Основы математической логики: 1/8

Станислав Олегович Сперанский

ФМКН СПбГУ

Санкт-Петербург 2021

Про формальные слова

Пусть дан алфавит A. Под A-словами, или словами в алфавите A, понимают элементы A^*. Если $w \in A^*$, то $|w|$ (которое совпадает с $\operatorname{dom}(w)$) называют длиной w.

Если $\{w_1, w_2\} \subseteq A^*$, то их конкатенацией называют A-слово

$$w_1 w_2 : \ |w_1| + |w_2| \ \to \ A,$$

определённое по правилу

$$w_1 w_2 (i) \ := \ \begin{cases} w_1 (i) & \text{если} \ \ i < |w_1|, \\ w_2 (j) & \text{если} \ \ i = |w_1| + j. \end{cases}$$

Пусть $w, w' \in A^*$. Говорят, что w' является подсловом w, и пишут $w' \preccurlyeq w$, если $w = v_0 w' v_1$ для некоторых $\{v_0, v_1\} \subseteq A^*$. Разумеется, $\preccurlyeq$ оказывается фундированным частичным порядком на A^*.

Если $w = v_0 w' v_1$, то $\langle w', |v_0| \rangle$ называется вхождением подслова w' в слово w. У данного подслова может быть несколько вхождений.

В дальнейшем, говоря о подсловах, мы будем в действительности нередко подразумевать их вхождения.

Пара примеров

Возьмём в качестве A множество всех букв английского алфавита. Положим

$$w \;:=\; \mathrm{mathematics} \quad \text{и} \quad w' \;:=\; \mathrm{mat}.$$

Тогда $w' \preccurlyeq w$. Более того, у w' имеется ровно два вхождения в w: $\langle w', 0\rangle$ и $\langle w', 5\rangle$. Или положим

$$u \;:=\; \mathrm{alalalalalong} \quad \text{и} \quad u' \;:=\; \mathrm{ala}.$$

Тогда $u' \preccurlyeq u$. Более того, у u' имеется ровно четыре вхождения в u: $\langle u', 0\rangle$, $\langle u', 2\rangle$, $\langle u', 4\rangle$ и $\langle u', 6\rangle$; однако тут некоторые вхождения *пересекаются*, а это не всегда хорошо.

Пусть $\langle w', k\rangle$ — вхождение w' в w, т.е. $w = v_0 w' v_1$, где $\{v_0, v_1\} \subseteq A^*$ и $|v_0| = k$. Тогда для каждого $u \in A^*$ можно определить

$$w\,[w'/u, k] \;:=\; v_0 \; u \; v_1,$$

т.е. $w\,[w'/u, k]$ — это результат замены данного вхождения w' в w на u. Далее, в случае, когда никакие два различных вхождения w' в w не пересекаются, мы можем определить

$w\,[w'/u]$:= результат *одновременной* замены всех вхождений w' в w на u.

Например, если $w = \mathrm{mathematics}$, $w' = \mathrm{mat}$ и $u = \mathrm{tam}$, то $w\,[w'/u]$ будет равно tamhetamics.

Давайте раз и навсегда зафиксируем некоторое счётное множество Prop. Мы будем называть его элементы пропозициональными переменными, или же просто переменными; в метаязыке их роль будут играть p, q, r, ... (возможно, с индексами).

Язык $\mathscr{L}$ классической пропозициональной логики состоит из элементов Prop, а также:

- $\to$, $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ (символы связок);
- (и) (вспомогательные символы).

Разумеется, $\to$, $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ называют символами импликации, конъюнкции, дизъюнкции и отрицания соответственно.

Обозначим через Form наименьшее множество слов в алфавите $\mathscr{L}$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $p \in \mathrm{Prop}$, то $p \in \mathrm{Form}$;
- если $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$, то $(\phi \to \psi) \in \mathrm{Form}$;
- если $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$, то $(\phi \wedge \psi) \in \mathrm{Form}$;
- если $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$, то $(\phi \vee \psi) \in \mathrm{Form}$;
- если $\phi \in \mathrm{Form}$, то $\neg\phi \in \mathrm{Form}$.

Элементы Form называют формулами.

Заметим, что формул длины 0 не бывает, а формулы длины 1 суть в точности пропозициональные переменные.

Будем говорить, что ψ является началом ϕ, и писать $\psi \sqsubseteq \phi$, если $\phi = \psi v$ для некоторого $v \in \mathscr{L}^*$.

Лемма

Пусть $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *таковы, что* $\psi \sqsubseteq \phi$. *Тогда* $\psi = \phi$.

Доказательство.

Возвратная индукция по $|\phi|$.

Пусть $\phi \in \mathrm{Prop}$. Тогда, очевидно, $\psi = \phi$.

Пусть $\phi \notin \mathrm{Prop}$. Возможны два случая:

1. ϕ имеет вид $(\theta \circ \chi)$, где $\{\theta, \chi\} \subseteq \mathrm{Form}$ и $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$;
2. ϕ имеет вид $\neg\theta$, где $\theta \in \mathrm{Form}$.

...

Доказательство (продолжение).

В первом случае ψ должно иметь вид $(\theta' * \chi')$, где $\{\theta', \chi'\} \subseteq \mathrm{Form}$ и $* \in \{\to, \wedge, \vee\}$. Ясно, что

$$\theta \sqsubseteq \theta' \quad \text{или} \quad \theta' \sqsubseteq \theta,$$

откуда $\theta = \theta'$ по и.г. Далее, $\circ$ должно совпасть с $*$, а значит, $\chi' \sqsubseteq \chi$, откуда уже $\chi = \chi'$ по и.г. В итоге $\phi = \psi$.

Во втором случае ψ должно имет вид $\neg\theta'$, где $\theta' \in \mathrm{Form}$. Ясно, что $\theta' \sqsubseteq \theta$, откуда $\theta = \theta'$ по и.г. В итоге $\phi = \psi$. □

Предложение (о единственности представления формул)

Каждую $\phi \in \mathrm{Form} \setminus \mathrm{Prop}$ *можно един. образом представить в виде*

$$(\theta \to \chi), \quad (\theta \wedge \chi), \quad (\theta \vee \chi) \quad \textit{или} \quad \neg\theta,$$

где $\{\theta, \chi\} \subseteq \mathrm{Form}$.

Доказательство.

Ясно, что нужное представление существует. Нужно лишь проверить его единственность.

Пусть $\phi = (\theta \circ \chi) = (\theta' * \chi')$. Тогда $\theta = \theta'$ по лемме выше. Получаем, что $\circ$ и χ должны совпасть с $*$ и χ' соответственно.

Пусть $\phi = \neg\theta = \neg\theta'$. Тогда, очевидно, $\theta = \theta'$. □

Для каждой $\phi \in \mathrm{Form}$ определим

$$\mathrm{Sub}(\phi) := \{\psi \in \mathrm{Form} \mid \psi \preccurlyeq \phi\}.$$

Элементы $\mathrm{Sub}(\phi)$ называют подформулами ϕ.

Лемма

Пусть $\phi \in \mathrm{Form}$. Тогда каждое вхождение $\neg$ или (в ϕ является началом вхождения некоторой подформулы.

Доказательство.

Простая возвратная индукция по $|\phi|$. $\square$

Предложение

Пусть $\phi \in \mathsf{Form}$.

- *Если* $\phi \in \mathsf{Prop}$, *то* $\mathsf{Sub}(\phi) = \{\phi\}$.
- *Если* $\phi = (\theta \circ \chi)$, *где* $\{\theta, \chi\} \subseteq \mathsf{Form}$ *и* $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$, *то*

$$\mathsf{Sub}(\phi) \;=\; \mathsf{Sub}(\theta) \cup \mathsf{Sub}(\chi) \cup \{\phi\};$$

- *Если* $\phi = \neg\theta$, *где* $\theta \in \mathsf{Form}$, *то*

$$\mathsf{Sub}(\phi) \;=\; \mathsf{Sub}(\theta) \cup \{\phi\}.$$

Доказательство.

Непосредственно следует из лемм выше. □

Под оценкой мы будем понимать произвольную функцию из Prop в 2, т.е. в $\{0, 1\}$. Интуитивно 0 — это «ложь», а 1 — «истина».

Далее, всякую $v : \mathrm{Prop} \to 2$ мы можем расширить до $v^* : \mathrm{Form} \to 2$ с помощью следующих эквивалентностей:

$$
\begin{aligned}
v^*(p) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad v(p) = 1; \\
v^*(\phi \to \psi) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad v^*(\phi) \neq 1 \text{ или } v^*(\psi) = 1; \\
v^*(\phi \wedge \psi) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad v^*(\phi) = 1 \text{ и } v^*(\psi) = 1; \\
v^*(\phi \vee \psi) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad v^*(\phi) = 1 \text{ или } v^*(\psi) = 1; \\
v^*(\neg\phi) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad v^*(\phi) \neq 1.
\end{aligned}
$$

При этом вместо $v^*(\phi) = 1$ порой пишут $v \Vdash \phi$.

Таким образом, v^* задается по правилам:

$$\begin{aligned}
v^*(p) &:= v(p); \\
v^*(\phi \to \psi) &:= \max\{1 - v^*(\phi), v^*(\psi)\}; \\
v^*(\phi \wedge \psi) &:= \min\{v^*(\psi), v^*(\psi)\}; \\
v^*(\phi \vee \psi) &:= \max\{v^*(\psi), v^*(\psi)\}; \\
v^*(\neg\phi) &:= 1 - v^*(\phi).
\end{aligned}$$

Часто всё это изображают посредством таблиц истинности:

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

...

Выполнимость и общезначимость

Формулу ϕ называют:

- выполнимой, если $v \Vdash \phi$ для некоторой оценки v;
- общезначимой, если $v \Vdash \phi$ для всех оценок v.

Общезначимые формулы ещё называют тождественно истинными, или тавтологиями. Очевидно,

$$\phi \text{ общезначима} \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\phi \text{ не выполнима.}$$

Теорема (Кук–Левин; должно быть в курсе ТИ)

Проблема выполнимости для проп. кл. логики NP*-полна.*

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ и $\phi \in \mathrm{Form}$. Говорят, что ϕ семантически следует из Γ, и пишут $\Gamma \vDash \phi$, если для любой оценки v,

$$v \Vdash \psi \quad \text{для всех} \quad \psi \in \Gamma \quad \Longrightarrow \quad v \Vdash \phi.$$

Вместо $\varnothing \vDash \phi$ обычно пишут $\vDash \phi$. Очевидно,

$$\vDash \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \phi \text{ общезначима.}$$

Наконец, формулы ϕ и ψ называют семантически эквивалентными, если $\vDash \phi \leftrightarrow \psi$; при этом пишут $\phi \equiv \psi$.

Пример

Для любых $\{\phi, \psi, \chi\} \subseteq \mathsf{Form}$:

$$\begin{aligned}
(\phi \to \psi) &\equiv \neg\phi \vee \psi; \\
(\phi \vee \psi) \wedge \chi &\equiv (\phi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi); \\
(\phi \wedge \psi) \vee \chi &\equiv (\phi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi); \\
\neg(\phi \wedge \psi) &\equiv \neg\phi \vee \neg\psi; \\
\neg(\phi \vee \psi) &\equiv \neg\phi \wedge \neg\psi; \\
\neg\neg\phi &\equiv \phi.
\end{aligned}$$

Упражнение

Всякая формула семантически эквивалентна некоторой д.н.ф.