По поводу аксиоматизируемости (и нестандартных моделей)

Станислав Олегович Сперанский

ФМКН СПбГУ

Санкт-Петербург 2021

Что мы считаем известным–1

Теорема (о компактности $\vDash$, a.k.a. локальная т. Гёделя–Мальцева)

Для любых $\Gamma \subseteq \mathsf{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathsf{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vDash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \vDash \Phi \quad \text{для некоторого конечного } \Delta \subseteq \Gamma.$$

В частности, $\Gamma \nvDash \bot$, *е.т.е.* $\Delta \nvDash \bot$ *для всех конечных* $\Delta \subseteq \Gamma$, *а значит,* Γ *выполнимо, е.т.е. всякое конечное подмножество* Γ *выполнимо.*

Замечание

Пусть $\Gamma \subseteq \mathsf{Sent}_\sigma$. Говорят, что Γ локально выполнимо, если всякое конечное подмножество Γ выполнимо. Стало быть,

$$\Gamma \text{ выполнимо} \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \text{ локально выполнимо};$$

отсюда «локальная» в альтернативном названии. К слову, локальная выполнимость влечёт непротиворечивость по т. о корректности.

Что мы считаем известным–2

С помощью теоремы о компактности для $\vDash$ можно получить немало интересных результатов. Например:

Предложение

Пусть у $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ есть модели сколь угодно большой конечной мощности. Тогда у Γ есть бесконечная модель.

Другой полезный результат, который можно либо извлечь из док-ва теоремы о сильной полноте $\vdash$, либо установить независимо:

Предложение

Для всякого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ следующие условия эквивалентны:

i. *у Γ есть бесконечная модель;*

ii. *для каждого кардинала $\varkappa \geqslant |\mathrm{Sent}_\sigma|$ у Γ есть модель мощности $\varkappa$.*

Аксиоматизируемость

Для произвольного класса $\mathcal{K}$ σ-структур положим

$$\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}) \;:=\; \{\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma \mid \mathfrak{A} \Vdash \Phi \text{ для всех } \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}.$$

Вместо $\mathrm{Th}\,(\{\mathfrak{A}\})$ часто пишут $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{A})$. С другой стороны, для всякого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ определим

$$\mathrm{Mod}\,(\Gamma) \;:=\; \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \Vdash \Phi \text{ для всех } \Phi \in \Gamma\}.$$

Строго говоря, $\mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ — ровно как и $\mathcal{K}$ — представляет собой класс (не множество). Однако мы будем демонстративно игнорировать это обстоятельство. На самом деле, можно трактовать «принадлежность классу» как конкретное условие на σ-структуры. Так,

$$\mathfrak{A} \;\in\; \mathrm{Mod}\,(\Gamma) \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Gamma.$$

Вместо $\mathrm{Mod}\,(\{\Phi\})$ обычно пишут $\mathrm{Mod}\,(\Phi)$.

Замечание

Легко видеть, что Th антимонотонно:

$$\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{Th}(\mathcal{K}_1) \supseteq \mathrm{Th}(\mathcal{K}_2).$$

Аналогично для Mod:

$$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{Mod}(\Gamma_1) \supseteq \mathrm{Mod}(\Gamma_2).$$

Стоит также отметить, что

$$\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K})) \quad \text{и} \quad \Gamma \subseteq \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Gamma)).$$

Говорят, что $\mathcal{K}$ аксиоматизируем, если $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ для некоторого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Начнём с «наибольшей аксиоматизации»:

Предложение

Для любого класса $\mathcal{K}$ σ-структур,

$$\mathcal{K}\ \textit{аксиоматизируем} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{K} \;=\; \mathrm{Mod}\,(\mathrm{Th}\,(\mathcal{K})).$$

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Очевидно.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ для нек. $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Ясно, что $\Gamma \subseteq \mathrm{Th}\,(\mathcal{K})$, а потому

$$\mathcal{K} \;\subseteq\; \mathrm{Mod}\,(\mathrm{Th}\,(\mathcal{K})) \;\subseteq\; \mathrm{Mod}\,(\Gamma) \;=\; \mathcal{K}.$$

В итоге $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}))$. $\square$

Однако обычно ищутся по возможности простые и обозримые аксиоматизации. Так, $\mathcal{K}$ называется конечно аксиоматизируемым, если $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ для некоторого конечного $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$, что, разумеется, равносильно $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Phi)$ для некоторого $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$.

Предложение

Для любого класса $\mathcal{K}$ σ-структур,

$$\mathcal{K} \text{ конечно аксиоматизируем} \iff \mathcal{K} \text{ и } \overline{\mathcal{K}} \text{ аксиоматизируемы},$$

где $\overline{\mathcal{K}}$ обозначает класс всех σ-структур, не лежащих в $\mathcal{K}$.

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Phi)$ для нек. $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$. Тогда $\overline{\mathcal{K}} = \mathrm{Mod}\,(\neg\Phi)$.

. . .

Доказательство (продолжение).

$\Longleftarrow$ Пусть $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ и $\overline{\mathcal{K}} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma')$ для некоторых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Gamma' \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Ясно, что

$$\mathrm{Mod}\,(\Gamma \cup \Gamma') \;=\; \mathrm{Mod}\,(\Gamma) \cap \mathrm{Mod}\,(\Gamma') \;=\; \varnothing.$$

Значит, найдутся кон. $\Delta \subseteq \Gamma$ и $\Delta' \subseteq \Gamma'$ такие, что $\mathrm{Mod}\,(\Delta \cup \Delta') = \varnothing$, т.е. $\mathrm{Mod}\,(\Delta) \cap \mathrm{Mod}\,(\Delta') = \varnothing$. Тогда

$$\mathrm{Mod}\,(\Gamma) \;\subseteq\; \mathrm{Mod}\,(\Delta) \;\subseteq\; \overline{\mathrm{Mod}\,(\Delta')} \;\subseteq\; \overline{\mathrm{Mod}\,(\Gamma')} \;=\; \mathrm{Mod}\,(\Gamma).$$

В итоге $\mathrm{Mod}\,(\Delta) = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$. □

Примеры из теории групп

В этом разделе под сигнатурой теории абелевых групп понимается

$$\sigma \ := \ \langle =^2; +^2, -^1; 0 \rangle .$$

Обозначим через Θ конъюнкцию следующих σ-предложений:

- $\forall x \, \forall y \, \forall z \, ((x + y) + z = x + (y + z))$;
- $\forall x \, \forall y \, (x + y = y + x)$;
- $\forall x \, (x + 0 = x)$;
- $\forall x \, (x + (-x) = 0)$.

Абелевы группы (как σ-структуры) суть в точности модели $\{\Theta\}$, т.е. класс всех абелевых групп равен $\mathrm{Mod}\,(\Theta)$; отметим, что существуют абелевы группы любой бесконечной мощности.

Для удобства введем ряд обозначений:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{<\omega} &:= \text{класс всех конечных абелевых групп;} \\ \mathcal{K}_{\kappa} &:= \text{класс всех абелевых групп мощности } \kappa; \\ \mathcal{K}_{\geqslant\omega} &:= \text{класс всех бесконечных абелевых групп} \end{aligned}$$

(здесь κ — произвольный кардинал).

Предложение

$\mathcal{K}_{<\omega}$ *не аксиоматизируем.*

Доказательство.

Пусть $\mathcal{K}_{<\omega} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ для нек. $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Очевидно, у Γ есть модели сколь угодно большой конечной мощности; поэтому у Γ есть и бесконечная модель — противоречие. $\square$

Предложение

a. $\mathcal{K}_n$ *конечно аксиоматизируем для каждого* $n \in \mathbb{N}$.

b. $\mathcal{K}_\kappa$ *не аксиоматизируем ни для какого беск. кардинала* κ.

Доказательство.

$\boxed{\text{a}}$ Ясно, что

$$\mathcal{K}_0 \;=\; \mathrm{Mod}\,(\bot) \quad \text{и} \quad \mathcal{K}_1 \;=\; \mathrm{Mod}\,(\neg\exists x_1\,\exists x_2\,x_1 \neq x_2).$$

Кроме того, для всякого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ мы имеем

$$\mathcal{K}_n \;=\; \mathrm{Mod}\,(\Theta \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi_{n+1}),$$

где Φ_n обозначает «существует (хотя бы) n различных элементов».

$\boxed{\text{b}}$ Пусть κ — бескон. кардинал, $\mathcal{K}_\kappa = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ для нек. $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Очевидно, у Γ есть бесконечная модель; поэтому у Γ есть и модели любой бесконечной мощности — противоречие. □

Предложение

$\mathcal{K}_{\geqslant\omega}$ *аксиоматизируем, но не конечно аксиоматизируем.*

Доказательство.

Рассмотрим

$$\Gamma \;:=\; \{\Theta\} \cup \{\Phi_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\}.$$

Очевидно, $\mathcal{K}_{\geqslant\omega} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$. Вместе с тем $\mathcal{K}_{\geqslant\omega}$ не конечно аксиоматизируем, поскольку иначе $\mathcal{K}_{<\omega}$ был бы аксиоматизируем. □

Эти примеры пока слабо связаны с группами. Скорее они указывают на общие проблемы с аксиоматизацией таких понятий как

«быть конечным» или «иметь данную мощность».

Давайте добавим специфики в наши рассмотрения:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\mathrm{cyc}} &:= \text{класс всех циклических групп;} \\
\mathcal{K}_{\mathrm{tor}} &:= \text{класс всех (абелевых) групп кручения;} \\
\mathcal{K}_{\overline{\mathrm{tor}}} &:= \text{класс всех (абелевых) групп без кручения;} \\
\mathcal{K}_{\mathrm{div}} &:= \text{класс всех делимых абелевых групп.}
\end{aligned}$$

Для удобства для любых $n \in \mathbb{N}_+$ и $t \in \mathrm{Term}_\sigma$ обозначим

$$nt \;:=\; \underbrace{t + \ldots + t}_{n \text{ штук } t}.$$

Напомним, что (абелеву) группу $\mathfrak{A}$ называют циклической, если найдётся $a_\circ \in A$ такое, что

$$A \;=\; \{0\} \cup \{na_\circ \mid n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{-na_\circ \mid n \in \mathbb{N}_+\}.$$

(здесь в правой части под $+$, $-$ и 0 мы подразумеваем $+^{\mathfrak{A}}$, $-^{\mathfrak{A}}$ и $0^{\mathfrak{A}}$).

Предложение

$\mathcal{K}_{\mathsf{cyc}}$ *не аксиоматизируем.*

Доказательство.

Заметим, что каждая циклическая группа конечна или счётна. Пусть $\mathcal{K}_{\mathsf{cyc}} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ для нек. $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Разумеется, у Γ есть бесконечная модель, а потому у Γ есть и модели любой бесконечной мощности — это противоречит вышеупомянутому ограничению на мощность. $\square$

Замечание (в качестве упражнения)

На самом деле, у $\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_{\mathsf{cyc}})$ есть *счётная* модель, которая не является циклической группой. Это более интересный и тонкий факт.

Напомним, что абелеву группу $\mathfrak{A}$ называют группой кручения, если каждый элемент A имеет конечный порядок, т.е. для всякого $a \in A$ найдётся $n \in \mathbb{N}_+$ такое, что $na = 0$.

Предложение

$\mathcal{K}_{\mathrm{tor}}$ не аксиоматизируем.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{K}_{\mathrm{tor}} = \mathrm{Mod}\,(\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_{\mathrm{tor}}))$. Ясно, что для получения противоречия достаточно построить модель $\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_{\mathrm{tor}})$, которая не является группой кручения. Возьмём

$$\sigma' \ := \ \sigma \cup \{c\},$$

где c — новый константный символ. Рассмотрим σ'-теорию ...

Доказательство (продолжение).

$$\Gamma' := \mathrm{Th}(\mathcal{K}_{\mathrm{tor}}) \cup \{\neg nc = 0 \mid n \in \mathbb{N}_+\}.$$

Покажем, что Γ' локально выполнима. Пусть Δ — произвольное кон. подмножество Γ'. Положим

$$N := \max\{n \in \mathbb{N}_+ \mid \neg nc = 0 \in \Delta\}.$$

Зафиксируем какое-нибудь простое число $p > N$. В качестве модели Δ мы можем взять σ'-обогащение $\mathfrak{Z}_p$, в котором c интерпретируется как 1. Далее, поскольку Γ' локально выполнима, у Γ' есть модель $\mathfrak{A}$. Тогда σ-обеднение $\mathfrak{A}$ будет моделью $\mathrm{Th}(\mathcal{K}_{\mathrm{tor}})$, причём оно не может быть группой кручения, ведь $c^{\mathfrak{A}}$ имеет бесконечный порядок. $\square$

Замечание

Из данного доказательства можно извлечь больше:

> *Пусть $\mathfrak{A}$ — группа кручения, причём A содержит элементы сколь угодно больших конечных порядков. Тогда существует (абелева группа) $\mathfrak{B}$, которая не является группой кручения, но имеет ту же теорию, что и $\mathfrak{A}$, т.е.* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

(Нужно просто заменить $\mathcal{K}_{\mathrm{tor}}$ на $\mathfrak{A}$ на пред. слайде.) Например, роль $\mathfrak{A}$ может играть прямая сумма $\mathfrak{Z}_p$ по всем простым числам p.

Напомним, что абелева группа $\mathfrak{A}$ называется группой без кручения, если каждый ненулевой элемент A имеет бесконечный порядок, т.е. для любых $n \in \mathbb{N}_+$ и $a \in A$, если $a \neq 0$, то $na \neq 0$.

Предложение

$\mathcal{K}_{\overline{\mathrm{tor}}}$ аксиоматизируем, но не конечно аксиоматизируем.

Доказательство.

Для каждого $n \in \mathbb{N}_+$ положим

$$\Psi_n \;:=\; \forall x\,(x \neq 0 \to nx \neq 0),$$

и рассмотрим

$$\Gamma \;:=\; \{\Theta\} \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}_+\}.$$

Разумеется, $\mathcal{K}_{\overline{\mathrm{tor}}} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$. Осталось убедиться, что $\mathcal{K}_{\overline{\mathrm{tor}}}$ не конечно аксиоматизируем. ...

Доказательство (продолжение).

Пусть $\mathcal{K}_{\overline{\text{tor}}} = \mathrm{Mod}\,(\Phi)$ для некоторого $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$. Тогда

$$\mathrm{Mod}\,(\Gamma) \;=\; \mathrm{Mod}\,(\Phi),$$

а потому $\Gamma \vDash \Phi$. Значит, $\Delta \vDash \Phi$ для некоторого кон. $\Delta \subseteq \Gamma$. Положим

$$N \;:=\; \max\{n \in \mathbb{N}_+ \mid \Psi_n \in \Delta\}.$$

Зафиксируем какое-нибудь простое $p > N$. Ясно, что $\mathfrak{Z}_p \Vdash \Delta$, откуда $\mathfrak{Z}_p \Vdash \Phi$, т.е. $\mathfrak{Z}_p \in \mathcal{K}_{\overline{\text{tor}}}$, но при этом $p1 = 0$ — противоречие. □

Замечание

В частности, если предложение Φ истинно во всех группах без кручения (т.е. $\Phi \in \mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_{\overline{\text{tor}}})$), то Φ окажется истинно в некоторой абелевой группе, которая не является группой без кручения.

Напомним, что абелева группа $\mathfrak{A}$ называется делимой, если для всех $n \in \mathbb{N}_+$ и $a \in A$ существует $a' \in A$ такой, что $na' = a$.

Предложение

$\mathcal{K}_{\text{div}}$ аксиоматизируем, но не конечно аксиоматизируем.

Доказательство.

Остаётся в качестве упражнения (по аналогии с предыдущим). $\square$

Замечание

В частности, если предложение Φ истинно во всех делимых абелевых группах (т.е. $\Phi \in \mathrm{Th}(\mathcal{K}_{\text{div}})$), то Φ окажется истинно и в нек. абелевой группе, которая не является делимой.

О нестандартных моделях арифметики

Пусть σ — это сигнатура арифметики.

Под нумералами понимаются замкнутые σ-термы

$$\underline{0} := 0, \quad \underline{1} := \mathsf{s}(0), \quad \underline{2} := \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \quad \ldots$$

Очевидно, $\underline{n}^{\mathfrak{N}} = n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Стало быть, мы имеем:

Упражнение

Пусть $\mathfrak{A}$ *— модель* $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. *Тогда* $\lambda n.\left[\underline{n}^{\mathfrak{A}}\right]$ *вкладывает* $\mathfrak{N}$ *в* $\mathfrak{A}$.

Ясно, что все модели $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ бесконечны. Модель $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ называется нестандартной, если она не изоморфна $\mathfrak{N}$.

Предложение

У $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ *есть счётные нестандартные модели.*

Доказательство.

Для удобства введём сокращение

$$x < y \;:=\; \exists z\,(z \neq 0 \wedge x + z = y).$$

Идея состоит в том, чтобы обеспечить наличие в модели *бесконечно большого по отношению к обычным числам элемента*. Возьмём

$$\sigma' \;:=\; \sigma \cup \{c\},$$

где c — новый константый символ. Рассмотрим σ'-теорию

$$\Gamma \;:=\; \mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

...

Доказательство (продолжение).

Покажем, что Γ локально выполнима. Пусть Δ — произвольное кон. подмножество Γ. Положим

$$N \;:=\; \max\{n \in \mathbb{N} \mid \underline{n} < c \in \Delta\} + 1.$$

В качестве модели Δ подходит σ'-обогащение $\mathfrak{N}$, в котором c интерпретируется как N. Итак, поскольку Γ локально выполнима, у Γ есть модель $\mathfrak{A}$; при этом можно считать, что $|A| \leqslant \aleph_0$, а потому $|A| = \aleph_0$. Тогда σ-обеднение $\mathfrak{A}$ будет моделью $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. $\square$

Пусть $\mathfrak{A}$ — модель $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Обозначим

$$\mathrm{St}^{\mathfrak{A}} := \{\underline{n}^{\mathfrak{A}} \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{и} \quad \overline{\mathrm{St}}^{\mathfrak{A}} := A \setminus \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}.$$

Элементы $\mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$ называются стандартными, а $\overline{\mathrm{St}}^{\mathfrak{A}}$ — нестандартными. Как мы знаем, $\mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$ является носителем изоморфной копии $\mathfrak{N}$.

Предложение

Пусть $\mathfrak{A}$ — модель $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Тогда

$$a < a' \quad \textit{для любых } a \in \mathrm{St}^{\mathfrak{A}} \textit{ и } a' \in \overline{\mathrm{St}}^{\mathfrak{A}}$$

т.е. всякий нестандартный элемент больше всех стандартных.

Доказательство.

Для удобства введём сокращение

$$x \leqslant y \ := \ x < y \vee x = y.$$

Заметим, что в $\mathfrak{A}$ истинно

$$\Phi \ := \ \forall x \forall y \, (x < y \leftrightarrow y \nleqslant x).$$

Кроме того, в $\mathfrak{A}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ истинно

$$\Theta_n \ := \ \forall x \, (x \leqslant \underline{n} \leftrightarrow (x = \underline{0} \vee \ldots \vee x = \underline{n})).$$

Теперь пусть $a \in \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$ и $a' \in \overline{\mathrm{St}}^{\mathfrak{A}}$. Тогда $a = \underline{n}^{\mathfrak{A}}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Если $a' \leqslant \underline{n}^{\mathfrak{A}}$, то $a' \in \left\{\underline{0}^{\mathfrak{A}}, \ldots, \underline{n}^{\mathfrak{A}}\right\}$ — противоречие с $a' \notin \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$. Стало быть, $a' \nleqslant a$, откуда мы получаем $a < a'$. $\square$

Предложение

Пусть $\mathfrak{A}$ *— модель* $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

i. A *равно* $\mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$;

ii. $\mathfrak{A}$ *изоморфна* $\mathfrak{N}$;

iii. $\mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$ *определимо в* $\mathfrak{A}$.

Доказательство.

$\boxed{\mathrm{i} \Rightarrow \mathrm{ii}}$ Очевидно.

$\boxed{\mathrm{ii} \Rightarrow \mathrm{iii}}$ Пусть $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{N}$. Зафиксируем изоморфизм ξ из $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{A}$. Тогда

$$\xi\left(0^{\mathfrak{N}}\right) = 0^{\mathfrak{A}}, \quad \xi\left(\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}\left(0^{\mathfrak{N}}\right)\right) = \mathrm{s}^{\mathfrak{A}}\left(0^{\mathfrak{A}}\right), \quad \ldots$$

Значит, $\xi[\mathbb{N}] = \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$, т.е. $A = \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$. Очевидно, A определимо в $\mathfrak{A}$. . . .

Доказательство (продолжение).

$\boxed{\text{iii} \Rightarrow \text{i}}$ Пусть $\mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$ определимо в $\mathfrak{A}$ посредством некоторой σ-формулы $\Phi(x)$. Заметим, что для каждой σ-формулы $\Psi(x)$ в $\mathfrak{A}$ истинно

$$\Psi(0) \wedge \forall x \, (\Psi(x) \to \Psi(\mathrm{s}(x))) \to \forall x \, \Psi(x).$$

Очевидно $0^{\mathfrak{A}} \in \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$, и для любого $a \in \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$ верно $\mathrm{s}^{\mathfrak{A}}(a) \in \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$; значит,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi(0) \wedge \forall x \, (\Phi(x) \to \Phi(\mathrm{s}(x))).$$

Тогда $\mathfrak{A} \Vdash \forall x \, \Phi(x)$, т.е. $A = \mathrm{St}^{\mathfrak{A}}$. $\square$

Общие замечания

- Нестандартные модели (арифметики и не только) мстительны: всякий раз, когда кажется, что от них удалось избавиться, они возвращаются на более высоком уровне.
- В такой ситуации становится актуальным лозунг

  То, что нас не убивает, делает нас сильнее,

  либо в более позитивном ключе:

  How I learned to stop worrying and love nonstandard models.

  Раз от нестандартных моделей нельзя избавиться, то их нужно изучать и стараться применять. На самом деле, понимание их свойств позволяет получать результаты о [не]выводимости для самых разных дедуктивных систем.