О (пропозициональной) естественной дедукции

Станислав Олегович Сперанский

ФМКН СПбГУ

Санкт-Петербург 2021

Здесь используются только правила вывода, хотя и более сложные, чем в гильбертовском исчислении. Тем не менее, одно из этих правил по существу играет роль аксиомы:

$$\frac{}{\phi}\;(\mathtt{Ax})$$

Оно вводит новую «активную гипотезу». Это позволяет из данного множества формул выводить выводить любой его элемент.

Импликация

Далее, имеется два правила для импликации:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \phi \to \psi\end{array}}{\psi}\ (\to \texttt{Elim}) \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi}\ (\to \texttt{Intro})$$

Ясно, что $(\to \texttt{Elim})$ является аналогом *modus ponens*, а с помощью $(\to \texttt{Intro})$ можно будет легко получить теорему о дедукции.

Замечание

Запись $[\phi]$ интуитивно означает, что в ходе применения рассматриваемого правила ϕ исключается из списка «активных гипотез».

Конъюнкция

Правила для конъюнкции выглядят естественно:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\phi}\ (\wedge\mathtt{Elim1}) \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\psi}\ (\wedge\mathtt{Elim2})$$

$$\frac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \phi & \psi\end{array}}{\phi \wedge \psi}\ (\wedge\mathtt{Intro})$$

Разумеется, они соответствуют схемам аксиом $\mathtt{C1}$, $\mathtt{C2}$ и $\mathtt{C3}$ гильбертовского исчисления.

Дизъюнкция

Правила для дизъюнкции также довольно естественны:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi\end{array}}{\phi \vee \psi}\;(\vee\texttt{Intro1}) \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\phi \vee \psi}\;(\vee\texttt{Intro2})$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi \vee \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\;(\vee\texttt{Elim})$$

Они, разумеется, соответствуют схемам аксиом $\texttt{D1}$, $\texttt{D2}$ и $\texttt{D3}$ гильбертовского исчисления.

Отрицание

Наконец, для отрицания мы имеем два правила:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}[\phi] & [\phi] \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \neg\psi\end{array}}{\neg\phi}\ (\neg\mathtt{Intro}) \qquad \dfrac{\begin{array}{cc}[\neg\phi] & [\neg\phi] \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \neg\psi\end{array}}{\phi}\ (\neg\mathtt{Elim})$$

Разумеется, $(\neg\mathtt{Intro})$ соответствует схеме аксиом $(\mathtt{N1})$, а $(\neg\mathtt{Elim})$ — методу доказательства от противного.

Замечание

В нашей системе отсутствуют правила, соответствующие $(\mathtt{N2})$ и $(\mathtt{N3})$. Смоделировать $(\mathtt{N2})$ будет легко, а вот с $(\mathtt{N3})$ будет сложнее.

Подробное определение дерева вывода

Деревом мы будем называть связный ациклический (симметричный) граф с выделенной вершиной, именуемой корнем.

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$. Под деревом вывода из Γ, или просто выводом из Γ, в нашем исчислении понимается упорядоченная пара, состоящая из конечного дерева $\langle A, E \rangle$ с корнем o и функции f, которые удовлетворяют следующим условиям.

1. $\mathrm{dom}\,(f) = A$, и f сопоставляет каждой $x \in A$ упоряд. тройку

$$\langle x_{\mathrm{S}}, x_{\mathrm{F}}, x_{\mathrm{R}} \rangle,$$

   где $x_{\mathrm{S}} \in \{0, 1\}$, $x_{\mathrm{F}} \in \mathrm{Form}$ и x_{R} — название одного из правил.
2. Для любой $x \in A$ верно $\mathrm{arity}\,(x) \in \{0, 1, 2, 3\}$.

3. Пусть $x \in A$ и $\mathrm{arity}(x) = 0$. Тогда $x_{\mathrm{R}} = \mathrm{Ax}$.
4. Пусть $x \in A$ и $\mathrm{arity}(x) = 1$; обозначим за y единственного ребёнка x. Тогда выполнено одно из следующих условий:
    4.1 $x_{\mathrm{R}} = \to \mathtt{Intro}$, причём существуют $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ такие, что

    $$y_{\mathrm{F}} = \psi \quad \text{и} \quad x_{\mathrm{F}} = \phi \to \psi$$

    (иными словами, x_{F} получается из y_{F} по $(\to \mathtt{Intro})$);
    4.2 аналогично для $x_{\mathrm{R}} = \wedge\mathtt{Elim1}$;
    4.3 аналогично для $x_{\mathrm{R}} = \wedge\mathtt{Elim2}$;
    4.4 аналогично для $x_{\mathrm{R}} = \vee\mathtt{Intro1}$;
    4.5 аналогично для $x_{\mathrm{R}} = \vee\mathtt{Intro2}$.

5. Пусть $x \in A$ и $\mathrm{arity}(x) = 2$; обозначим за y^1, y^2 двух детей x. Тогда выполнено одно из следующих условий:

   5.1 $x_{\mathrm{R}} = \to \mathtt{Elim}$, причём существуют $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ такие, что

   $$y^1_{\mathrm{F}} = \phi, \quad y^2_{\mathrm{F}} = (\phi \to \psi) \quad \text{и} \quad x_{\mathrm{F}} = \psi$$

   (иными словами, x_{F} получается из y^1_{F} и y^2_{F} по $(\to \mathtt{Elim})$);

   5.2 аналогично для $x_{\mathrm{R}} = \wedge\mathtt{Intro}$;

   5.3 аналогично для $x_{\mathrm{R}} = \neg\mathtt{Intro}$;

   5.4 аналогично для $x_{\mathrm{R}} = \neg\mathtt{Elim}$.

6. Пусть $x \in A$ и $\mathrm{arity}\,(x) = 3$; обозначим за y^1, y^2, y^3 трёх детей x. Тогда $x_\mathsf{R} = \vee\mathtt{Elim}$, причём сущ. $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathsf{Form}$ такие, что

$$y^1_\mathsf{F} \;=\; \phi \vee \psi \quad \text{и} \quad y^2_\mathsf{F} \;=\; y^3_\mathsf{F} \;=\; x_\mathsf{F}$$

(иными словами, x_F получается из y^1_F, y^2_F и y^3_F по $\vee\mathtt{Elim}$).

7. Пусть $z \in A$, $\mathrm{arity}\,(z) = 0$ и $z_\mathsf{S} = 0$. Тогда на пути от o к z сущ. $x \in A$ такая, что выполнено одно из следующих условий:
    - имеет место случай 4.1, причём z_F — это посылка x_F;
    - имеет место случай 5.3, причём $\neg z_\mathsf{F} = x_\mathsf{F}$;
    - имеет место случай 5.4, причём $z_\mathsf{F} = \neg x_\mathsf{F}$;
    - имеет место случай 6, причём либо $\phi = z_\mathsf{F}$ и y^2 лежит на пути от x к z, либо $\psi = z_\mathsf{F}$ и y^3 лежит на пути от x к z.

8. Кроме того, требуется, чтобы

$$\underline{A} \;:=\; \{z_{\mathsf{F}} \mid z \in A,\ \mathrm{arity}\,(z) = 0 \text{ и } z_{\mathsf{S}} = 1\}$$

являлось подмножеством Γ.

Разумеется, o_{F} называется заключением рассматриваемого дерева вывода, а элементы $\underline{A}$ — его (активными) гипотезами.

Для $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$ запись $\Gamma \rhd \phi$ означает, что существует дерево вывода из Γ (в данном исчислении) с заключением ϕ.

Теорема (о дедукции)

Для любых $\Gamma \cup \{\phi, \psi\} \subseteq \mathsf{Form}$,

$$\Gamma \cup \{\phi\} \rhd \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \rhd \phi \to \psi.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\Gamma \rhd \phi \to \psi$. Зафиксируем какое-нибудь дерево вывода

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \phi \to \psi \end{array}$$

из Γ. Тогда

$$\dfrac{\phi \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \phi \to \psi \end{array}}{\psi}$$

будет деревом вывода из $\Gamma \cup \{\phi\}$. Стало быть, $\Gamma \cup \{\phi\} \rhd \psi$. . . .

Доказательство (продолжение).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\Gamma \cup \{\phi\} \rhd \psi$. Зафиксируем какое-нибудь дерево вывода

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \psi \end{array}$$

из $\Gamma \cup \{\phi\}$. Тогда

$$\dfrac{\begin{array}{c} [\phi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \to \psi}$$

будет деревом вывода из Γ. Стало быть, $\Gamma \rhd \phi \to \psi$. $\square$

Кроме того, $\rhd$ монотонно, транзитивно и компактно (так же, как и $\vdash$).

Пример

Покажем, что $\{\phi \wedge \psi\} \rhd \psi \wedge \phi$:

$$\dfrac{\dfrac{\phi \wedge \psi}{\psi} \qquad \dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi}}{\psi \wedge \phi.}$$

С помощью $\to$ `Intro` отсюда легко получить $\rhd \phi \wedge \psi \to \psi \wedge \phi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi \wedge \psi]^1}{\psi} \qquad \dfrac{[\phi \wedge \psi]^1}{\phi}}{\psi \wedge \phi}}{\phi \wedge \psi \to \psi \wedge \phi.}\,(1)$$

Пример

Покажем, что $\{\phi \wedge (\psi \wedge \chi)\} \rhd (\phi \wedge \psi) \wedge \chi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \wedge (\psi \wedge \chi)}{\phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\phi \wedge (\psi \wedge \chi)}{\psi \wedge \chi}}{\psi}}{\phi \wedge \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\phi \wedge (\psi \wedge \chi)}{\psi \wedge \chi}}{\chi}}{(\phi \wedge \psi) \wedge \chi.}$$

Аналогичным образом $\{(\phi \wedge \psi) \wedge \chi\} \rhd \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\phi \wedge \psi) \wedge \chi}{\phi \wedge \psi}}{\phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\phi \wedge \psi) \wedge \chi}{\phi \wedge \psi}}{\psi} \qquad \dfrac{(\phi \wedge \psi) \wedge \chi}{\chi}}{\psi \wedge \chi}}{\phi \wedge (\psi \wedge \chi).}$$

Пример

Покажем, что $\{\phi \to \psi\} \triangleright \phi \wedge \chi \to \psi \wedge \chi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi \wedge \chi]^1}{\phi} \qquad \phi \to \psi}{\psi} \qquad \dfrac{[\phi \wedge \chi]^1}{\chi}}{\psi \wedge \chi}}{\phi \wedge \chi \to \psi \wedge \chi.}\,(1)$$

(Разумеется, $\phi \to \psi$ окажется невыводимым из $\{\phi \wedge \chi \to \psi \wedge \chi\}$.)

Пример

Покажем, что $\{\phi \wedge \psi \to \chi\} \triangleright \phi \to (\psi \to \chi)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^2 \qquad [\psi]^1}{\phi \wedge \psi} \qquad \phi \wedge \psi \to \chi}{\chi}}{\psi \to \chi}\,(1)}{\phi \to (\psi \to \chi).}\,(2)$$

Напротив, покажем, что $\{\phi \to (\psi \to \chi)\} \triangleright \phi \wedge \psi \to \chi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi \wedge \psi]^1}{\psi} \qquad \dfrac{\dfrac{[\phi \wedge \psi]^1}{\phi} \qquad \phi \to (\psi \to \chi)}{\psi \to \chi}}{\chi}}{\phi \wedge \psi \to \chi.}\,(1)$$

Пример

Покажем, что $\{(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \chi)\} \rhd \phi \to \psi \wedge \chi$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\phi]^1 \qquad \cfrac{(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \psi)}{\phi \to \psi}}{\psi} \qquad \cfrac{[\phi]^1 \qquad \cfrac{(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \psi)}{\phi \to \chi}}{\chi}}{\psi \wedge \chi}}{\phi \to \psi \wedge \chi.}\;(1)$$

Напротив, покажем, что $\{\phi \to \psi \wedge \chi\} \rhd (\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \chi)$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\phi]^1 \qquad \phi \to \psi \wedge \chi}{\psi \wedge \chi}}{\psi}}{\phi \to \psi}\;(1) \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\phi]^2 \qquad \phi \to \psi \wedge \chi}{\psi \wedge \chi}}{\chi}}{\phi \to \chi}\;(2)}{(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \chi).}$$

Теорема (о сильной полноте $\rhd$)

Для любых $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \rhd \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vDash \phi.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Это теорема о корректности. Поверим на слово, что она доказывается простой индукцией по построению деревьев вывода.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\Gamma \vDash \phi$. В силу теоремы о сильной полноте $\vdash$, мы имеем $\Gamma \vdash \phi$. Значит, нам достаточно показать, что $\Gamma \vdash \phi$ влечёт $\Gamma \rhd \phi$; это мы установим на втором практическом занятии. $\square$

Замечание

Здесь $\vdash$ обозначает выводимость в гильбертовском исчислении для пропозициональной классической логики — см. вторую лекцию.