Ещё немного PCL

Станислав Олегович Сперанский

ФМКН СПбГУ

Санкт-Петербург 2021

$\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ называют противоречивым, если $\Gamma \vdash \phi$ и $\Gamma \vdash \neg\phi$ для некоторой $\phi \in \mathrm{Form}$, и непротиворечивым в противном случае.

Для удобства введём обозначения

$$\top := p_\star \to p_\star \quad \text{и} \quad \bot := \neg\top,$$

где $p_\star$ — фиксированная пропозициональная переменная.

Предложение

Для $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ следующие условия эквивалентны:

1. $\Gamma \vdash \psi$ *для всех* $\psi \in \mathrm{Form}$;
2. Γ *противоречиво;*
3. $\Gamma \vdash \bot$.

Доказательство.

$\boxed{1 \implies 2}$ Очевидно.

$\boxed{2 \implies 3}$ Предположим, что существует $\phi \in \mathrm{Form}$ такая, что $\Gamma \vdash \phi$ и $\Gamma \vdash \neg\phi$. Тогда, используя $\mathtt{N2}$, легко получить $\Gamma \vdash \bot$.

$\boxed{3 \implies 1}$ Как мы знаем, $\vdash \top$. Предположим, что $\Gamma \vdash \bot$. Отсюда, используя $\mathtt{N2}$, легко получить $\Gamma \vdash \psi$ для всех $\psi \in \mathrm{Form}$. □

Далее, $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ называют максимальным непротиворечивым, когда не существует непротиворечивого $\Delta \subseteq \mathrm{Form}$ такого, что $\Gamma \subsetneq \Delta$.

Кроме того, говорят, что $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ полно, если для любой $\phi \in \mathrm{Form}$ верно $\phi \in \Gamma$ или $\neg\phi \in \Gamma$.

Теорема

Для любого $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ *следующие условия эквивалентны:*

1. Γ — *простая теория;*
2. Γ *непротиворечиво и полно;*
3. Γ *максимальное непротиворечивое.*

Доказательство.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Пусть Γ — простая теория. Разумеется, Γ непротиворечива, поскольку иначе $\Gamma = \mathrm{Form}$. Кроме того, для каждой $\phi \in \mathrm{Form}$ верно $\vdash \phi \vee \neg\phi$, а потому $\phi \vee \neg\phi \in \Gamma$, откуда $\phi \in \Gamma$ или $\neg\phi \in \Gamma$. ...

Доказательство.

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ Пусть Γ непротиворечиво и полно. Рассмотрим произвольное $\Delta \subseteq \mathrm{Form}$ такое, что $\Gamma \subsetneq \Delta$. Зафикс. какую-нибудь $\phi \in \Delta \setminus \Gamma$. В силу полноты Γ, мы имеем $\neg\phi \in \Gamma$. Стало быть, Δ противоречиво. Таким образом, Γ максимальное непротиворечивое.

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Теперь пусть Γ максимальное непротиворечивое.

Предположим, что $\phi \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \bot$, а значит, $\Gamma \vdash \phi \to \bot$. Стало быть, $\Gamma \nvdash \phi$, поскольку иначе $\Gamma \vdash \bot$.

Предположим, что $\phi \notin \Gamma$ и $\psi \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \bot$ и $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \bot$, а значит, $\Gamma \vdash \phi \to \bot$ и $\Gamma \vdash \psi \to \bot$. Отсюда с помощью D3 мы легко получаем $\Gamma \vdash \phi \vee \psi \to \bot$. Стало быть, $\phi \vee \psi \notin \Gamma$. $\square$

Насыщение...

Лемма (о расширении, a.k.a. Линденбаума)

Пусть $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *таковы, что* $\Gamma \nvdash \phi$*. Тогда существует простая теория* $\Gamma' \supseteq \Gamma$ *такая, что* $\Gamma' \nvdash \phi$*.*

Доказательство.

См. лекции; там нужное Γ' строилось по рекурсии. $\square$

Альтернативное рассуждение

Другое доказательство.

Ясно, что $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ непротиворечиво, поскольку иначе $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \phi$, откуда $\Gamma \vdash \neg\phi \to \phi$, а потому $\Gamma \vdash \phi$:

1.	$(\phi \to \phi) \to ((\neg\phi \to \phi) \to (\phi \vee \neg\phi \to \phi))$	D3
2.	$\phi \to \phi$	знаем
3.	$\neg\phi \to \phi$	по условию
4.	$\phi \vee \neg\phi$	N3
5.	$(\neg\phi \to \phi) \to (\phi \vee \neg\phi \to \phi)$	из 2, 1
6.	$\phi \vee \neg\phi \to \phi$	из 3, 5
7.	ϕ	из 4, 6.

Достаточно показать, что существует максимальное непротиворечивое Γ' такое, что $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \subseteq \Gamma'$. Для этого рассмотрим ...

Другое доказательство (продолжение).

$$\color{red}{A} \ := \ \{\Delta \subseteq \mathrm{Form} \mid \Delta \text{ непротиворечиво}\}.$$

Обозначим за $\color{red}{\leqslant_A}$ порядок по включению на A. Легко убедиться, что ч.у.м. $\langle A, \leqslant_A \rangle$ удовлетворяет условиям леммы Цорна. Следовательно, нужное Γ' существует. □

Однако отметим, что данное доказательство имеет куда более узкий спектр применений по сравнению с исходным.

Пример применения компактности

Пусть E — иррефлексивное и симметричное бинарное отношение на непустом множестве A. Соответствующий сим. иррефл. граф

$$\mathfrak{A} \;=\; \langle A, E\rangle$$

мы будем называть картой. При этом в $\mathfrak{A}$ каждое $S \subseteq A$ индуцирует

$$\langle S, E \cap S \times S\rangle,$$

т.е. подкарту с носителем S. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Тогда $\mathfrak{A}$ можно (правильно) раскрасить в k цветов, если существует $f : A \to k$ такая, что для любых $a_1, a_2 \in A$,

$$(a_1, a_2) \;\in\; E \quad\Longrightarrow\quad f(a_1) \;\neq\; f(a_2).$$

Предложение

Карту $\mathfrak{A}$ нельзя раскрасить в k цветов тогда и только тогда, когда некоторую конечную подкарту $\mathfrak{A}$ нельзя раскрасить в k цветов.

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Очевидно.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Можно считать, что Prop включает

$$P := \{p_i^a \mid a \in A \text{ и } i \in k\}.$$

Для каждого $a \in A$ обозначим

$$\phi_a := \bigvee_{i \in k} p_i^a \wedge \bigwedge_{i \in k} \bigwedge_{j \in k \setminus \{i\}} \neg(p_i^a \wedge p_j^a).$$

...

Доказательство (продолжение).

Наконец, возьмём

$$\Gamma \ := \ \{\phi_a \mid a \in A\} \cup \{\neg(p_i^{a_1} \wedge p_i^{a_2}) \mid (a_1, a_2) \in E \text{ и } i \in k\}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\Gamma \text{ выполнимо} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \text{ можно раскрасить в } k \text{ цветов.}$$

Теперь пусть $\mathfrak{A}$ нельзя раскрасить в k цветов. Тогда Γ невыполнимо, а значит, некоторое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ невыполнимо. Рассмотрим

$$S \ := \ \{a \in A \mid a \text{ встречается среди верхних индексов в } \Delta\}.$$

Легко проверить, что подкарту с носителем S нельзя раскрасить в k цветов. □

Другое доказательство компактности $\models$

Теорема (о компактности $\models$)

Для любых $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \models \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \models \phi \quad \textit{для некоторого конечного } \Delta \subseteq \Gamma.$$

Топологическое док-во.

Заметим, что

$$\Gamma \not\models \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \cup \{\neg\phi\} \text{ выполнимо.}$$

Стало быть, достаточно показать, что для любого $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \text{ выполнимо} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{всякое кон. подмножество } \Gamma \text{ выполнимо.}$$

Слева направо это очевидно. Остаётся показать импликацию справа налево. Для этого нам понадобится теорема Тихонова. ...

Топологическое док-во (продолжение).

Зададим на $2 = \{0, 1\}$ дискретную топологию; соответствующее топологическое пространство обозначим за $\mathbf{2}$. Очевидно, $\mathbf{2}$ компактно.

Понятно, что множество 2^{Prop} всех оценок можно рассматривать как произведение $|\mathrm{Prop}|$ копий $\mathbf{2}$.

Зададим на 2^{Prop} топологию произведения (которую называют тихоновской); соответствующее топологическое пространство обозначим за $\mathbf{2}^{\mathrm{Prop}}$. В силу теоремы Тихонова, $\mathbf{2}^{\mathrm{Prop}}$ компактно.

Как известно, предбазой $\mathbf{2}^{\mathrm{Prop}}$ окажутся множества вида

$$\mathrm{proj}_p^{-1}(\varnothing), \quad \mathrm{proj}_p^{-1}(\{0\}), \quad \mathrm{proj}_p^{-1}(\{1\}) \quad \text{и} \quad \mathrm{proj}_p^{-1}(\{0, 1\}),$$

где $p \in \mathrm{Prop}$. При этом, очевидно,

$$\mathrm{proj}_p^{-1}(\varnothing) = \varnothing \quad \text{и} \quad \mathrm{proj}_p^{-1}(\{0, 1\}) = 2^{\mathrm{Prop}}.$$

...

Топологическое док-во (продолжение).

Стало быть, можно считать, что предбаза состоит из множеств вида

$$B_{p,i} \;:=\; \left\{v \in 2^{\mathrm{Prop}} \mid v\,(p) = i\right\},$$

где $p \in \mathrm{Prop}$ и $i \in \{0, 1\}$. Поскольку

$$B_{p,0} \;=\; 2^{\mathrm{Prop}} \setminus B_{p,1} \quad \text{и} \quad B_{p,1} \;=\; 2^{\mathrm{Prop}} \setminus B_{p,0},$$

все эти множества открыты и замкнуты одновременно, т.е. открыто-замкнуты (англ. *clopen*).

Теперь для каждой $\phi \in \mathrm{Form}$ положим

$$D_\phi \;:=\; \left\{v \in 2^{\mathrm{Prop}} \mid v^*\,(\phi) = 1\right\}.$$

...

Топологическое док-во (продолжение).

Заметим, что для любого $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \text{ выполнимо} \iff \bigcap_{\phi \in \Gamma} D_\phi \neq \varnothing.$$

Далее, легко убедиться в следующем:

- $D_p = B_{p,1}$ для всех $p \in \mathrm{Prop}$;
- для любых $\psi, \chi \in \mathrm{Form}$,

$$D_{\neg\psi} = 2^{\mathrm{Prop}} \setminus D_\psi, \quad D_{\psi\wedge\chi} = D_\psi \cap D_\chi,$$
$$D_{\psi\vee\chi} = D_\psi \cup D_\chi \quad \text{и} \quad D_{\psi\to\chi} = 2^{\mathrm{Prop}} \setminus D_\psi \cup D_\chi.$$

Отсюда без труда выводится, что D_ϕ открыто-замкнуто для каждой $\phi \in \mathrm{Form}$ (здесь используется индуция по построению ϕ). ...

Топологическое док-во (продолжение).

Наконец, пусть $\Gamma \subseteq \mathsf{Form}$ невыполнимо, а значит,

$$\bigcap_{\phi \in \Gamma} D_\phi \;=\; \varnothing.$$

При этом, как мы уже знаем, все D_ϕ замкнуты. Ввиду компактности 2^{Prop}, найдётся конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ такое, что

$$\bigcap_{\phi \in \Delta} D_\phi \;=\; \varnothing,$$

т.е. Δ невыполнимо. $\square$