в исчислении естественной дедукции для PCL:

<u>2N</u>. $\neg\neg\phi \to \phi$; *%снятие двойного отрицания*

<u>Co</u>. $(\neg\psi \to \neg\phi) \to (\phi \to \psi)$; *%обратная контрапозиция*

NE. $(\neg\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \neg\psi) \to \phi)$. *%снятие отрицания, «от противного»*

PCL: естественная дедукция II

В ходе выполнения упражнений из данного раздела стоит отмечать, где можно обойтись без ¬Elim; справа (в скобках) указано ориентировочное количество горизонтальных черт, т.е. применений правил естественной дедукции, не считая Ax.

Упражнение 1

Выведите в исчислении естественной дедукции для PCL:

a. $(p \vee q) \to (q \vee p)$; %(4)

b. $((p \vee q) \vee r) \to (p \vee (q \vee r))$. %(8)

Упражнение 2

Выведите в исчислении естественной дедукции для PCL:

a. $(p \wedge (q \vee r)) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$; %(9)

b. $((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \to (p \wedge (q \vee r))$; %(10)

c. $(p \vee (q \wedge r)) \to ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$; %(10)

d. $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \to (p \vee (q \wedge r))$. %(9)

Упражнение 3

Выведите в исчислении естественной дедукции для PCL:

a. $\neg (p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)$; %(6)

b. $(\neg p \wedge \neg q) \to \neg (p \vee q)$; %(7)

c. $\neg (p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$; %(7)

d. $(\neg p \vee \neg q) \to \neg (p \wedge q)$. %(6)

Упражнение 4

Выведите в исчислении естественной дедукции для PCL:

a. $(\neg p \vee q) \to (p \to q)$; %(4)

b. $(p \to q) \to (\neg p \vee q)$; %(6)

c. $((p \to q) \to p) \to p$. %(5)

PCL: гильбертовское исчисление

Упражнение 1

Выведите IT и PE из I1–I2 с помощью MP.

Упражнение 2

Выведите 2N и Co из I1–I2, N1 с помощью MP.

Обратные к 2N и Co импликации выводятся не столь просто и в определённом смысле «неконструктивны».

Упражнение 3

Выведите 2N и Co из I1–I2, D3, N2–N3 с помощью MP.

Далее, NE равносильна сумме N1 и 2N по модулю I1–I2:

Упражнение 4

Выведите с помощью MP:

i. NE из I1–I2, N1, 2N;

ii. N1, 2N из I1–I2, NE.

Из NE можно также получить N2–N3:

Упражнение 5

Выведите с помощью MP:

i. N2 из I1–I2, NE;

ii. N3 из I1–I2, D1–D2, NE.

Стало быть, N1–N3 равносильны NE по модулю «позитивных аксиом». Довольно любопытно, что аксиомы отрицания также равносильны Co:

Упражнение 6

Выведите NE — или N1, 2N — из I1–I2, Co с помощью MP.

Замечание. Подводя итог, вместо N1–N3 мы могли бы взять:

a. NE;

b. N1, 2N;

c. Co.

Первые два варианта используются сравнительно часто, а третий — редко.

Здесь стоит отметить, что если в рассматриваемом гильбертовском исчислении среди схем аксиом есть `I1`–`I2`, а единственным правилом является `MP`, то для этого исчисления верна теорема дедукции, и в упражнениях 1–6 этим можно пользоваться.

Упражнение 7

Без использования теоремы дедукции установите, что:

i. $\{\phi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \phi \to \chi$; *%тут нужны лишь* `I1-I2`

ii. $\vdash \phi \to \neg\neg\phi$. *%тут нужны лишь* `I1-I2, N1`

QCL: Конгруэнции

Пусть дана некоторая σ-структура $\mathfrak{A}$. Мы будем называть $R \subseteq A \times A$ *отношением конгруэнции* (или просто *конгруэнцией*) на $\mathfrak{A}$, если R обладает следующими свойствами:

i. R является эквивалентностью на A;

ii. для каждого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$ и любых $\{a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m\} \subseteq A$,

$$a_1 R b_1, \quad \ldots, \quad a_m R b_m \quad \Longrightarrow \quad f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)\, R f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_m);$$

iii. для каждого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma \setminus \{=\}$ и любых $\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\} \subseteq A$,

$$a_1 R b_1, \quad \ldots, \quad a_n R b_n, \quad P^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \quad \Longrightarrow \quad P^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Главным образом нас будут интересовать «алгебры», т.е. нормальные структуры, в чьих сигнатурах единственным предикатным символом является $=$; поэтому (iii) можно будет опустить.

Упражнение 1

В качестве *сигнатуры (не обязательно абелевых) групп* возьмём

$$\sigma \;:=\; \langle =^2; \cdot^2, \mathrm{inv}^1; 1 \rangle.$$

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа в этой сигнатуре. Для удобства мы будем отождествлять подгруппы $\mathfrak{G}$ с их носителями. Докажите, что для всякого $R \subseteq G^2$ следующие условия эквивалентны:

i. R является конгруэнцией на $\mathfrak{G}$;

ii. существует нормальная подгруппа $H \subseteq G$ такая, что

$$R \;=\; \{(a, b) \in G^2 \mid a \cdot H = b \cdot H\},$$

где $a \cdot H$ обозначает $\{a \cdot h \mid h \in H\}$. %аналогично для $H \cdot a$

Упражнение 2

В качестве *сигнатуры колец (коммутативных и с единицей)* возьмём

$$\sigma \;:=\; \langle =^2; +^2, \cdot^2, -^1; 0, 1 \rangle.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — кольцо в этой сигнатуре. Докажите, что для любого $R \subseteq A^2$ следующие условия эквивалентны:

i. R является конгруэнцией на $\mathfrak{A}$;

ii. существует (кольцевой) идеал $I \subseteq A$ такой, что

$$R \;=\; \{(a, b) \in A^2 \mid a + I = b + I\},$$

где $a + I$ обозначает $\{a + b \mid b \in I\}$.

QCL: Автоморфизмы и спектры

Упражнение 1

Посчитайте мощность множества всех автоморфизмов $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$.

Упражнение 2

Обозначим через $\mathfrak{D}$ нестрогий ч.у.м. с носителем $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, в котором предикатный символ $\leqslant$ интерпретируется как отношение делимости. Покажите, что:

- всякий автоморфизм $\mathfrak{D}$ переводит элементы $\mathbb{P}$ в элементы $\mathbb{P}$;
- каждую биекцию из $\mathbb{P}$ на $\mathbb{P}$ можно ед. образом расширить до автоморфизма $\mathfrak{D}$.

Таким образом, $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{D})$ фактически состоит из перестановок $\mathbb{P}$.

Упражнение 3: в размытой формулировке

Обозначим через $\mathfrak{C}$ структуру в сигнатуре $\langle \perp^2 \rangle$ с носителем $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, в которой $\perp$ интерпретируется как отношение взаимной простоты. Опишите $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{C})$.

Пусть $=$ содержится в Pred_σ, и $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$. Обозначим

$$\text{Fin-Spec}\,(\Phi) \;:=\; \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{существует нормальная } \sigma\text{-структура} \\ \mathfrak{A} \text{ такая, что } \mathfrak{A} \Vdash \Phi \text{ и } |A| = n \end{array} \right\}.$$

Говорят, что $S \subseteq \mathbb{N}$ является *конечным спектром*, если $S = \text{Fin-Spec}\,(\Phi)$ для подходящих сигнатуры σ и σ-предложения Φ. С конечными спектрами связан ряд важных проблем в теоретической информатике и не только.

Упражнение 4

Покажите, что следующие множества являются конечными спектрами:

a. $\{3 \cdot k \mid k \in \mathbb{N} \text{ и } k \neq 0\}$;

b. $\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 1 \pmod 3\}$;

c. $\{k^2 \mid k \in \mathbb{N} \text{ и } k \neq 0\}$;

d. $\mathbb{P}$; %множество всех простых чисел

e. $\{p^k \mid p \in \mathbb{P} \text{ и } k \in \mathbb{N}\}$. %множество всех степеней простых чисел

(Всё это можно сделать с помощью одного общего метода.)

Упражнение 5

Пусть S_1 и S_2 — конечные спектры. Тогда $S_1 \cap S_2$ и $S_1 \cup S_2$ — также конечные спектры.

Одно полезное утверждение, не связанное с спектрами или автоморфизмами:

Упражнение 6

Пусть $\mathrm{Func}_\sigma = \mathrm{Const}_\sigma = \varnothing$, и $\mathrm{arity}_\sigma(P) = 1$ для всех $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$. Для произвольного σ-предложения Φ положим

$$\rho(\Phi) \ := \ \text{число предикатных символов в } \Phi.$$

Докажите, что для каждого $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$ следующие условия эквивалентны:

i. существует σ-структура $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$;

ii. существует σ-структура $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$ и $|A| \leqslant 2^{\rho(n)}$.

QCL: Определимость в структурах

Упражнение 1

Рассмотрим структуру $\langle \mathbb{N}; | \rangle$, где $|$ интерпретируется как (двухместное) отношение делимости. Покажите, что ней определимы:

a. 0 и 1;

b. отношение равенства на $\mathbb{N}$;

c. $\mathbb{P}$ и $\widehat{\mathbb{P}}$ [множество всех степеней простых чисел];

d. отношение взаимной простоты на $\mathbb{N}$; %двухместное

e. функция «наименьшее общее кратное» на $\mathbb{N}$. %двухместная

Упражнение 2

Рассмотрим структуру $\langle \mathbb{N}; \perp \rangle$, где $\perp$ интерпретируется как (двухместное) отношение взаимной простоты. Покажите, что $\widehat{\mathbb{P}}$ определимо в этой структуре.

Упражнение 3

Рассмотрим структуру $\langle \mathbb{N}; \| \rangle$, в которой $\|$ интерпретируется как бинарное отношение

$$\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ делит } y \text{ или } y \text{ делит } x\}.$$

Покажите, что отношение делимости на $\mathbb{N}$ определимо в этой структуре.

Упражнение 4

Рассмотрим нормальную структуру $\langle \mathbb{N}; =, \mathrm{Sq}; + \rangle$, в которой $+$ интерпретируется как функция сложения на $\mathbb{N}$, а Sq — как одноместный предикат «быть квадратом», т.е. как

$$\left\{ n^2 \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Покажите, что функция умножения на $\mathbb{N}$ определима в этой структуре.

См. продолжение на следующей странице.

Упражнение 5

Рассмотрим нормальную структуру $\langle \mathbb{R}\times\mathbb{R}; =, \mathrm{C}\rangle$, где C интерпретируется как трёхместный предикат
$$\Big\{(a,b,c)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^3 \mid \text{длины отрезков } ac \text{ и } bc \text{ равны}\Big\}.$$
Покажите, что в ней определимы:

a. $R_1 := \Big\{(a,b,c)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^3 \mid a, b \text{ и } c \text{ лежат на одной прямой}\Big\}$;

b. $R_2 := \Big\{(a,b,c,d)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^4 \mid a\neq b,\ c\neq d,\ \text{и прямые } ab \text{ и } cd \text{ параллельны}\Big\}$;

c. $R_3 := \Big\{(a,b,c,d)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^4 \mid \text{длины отрезков } ab \text{ и } cd \text{ равны}\Big\}$.

(Пункты даны в естественном порядке.)

QCL: гильбертовское исчисление

Дедуктивно эквивалентные формулы можно заменять друг на друга в любом контексте:

Упражнение 1

Пусть $\vdash \Phi \leftrightarrow \Psi$. Тогда $\vdash \Theta \leftrightarrow \Theta\,[\Phi/\Psi]$ для всех $\Theta \in \mathrm{Form}_\sigma$.

При надобности связанные переменные можно переименовывать:

Упражнение 2

Выведите в кванторном исчислении:

$\exists x\, \Phi \leftrightarrow \exists y\, \Phi\,(x/y)$, где y — переменная, не входящая в Φ. *%на лекции было для $\forall$*

(Здесь речь идёт о схеме формул, причём Φ может иметь свободные переменные, отличные от x, а потому $\exists x\, \Phi$ не обязана быть предложением.)

Далее, можно получить «кванторные аналоги законов де Моргана»:

Упражнение 3

Выведите в кванторном исчислении:

i. $\neg\exists x\, \Phi \leftrightarrow \forall x\, \neg\Phi$;

ii. $\neg\forall x\, \Phi \leftrightarrow \exists x\, \neg\Phi$. *%обратная импликация была на лекции*

Стоит также отметить, что в определённом смысле $\forall$ ведёт себя дистрибутивно относительно $\wedge$, а $\exists$ — относительно $\vee$; впрочем по природе это скорее ассоциативность.

Упражнение 4

Выведите в кванторном исчислении:

i. $(\forall x\, \Phi \wedge \forall x\, \Psi) \leftrightarrow \forall x\, (\Phi \wedge \Psi)$;

ii. $(\exists x\, \Phi \vee \exists x\, \Psi) \leftrightarrow \exists x\, (\Phi \vee \Psi)$.

См. продолжение на следующей странице.

Вместе с тем на практике более полезным оказывается трюк с последовательным вынесением кванторов:

Упражнение 5

Выведите в первопорядковом исчислении:

i. $(\forall x\, \Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow \forall x\ (\Phi \wedge \Psi)$, где $x \notin \mathrm{FV}(\Psi)$;

ii. $(\exists x\, \Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow \exists x\ (\Phi \wedge \Psi)$, где $x \notin \mathrm{FV}(\Psi)$;

iii. $(\forall x\, \Phi \vee \Psi) \leftrightarrow \forall x\ (\Phi \vee \Psi)$, где $x \notin \mathrm{FV}(\Psi)$;

iv. $(\exists x\, \Phi \vee \Psi) \leftrightarrow \exists x\ (\Phi \vee \Psi)$, где $x \notin \mathrm{FV}(\Psi)$.

Замечание. В качестве отдельного простого упражнения можно было бы показать, что

$$\vdash \Psi \leftrightarrow \forall \Psi \quad \text{и} \quad \vdash \Psi \leftrightarrow \exists \Psi$$

где $x \notin \mathrm{FV}(\Phi)$. Зная это, (i) и (iv) в упражнении 5 следуют из упражнения 4.

Упражнения 1–3 и 5 лежат в основе синтаксического варианта алгоритма приведения кванторных формул к пренексным нормальным формам.

Упражнение 6

Для всякой σ-формулы Φ найдется п.н.ф. Φ' такая, что $\vdash \Phi \leftrightarrow \Phi'$.

По поводу необратимых в общем случае импликаций:

Упражнение 7: дополнительное

Выведите в кванторном исчислении:

i. $\exists x\, \forall y\, \Phi \to \forall y\, \exists x\, \Phi$;

ii. $\exists x\, (\Phi \wedge \Psi) \to \exists x\, \Phi \wedge \exists x\, \Psi$;

iii. $\forall x\, \Phi \vee \forall x\, \Psi \to \forall x\, (\Phi \vee \Psi)$.

Покажите, что никакая из обратных импликаций не выводима в кванторном исчислении.

QCL: Аксиоматизируемость

%дополнительно

Упражнение 1

Напоминаю, что под *сигнатурой абелевых групп* понимается

$$\sigma \ := \ \langle =^2; +^2, -^1; 0 \rangle;$$

$\mathcal{K}_{\mathsf{cyc}}$ обозначает класс всех циклических групп. Покажите, что у $\operatorname{Th}(\mathcal{K}_{\mathsf{cyc}})$ есть счётная модель, которая не является циклической группой.

Можно сказать, что «$\mathcal{K}_{\mathsf{cyc}}$ не аксиоматизируем даже в мощности не более $\aleph_0$».

Упражнение 2

Пусть σ — сигнатура колец/полей. Для каждого $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ положим

$$\mathcal{K}_p \ := \ \text{класс всех полей характеристики } p.$$

Покажите, что для любого $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$ существует достаточно большое $N_\Phi \in \mathbb{N}$ такое, что из $\Phi \in \operatorname{Th}(\mathcal{K}_0)$ следует $\Phi \in \operatorname{Th}(\mathcal{K}_p)$ для всех простых $p > N_\Phi$.[1]

Стало быть, $\mathcal{K}_0$ аксиоматизируем, но не конечно аксиоматизиуем.

Упражнение 3

Пусть σ — сигнатура теории колец. Тут под ***кольцами*** мы всюду понимаем коммутативные кольца с единицей. Возьмём

$$\sigma' \ := \ \sigma \cup \{I\},$$

где I — новый одноместный предикатный символ. Для всякой σ-структуры $\mathfrak{A}$ и каждого $B \subseteq A$ обозначим σ'-обогащение $\mathfrak{A}$, в котором I интерпретируется как B, через $\langle \mathfrak{A}, B \rangle$.

i. Покажите, что класс всех колец конечно аксиоматизируем.

ii. Постройте σ'-предложение Φ такое, что для любых кольца $\mathfrak{A}$ и $B \subseteq A$,

$$\langle \mathfrak{A}, B \rangle \Vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad B \text{ — идеал } \mathfrak{A}.$$

iii. Постройте σ'-предложение Φ такое, что для любых кольца $\mathfrak{A}$ и $B \subseteq A$,

$$\langle \mathfrak{A}, B \rangle \Vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad B \text{ — максимальный идеал } \mathfrak{A}.$$

Напоминаю, под *кольцом главных идеалов* понимают такое кольцо, каждый идеал которого является главным.

[1] Иными словами, любое предложение Φ, истинное во всех полях характеристики 0, истинно также во всех полях характеристики $p > N_\Phi$.

Упражнение 4

Покажите, что класс всех колец главных идеалов не аксиоматизируем.